数理解析研究所講究録
第296巻 1977年 1-13



# goto 文のないプログラム形について

相模工大　岩田茂樹

一般にプログラムはgoto文のないプログラムに変換可能であるが，新しい変数を導入しない，かつ，実行順序を変更しない，という条件のもとでは，goto文なしのプログラムに変換できないことが知られている．笠井氏は，これらの条件のもとで，halt 文を1つしかもたないようなgoto文のないプログラムへ変換できるための必要十分条件を示した．[1]
しかし一般にプログラムは複数個の halt 文をもつ．本稿は上記の条件のもとで，複数個の halt 文をもち，sequence，if-then-else，do-while の3種類の制御構造によってあらわされるようなプログラムへの変換を考え，変換できるための必要十分条件について述べる．

本稿においては，有向グラフの各 node の出次数を2以下と仮定する．<u>フローグラフ</u> (N, E, n) とは有向グラフ (N, E)

で，Nのすべての node が N中のある特定の node n からの path 上にあるものをいう．n を start node という．また，出次数0の node を halt node，出次数1の node を function node，出次数2の node を test node という．

定義　F=(N,E,n) をフローグラフとし，u,v は N の node で，u は halt node ではないとする．もし u が function node で $(u,v)\in E$ ならば，変換 $T_1$ は $(u,v)$，u，v を1つの node $\frac{u}{v}$ におきかえる．このとき u または v に入る edge（$(u,v)$ は除く）は $\frac{u}{v}$ に入り，v を去る edge は $\frac{u}{v}$ を去る．もし u が test node で，u を去り v に入る edge が2つあるならば，変換 $T_2$ は2つの edge のうちの片方の edge $(u,v)$ を除去する．もし u が test node，v が halt node でかつ $(u,v)\in E$ ならば，変換 $T_3$ は $(u,v)$ を除去する．このとき v に入る edge が $(u,v)$ の他になければ，v も除去する．もし u が test node で u を去る edge のうちの1つが $(u,u)$ の形をしているならば，変換 $T_4$ は $(u,u)$ を除去する．

注意　変換 $T_1$，$T_2$ においては，u,v は同一の node であってもよい．

定義　F，F'，F'' をフローグラフとする．変換 $T_i$，$i\in\{1,2,3,4\}$ により，F が F' に変換されるとき，$F\Rightarrow F'$ と

かく．$\overset{*}{\Rightarrow}$は$\Rightarrow$の推移閉包とする．$F \overset{*}{\Rightarrow} F'$で$F' \Rightarrow F''$となるような$F''$が存在しないならば，$F \hat{\Rightarrow} F'$とかく．

補助定理1　$F \hat{\Rightarrow} F'$かつ$F \hat{\Rightarrow} F''$ならば$F' = F''$である．

(証明) Fのedgeの数についての帰納法により証明する．Fが1つのedge $(u, v)$よりなるとき，uは明らかにfunction nodeである．よって$F' = F''$となる．

Fはn edgeからなるフローグラフとし$(n>1)$，n edge以下のフローグラフについては補助定理はなりたつものと仮定する．いま$F \Rightarrow F_1 \hat{\Rightarrow} F'$，$F \Rightarrow F_2 \hat{\Rightarrow} F''$とする．$F_1 \Rightarrow F_3$，$F_2 \Rightarrow F_3$となるような$F_3$の存在を示せば，$F_3$はn edge以下のフローグラフであるから$F_3 \hat{\Rightarrow} F'''$となる．また，$F' = F'''$，$F'' = F'''$であるから$F' = F''$である．

$F \Rightarrow F_1$の変換で$(a, b)$が，また，$F \Rightarrow F_2$の変換で$(c, d)$が除去されたものとする．次の4つの場合にわけて考える．

Case 1　$a = c$，$b = d$のとき．(図1参照)

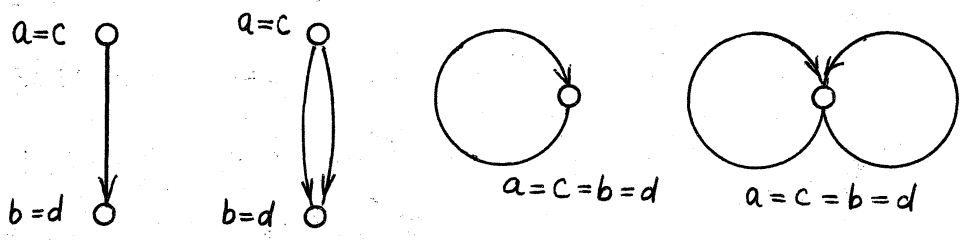



図1．Case 1

明らかに $F_1 = F_2$ である．よって $F' = F''$．

Case 2　$a = c$，$b \neq d$ のとき．（図2参照）

a（または c）は test node である．$a \neq b$，かつ $c \neq d$ ならば b，d 共に halt node である．$a = b$ ならば d は halt node で図2(B)のような場合である．いずれの場合も $F_1$ に (c, d) をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に (a, b) をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ である．$a = d$ のときは $a = b$ の場合と同様に証明される．

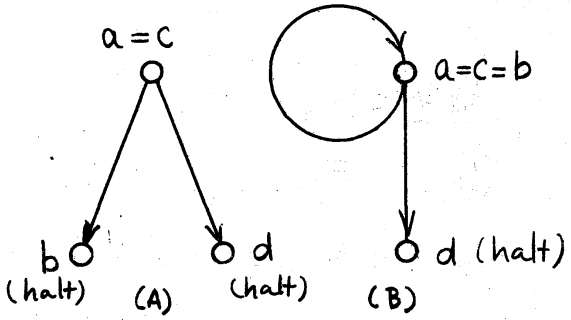


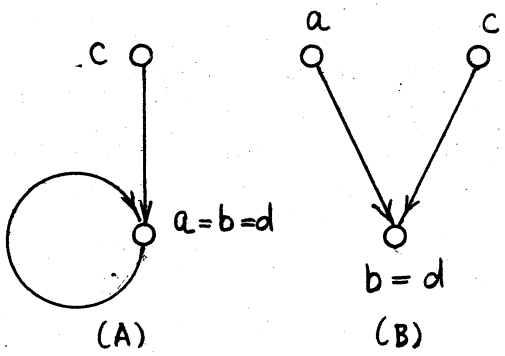
図2．Case 2

Case 3　$a \neq c$，$b = d$ のとき．

Subcase 3.1　a, c が共に function node のとき．

$a = b$ とすると $c \neq d$ である．（図3(A)参照）この場合は $F_1$ に $(c, a/b)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(d/d, d/d)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる．$a \neq b$，$c = d$ のときは上と同様である．$a \neq b$，$c \neq d$ のときは $F_1$ に $(c, a/b)$ をとり除く変換をしたグラ

図3　Subcase 3.1



フと $F_2$ に $(a, c/d)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる．（図3(B)参照）

Subcase 3.2. a が test node で c が function node のとき．

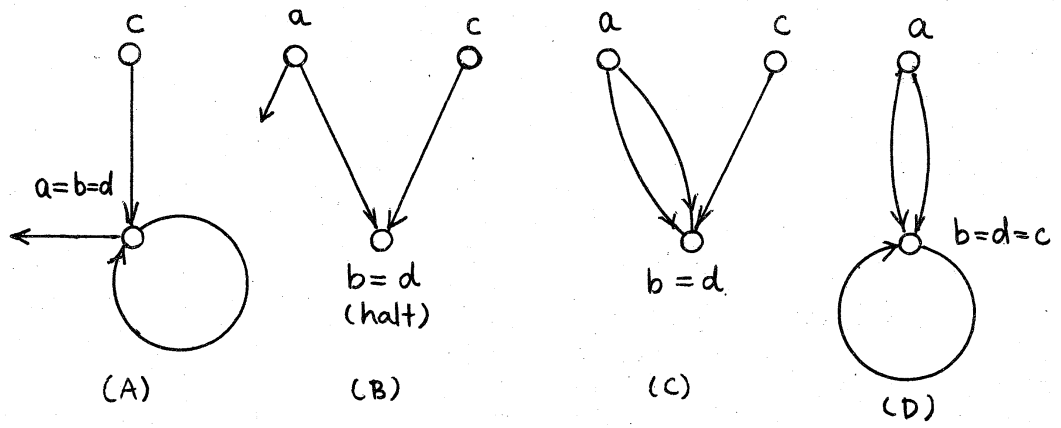



図4 Subcase 3.2.

$a=b$ ならば $c \neq d$．（図4(A)参照） $F_1$ に $(c,d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(c/d, c/d)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる． $a \neq b$ のときは， $F_1$ に $(c,d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a, c/d)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる．（図4(B),(C),(D)参照）

Subcase 3.3. a が function node で c が test node のとき．Subcase 3.2. と同様にして証明される．

Subcase 3.4. a, c 共に test node のとき（図5参照）

$F_1$ に $(c,d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a,b)$ をとり

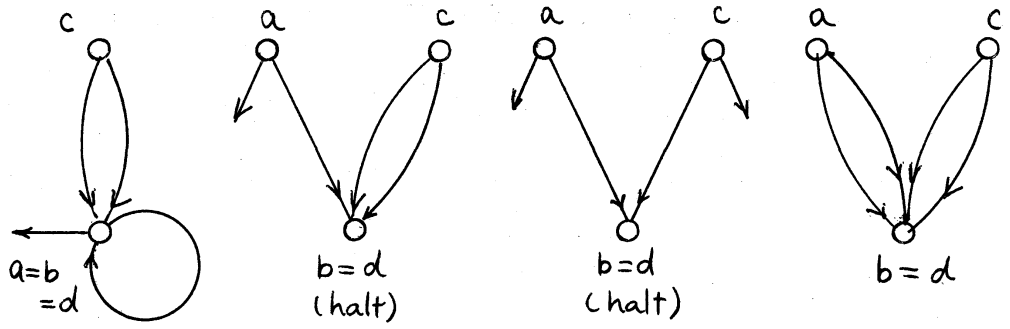



図5　Subcase 3.4

除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる.

Case 4.　$a \neq c$, $b \neq d$ のとき.

Subcase 4.1.　$a=d$, $b=c$ のとき.

a, c が共に function node ならば, $F_1 = F_2$ となる. (図6(A)参照) a が test node で c が function node ならば, $F_1$ に $(c,d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(\not d, \not d)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる. (図6(B)参照)

a が function node で c が test node ならば上と同様にして証明される.

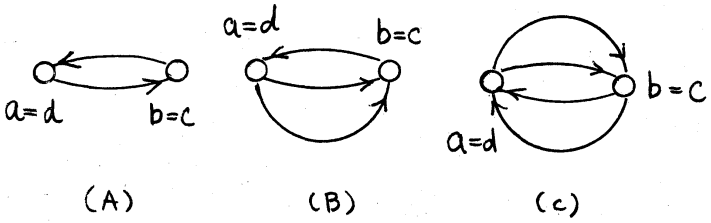



図6　Subcase 4.1.

a, c 共に test node ならば, $F_1$ に $(c,d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a,b)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる. (図6(c)参照)

Subcase 4.2.　$a=d$, $b \neq c$ のとき.

仮定により，$a \neq b$ かつ $c \neq d$ である．a, c 共に function node ならば，$F_1$ に $(c, a/b)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a/d, b)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる．（図7(A)参照） a が test node で c が function node ならば，$F_1$ に $(c, d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a/d, b)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる．（図7(B),(C)参照） a が function node で c が test

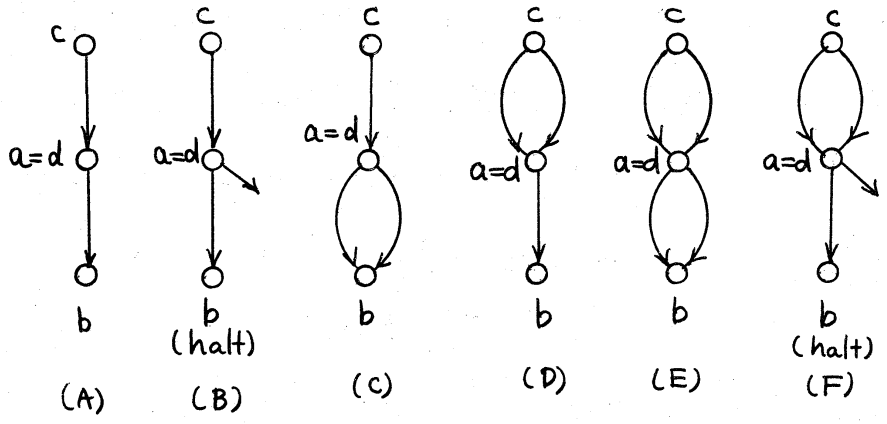



図7 Subcase 4.2.

node ならば，$F_1$ に $(c, a/b)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a, b)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる．（図7(D)参照） a, c 共に test node ならば，$F_1$ に $(c, d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a, b)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる．（図7(E),(F)参照）

Subcase 4.3. $a \neq d$, $b = c$ のとき．

この場合は Subcase 4.2 と同様にして証明される.

Subcase 4.4. $a \neq d$, $b \neq c$ のとき.

$F_1$ に $(c,d)$ をとり除く変換をしたグラフと $F_2$ に $(a,b)$ をとり除く変換をしたグラフは同一のグラフ $F_3$ となる.

以上により, すべての場合をつくしたので, 補助定理1は証明された. (証明終)

$w$ をフローグラフ $F$ の node とし, かつ $F$ の強連結部分グラフ $S$ 上にない, とする. (1) $x$ が $S$ の node で, かつ, (2) $y=w$ かまたは, $S$ を通らないような $y$ から $w$ への path がある, のとき, $S$ は $w$ への出口 $(x,y)$ をもつという.

定義 $S$ をフローグラフ $F$ の極大強連結部分グラフとする. $S$ のすべての cycle $c$ に対し, $u$ が $c$ 上にあるか, または, $c$ が $u$ への出口を1つしかもたないような $S$ の node $u$ が存在するならば, $S$ は semimodular であるといい, $F$ のすべての極大な強連結部分グラフが semimodular ならば, $F$ は semimodular であるという.

補助定理2. $F \Rightarrow F'$ とする. $F$ が semimodular でないならば, $F'$ も semimodular ではない.

(証明) $F \Rightarrow F'$ の変換で edge $e=(x,y)$ が除去された

とする．また，$F$は semimodular ではなく，かつ，$F'$は semimodular であるとする．すなわち，$F$の極大強連結部分グラフ $S$が存在して，(1) $S$は semimodular ではない，(2) $e$は$S$の edge である，かつ，(3) 変換後の$S$を$S'$とすると$S'$は semimodular である．明らかに$S'$は$F'$の極大強連結部分グラフであり，適用された変換は$T_3$ではない．$S'$は semimodular であるから，$S'$の任意の cycle $c'$に対して，$u'$が$c'$上にあるか，または$c'$から$u'$への出口が1つであるような$S'$の node $u'$が存在する．

$u$を$S$の node で，もし$u'$が変換によりまとめられた node なら $u=x$，その他のときは $u=u'$とする．$S$は semimodular でないから$S$のある cycle $c_1$に対して$u$への2つの出口 $e_1=(v_1, w_1)$ と $e_2=(v_2, w_2)$ が存在する．もし，$c_1'$を$c_1$の変換後のグラフとすると$c_1'$は cycle である．なぜかといえば，$v_1$, $v_2$を去る4つの edge ともeではないからである．$S'$において，2つの path：$v_1$から$u'$と，$v_2$から$u'$が存在し，$(v_1, w_1)$と$(v_2, w_2)$は2つの異なった$c_1'$から$u'$への出口である．すなわち$c_1'$は2つの出口を有し，$S'$が semimodular であることと矛盾する．

（証明終）

定理1　もし $F \overset{*}{\Rightarrow} 0$ ならば，F は semimodular である．

（証明）　F を semimodular ではないとする．補助定理2より，0も semimodular ではない．これは矛盾である．

（証明終）

定義[1]　halt node を1つしかもたないフローグラフFにおいて，もしFのすべての強連結部分グラフがその halt node への出口を1つしかもたないならば，F は modular であるという．

定理2[1]　F を halt node が1つしかないフローグラフとし，Fのすべての node は Fの start node から Fの halt node への path 上にあるものとする．F が modular であるための必要十分条件は，F が $T_1$, $T_2$, $T_4$ をくり返し適用することによって0に変換されることである．

定理3　フローグラフFが semimodular ならば，$F \overset{*}{\Rightarrow} 0$．

（証明）　F中の極大強連結部分グラフの数についての帰納法により証明する．もしFに強連結部分グラフがないならば，変換 $T_3$ をくり返すことによりFは0に変換される．Fに極大強連結部分グラフが1つ存在するならば，変換 $T_3$ により，$F \overset{*}{\Rightarrow} F'$ となる．但し，$F'$ は halt node をもたなく，かつ，極大強連結部分グラフを1つもつフローグラフである．

$F'=(N', E', n')$, $(u,v)\in E'$ とする. $F'$ の極大強連結部分グラフの任意の cycle $c$ について, $u$ は $c$ 上にあるか, または, $c$ から $u$ への出口は1つである. いま,

(i) $N''=N'\cup\{w,z\}$,

(ii) $E''=(E'-\{(u,v)\})\cup\{(u,w),(w,v),(w,z)\}$,

(iii) $w, z$ は $N'$ 中の node ではない,

とすると, $F''=(N'', E'', n')$ は halt node が $z$ 1つで, $F''$ のすべての強連結部分グラフは $z$ への出口を1つしかもたない. よって $F''$ は modular であるから定理2より $F''\not\equiv 0$ である. 明らかに $F''\Rightarrow F'$. 補助定理1より $F'\not\equiv 0$. よって $F\not\equiv 0$.

$F$ 中に極大強連結部分グラフの数が $k$ 以下のとき定理はなりたつと仮定する. ($k\geq 2$) 変換 $T_3$ により $F$ は halt node のないフローグラフ $F_1$ に変換される. $F_1$ 中には out-edge のない極大な強連結部分グラフが少なくとも1つは存在するので, $k=1$ のときと同様にして, $F_1$ は $(k-1)$ の極大強連結部分グラフをもつフローグラフ $F_2$ に変換される. 帰納法の仮定により $F_2\not\equiv 0$. ゆえに $F\not\equiv 0$.

(証明終)

定理4. $F$ をフローグラフとする. $F$ が semimodular であるための必要十分条件は $F\not\equiv 0$ である.

（証明）　定理1，3より明らか．　（証明終）

形式的ではないが，フローチャートの計算を表わす箱をnodeにおきかえることによりフローグラフにおきかえられるものと考えられる．アルゴル型言語において，フローグラフの変換$T_1$でedge $(u, v)$が除去されることは，$u, v$が異なる場合についてみると，$u, v$に対応するフローチャート上の計算をsequenceにより，プログラム上にかきあらわすことに対応している．また同様に，$T_2$と$T_3$はif-then-elseにより，$T_4$と2つのnodeが一致する場合の$T_1$はdo-whileにより，それぞれプログラム上にかきあらわすことに対応している．このとき，if-then-else，do-whileの制御構造において，then-clause，else-clause，while-clauseの中にhalt文が入ることに注意する．またフローグラフが0に変換されることは，そのフローグラフが3種の制御構造でかきあらわされることを示し，0に変換されないならば，3種の制御構造ではかきあらわされないこと，すなわちgoto文が必要であることを示している．定理4は，フローグラフFが3種の制御構造でかきあらわされるための必要十分条件は，Fがsemimodularであることを述べている．

文献

[1] T. Kasai, Translatability of flowcharts into while programs, JCSS 9 (1974) pp. 177-195.

[2] M.S. Hecht and J.D. Ullman, Flowgraph reducibility, SIAM J. Computing 1 (1972) pp. 188-202.