数理解析研究所講究録
第296巻 1977年 89-104

ペトリネットのサブクラスのΣスライスによる表現能力比較について

広島大学 工学部 宇都宮 秀孝
菊野 亨

1. まえがき

並行処理プロセスの状態遷移を表現する，いわゆる並列計算のモデルとして，ペトリネット（PN），マークドグラフ（MG）等がよく知られており，最近，PNおよび他の並列計算モデルの能力比較に関する研究がなされてきている[1]~[6]．代表的なものとしてPetersonら[1],[5]らによるものとLiptonら[2]によるものがあるが，この二つには比較の方法に違いがあり，前者が各モデルの“発火系列”の集合によってその能力を評価するのに対し，後者ではモデルの定義する“Σスライス”によって評価している．

本稿では“Σスライス”を用いて，単純ペトリネット，自由選択ペトリネット，状態マシン[3]，およびループ無し単純ペトリネット，$\hat{MG}$[7]等，いずれもPNのサブクラスとして定義されるモデルについて，その表現能力の比較を行なう．

2．諸定義

［定義1］　次のような $\mathcal{N}=\langle P, T, E, M_0\rangle$ をペトリネット（PNと略す）という．（1）$P=\{p_j \mid 1\leq j\leq m\}$：place の有限集合．（2）$T=\{t_i \mid 1\leq i\leq n\}$：transition の有限集合．（3）$E=\{e=[t_i, p_j]$ あるいは $[p_j, t_i]\}$：有向枝の有限集合．$[t_i, p_j]$ は t_i から p_j，$[p_j, t_i]$ は p_j から t_i への有向枝．（4）M_0：初期マーキング．マーキング M（M_0 を含む）は P から非負整数の集合への写像．

本稿においては，各 place $p_j \in P$ と各 transition $t_i \in T$ に対し，p_j（あるいは t_i）から t_i（p_j）への有向枝は高々一本である PN について議論する．

X_i，Z_i をそれぞれ t_i の入力 place，出力 place の集合とし，$Y_i = X_i \cap \bar{Z}_i$† とする．PNとその幾つかのサブクラスである単純ペトリネット（Simple Petri Net－SN），ループ無し単純ペトリネット（Loopless Simple Petri Net－LSN），自由選択ペトリネット（Free Choice Petri Net－FCN），状態マシン（State Machine－SM），拡張マークドグラフ（modified Marked Graph－$\hat{MG}$）における X_i に関する条件を表1に与える．

［注1］　$\hat{MG}$ はマークドグラフにおける p_j の入力 transi-

---

† $\bar{Z}_i$ は補集合（$P-Z_i$）を表わすものとする．

tion に対する条件[3] を"全ての P_j は高々一つの入力 transition をもつ"と拡張して得られるモデルである.

[注2] Z_i に関する条件は, SM において $|Z_i| = 1$ であり, 他のモデルにおいては条件なし.

クラス名	条　　件
PN	条件なし
LPN	$X_i = Y_i$
SN	1. $\|X_i \cap X_j\| \leqq 1$ で 2. $\|X_i \cap X_j\| = 1$ なら $\bar{X}_i \cap X_j \cap X_k = X_i \cap \bar{X}_j \cap X_k = \phi$
LSN	SN の条件かつ LPN の条件
FCN	$X_i \cap X_j \neq \phi$ なら $\|X_i\| = \|X_j\| = 1$
SM	$\|X_i\| = 1$
$\hat{MG}$	$X_i \cap X_j = \phi$

(i, j, k はすべて異なる)

表1

$M(P) \geqq 1$ ($^\forall P \in X_i$) である時, t_i は発火可能であるといい, t_i が発火すると各 $P \in X_i$ から1個のトークンが取去られ, 同時に各 $P \in Z_i$ へ1個のトークンが加えられる. マーキング M から t_i の発火によって得られるマーキングを M' とすると $M \xrightarrow{t_i} M'$ と書く. $\alpha = t_{i_1} \cdot t_{i_2} \cdot \cdots \cdot t_{i_u}$

（$t_{i_\ell} \in T$，$1 \leqq \ell \leqq u$），および初期マーキングM_0に対し，マーキングの列M_0，M_1，…，M_uが存在して$M_0 \xrightarrow{t_{i_1}} M_1$，$M_1 \xrightarrow{t_{i_2}} M_2$，…，$M_{u-1} \xrightarrow{t_{i_u}} M_u$である時，系列$\alpha$を<u>$\mathcal{N}$の発火系列</u>といい，発火系列の集合を$f(\mathcal{N})$と書く．

［定義2］　アルファベットの有限集合$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$に対し，条件（1）$\pi = \{\sigma_{i_1} \cdots\cdots \sigma_{i_m} \mid \sigma_{i_j} \neq \sigma_{i_k} (j \neq k)\}$．（2）$\Sigma \subseteqq \pi$．（3）全ての$v$，$w \in \Sigma^*$に対し，$vw \in \pi$ならば$v \in \pi$．を満たす集合$\pi$を<u>$\Sigma$スライス</u>（$\Sigma$ slice）という．

［定義3］　$\mathcal{N}$とΣスライスπに対し，条件（C1）$d: T \rightarrow \Sigma$は全単射写像．（C2）dを準同型に拡張する時，$d\{\alpha \mid \alpha \in f(\mathcal{N})\} = \pi$．を満たす写像$d$が存在する時，<u>$\mathcal{N}$が$\pi$を定義する</u>という．

クラスCに属するある$\mathcal{N}$がπを定義する時，<u>Cがπを定義する</u>という．Cが定義するΣスライスの集合を<u>$\Pi(C)$</u>と書く．

［注3］　$\mathcal{N}$がπを定義する時，<u>各t_iは丁度一回のみ発火可能</u>．そのためには$M_0(P) \geqq 1$（$P \in X_i$）かつ$M_0(P') = 1$なる$P' \in Y_i$が少なくとも一つ存在することが必要である．したがって必ず$Y_i \neq \phi$でなければならない．

表1に示すクラスを考える限り，「二つのクラスC，C'

に対し，$\pi \in \Pi(C)$ かつ $\pi \notin \Pi(C')$ なら，$\underline{C \rightarrow C'}$ である．（$C \rightarrow C'$ は C' の中のどの $\mathcal{N}'$ も C の中にある $\mathcal{N}$ をシミュレートできないことを意味する．）」は既に示されている（文献［2］系4・1参照）．$\underline{C \Rightarrow C'}$ は $C \rightarrow C'$ かつ $C \not\leftarrow C'$ を，更に，$\underline{C \equiv C'}$ は $C \not\rightleftarrows C'$ を意味する．

［定義4］[2] R を Σ 上の反射律（$\bar{R}$ をその否定）とする時，Σ スライス $\pi = \{ \sigma_{i_1} \cdot \cdots \cdot \sigma_{i_m} \mid$ 各 $\sigma_{i_j} \in \Sigma,\ \sigma_{i_j} \bar{R} \sigma_{i_k}$ $(j \neq k) \}$ を（R に基づく）† <u>Eスライス</u>（*exclusion slice*）という．更に任意の σ_i，$\sigma_j \in \Sigma$ に対し $\sigma_i R \sigma_j$ なら π を<u>自明スライス</u>（*trivial slice*）といい，R が対称的，同値関係であるなら π をそれぞれ，<u>対称スライス</u>（*symmetric slice*），<u>同値スライス</u>（*equivalent slice*）という．

［注4］ R に基づくEスライス π を $\mathcal{N}$ が定義し，$d(t_i) = \sigma_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ である時，（Case 1） $\sigma_i R \sigma_j$ なら定義4より $\sigma_i \sigma_j \notin \pi$ となり，C2より $t_i t_j \notin f(\mathcal{N})$ となる．つまり t_i の発火後，t_j が発火可能でなくなる．それには t_i と t_j が入力 *place* を共有しなければならぬ，即ち $X_i \cap X_j \neq \phi$ が成立．（Case 2） $\sigma_i \bar{R} \sigma_j$ なら $\sigma_i \sigma_j \in \pi$．C2より $t_i t_j \in f(\mathcal{N})$ となる．今 $M_0 \xrightarrow{t_i} M'$ とすると，$M'(p) \geqq 1$ $(p \in X_j)$ となることが必要で，その時，t_i と t_j は

† 文脈より明らかな場合は，R をとくに述べない．

（i）異なる入力 place をもつ，即ち $X_i \cap X_j = \phi$，あるいは（ii）入力 place を共有するが，$M_0(P) = M'(P)$（$P \in X_i \cap X_j$）である，即ち $X_i \cap X_j \subseteqq X_i - Y_i$ が成立．

3. 自明スライス

［補題1］　$\hat{MG}$ が E スライス π を定義するための必要十分条件は π が自明スライスとなることである．

（証明）　<u>必要性</u>：$\hat{MG}\,\mathcal{N}$ が π を定義する時，π が自明スライスでないと仮定すると，$\sigma_i R \sigma_j$ となる σ_i，$\sigma_j \in \Sigma$ が存在する．その時，注4の Case 1 より $X_i \cap X_j \neq \phi$ となり矛盾（表1）．

<u>十分性</u>：自明スライス π に対し，$\hat{MG}\,\mathcal{N} = \langle P, T, E, M_0 \rangle$ を次のように構成する．$P = \{P_1, \cdots, P_n\}$，$T = \{t_1, \cdots, t_n\}$，$E = \{[P_i, t_i]\}$，$M_0(P_i) = 1$（$1 \leqq i \leqq n$）とする．この時，$d(t_i) = \sigma_i$ と決めると C1，C2 が成立する．　□

4. 同値スライス

［補題2］　SMがEスライスπを定義するための必要十分条件はπが同値スライスとなることである．

（証明）　必要性：SMがRに基づくπを定義する時，(a) Rが対称的でないとすると，$\sigma_i R \sigma_j$，$\sigma_j \overline{R} \sigma_i$なる$\sigma_i$，$\sigma_j$が存在し，注4より $X_i \cap X_j \neq \phi$，かつ $X_i \cap X_j \subseteq X_j - Y_j$ が成立する．故に $|X_j - Y_j| \geqq 1$ となり，$Y_j \neq \phi$（注3）だから $|X_j| \geqq 2$ となる．SMの条件 $|X_j| = 1$（表1）に対し矛盾．次に (b) Rが推移的でないとすると，$\sigma_i R \sigma_j$，$\sigma_j R \sigma_k$，$\sigma_i \overline{R} \sigma_k$を満たす$\sigma_i$，$\sigma_j$，$\sigma_k$が存在し，注4より，(i) $X_i \cap X_j \neq \phi$，かつ $X_j \cap X_k \neq \phi$，および (ii) $X_i \cap X_k = \phi$，または $X_i \cap X_k \subseteq X_i - Y_i$ が成立する．表1に示すSMの条件と (i) より $X_i = X_j = X_k$ となり，$|X_i \cap X_k| = 1$ となる．この時，(ii) の前半はあり得ず，後半より $|X_i - Y_i| \geqq 1$ となり，$|X_i| = 1$ なので $Y_i = \phi$ となる．これは注3より矛盾．

十分性：$\Sigma = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$上の同値関係をR，同値類を$e_r$（$1 \leqq r \leqq m$）とする．更にRに基づく$\Sigma$スライスを$\pi = \{\sigma_{i_1} \cdots\cdots \sigma_{i_q} \mid \sigma_{i_j} \in e_u,\ \sigma_{i_k} \in e_v,\ u \neq v\ (j \neq k)\}$とする．これに対し，SM $\mathcal{N} = \langle P, T, E, M_0 \rangle$を次のように構成する．$P = \{P_1, \cdots, P_m\} \cup \{P_0\}$，

$T = \{ t_1, \cdots, t_n \}$, $E = \{ [P_r, t_i] \mid \sigma_i \in e_r \} \cup \{ [t_i, P_0] \}$, $M_0(P) = 1$ $(P \in \mathcal{P})$とする．この時，$f(\mathcal{N}) = \{ t_{i_1} \cdots t_{i_s} \mid t_{i_j} \neq t_{i_k}, X_{i_j} \neq X_{i_k} (j \neq k) \}$となる．従って$d(t_i) = \sigma_i$と決めれば，$j$，$k$ $(j \neq k)$に対し，$\sigma_{i_j} \in e_u$，$\sigma_{i_k} \in e_v$（ただし$u \neq v$）ならば$X_{i_j} \neq X_{i_k}$，その逆も成立し，条件C1，C2は満たされる． □

［補題3］　Π（FCN）とΠ（SM）は等しい

（証明）　（i）Π（SM）⊆Π（FCN）については表1より明らか．（ii）Π（FCN）⊆Π（SM）について．Eスライスπを FCN $\mathcal{N}$が定義すると仮定すると，C1，C2を満たすdが存在する．この時，このdと次のようなSM $\hat{\mathcal{N}}$に対し，$d\{ \beta \mid \beta \in f(\hat{\mathcal{N}}) \} = \pi$となることを示す．$\mathcal{N}$に対し，集合$\mathcal{J} = \{ t_i \mid |X_i| \geq 2, t_i \in T \}$を考える．

(a) $\mathcal{J} = \phi$なら，図1(a)に示す変換を行なえばよい．

(b) $\mathcal{J} \neq \phi$とする．入力 *place* に関しては，任意の$t_i \in \mathcal{J}$に対し，t_iの入力 *place* をただ一つ残して，他のt_iの入力 *place* を除く（図1(b)）．出力 *place* および$t_j \in \bar{\mathcal{J}} \cap \mathcal{P}$に対しては図1(a)と同様の変換を行なう．こうして修正された$\mathcal{N}$を$\hat{\mathcal{N}}$とすると，これはSMと見做すことができる．FCNの定義より，$\mathcal{N}$において$t_i \in \mathcal{J}$はどのt_k $(i \neq k)$

とも入力 *place* を共有しないので，任意の $t_i \in \mathcal{T}$ に対し $|X_i| = 1$ と上記のように修正しても発火系列の集合は変わらない．故に $f(\mathcal{N}) = f(\hat{\mathcal{N}})$ となり，上述の d に対し $d\{\beta \mid \beta \in f(\hat{\mathcal{N}})\} = \pi$ が成立する．

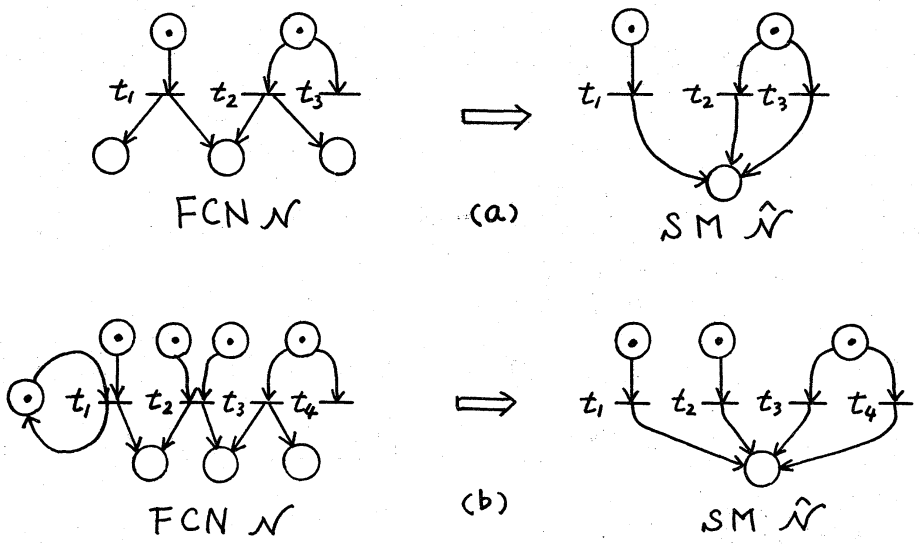

図1　FCN $\mathcal{N}$ から SM $\hat{\mathcal{N}}$ への変換

□

[補題4]　LSNがEスライス π を定義するための必要十分条件は π が同値スライスとなることである．

(証明)　<u>必要性</u>：LSNが π を定義する時，

(a) Rが対称的でないとすると，$\sigma_i R \sigma_j$，$\sigma_j \overline{R} \sigma_i$ なる σ_i，σ_j が存在し，注4より (i) $X_i \cap X_j \neq \phi$，かつ (ii) $X_i \cap X_j \subseteqq X_j - Y_j$ となる．(i)，(ii) より $X_j - Y_j \neq \phi$ となりLSNの条件(表1)に矛盾する．

(b) Rが推移的でないとすると，$\sigma_i R \sigma_j$，$\sigma_j R \sigma_i$，$\sigma_i \overline{R}$

σ_kなるσ_i，σ_j，σ_kが存在し，注4より（i）$X_i \cap X_j \neq \phi$，かつ（ii）$X_j \cap X_k \neq \phi$，かつ（iii）$X_i \cap X_k = \phi$あるいは$X_i \cap X_k \subseteqq X_i - Y_i$が成立する．LSNでは（i）より（iv）$\overline{X_i} \cap X_j \cap X_k = \phi$が成立（表1）．次に（ii）と（iv）より（v）$X_i \cap X_j \cap X_k \neq \phi$　となることを示す．そのため$X_i \cap X_j \cap X_k = \phi$　と仮定して矛盾を導く．（ii）より$a \in X_j \cap X_k$　が存在し，仮定より$a \notin X_i$，すなわち$a \in \overline{X_i}$　が成立．従って$a \in \overline{X_i} \cap X_j \cap X_k$　となり（iv）に矛盾する．

（v）より$X_i \cap X_k \neq \phi$　となり（iii）の前半はあり得ず，後半より$X_i - Y_i \neq \phi$　が成立．これはLSNの条件（表1）に矛盾．

<u>十分性</u>：$\Pi(SM) \subseteqq \Pi(LSN)$　を示せばよい．SMの条件（i）$|X_i| = 1$　が成立している時，LSNの条件（ii）$X_i = Y_i$，（iii）$|X_i \cap X_j| \leqq 1$，（iv）$|X_i \cap X_j| = 1$ なら $\overline{X_i} \cap X_j \cap X_k = X_i \cap \overline{X_j} \cap X_k = \phi$が成立することを示す．

まず，$Y_i \subseteqq X_i$，$Y_i \neq \phi$（注3），かつ（i）より（ii），（iii）が成立することは明らかである．次に（i）より$|X_i \cap X_j| = 1$　なら$X_i = X_j$　となり，（iv）も成立する．　□

5. SNが定義するスライス

［補題5］ $\Pi(SM) \subseteq \Pi(SN)$

（証明） $|X_i| = 1$ が成立している時，SNの条件の1は直ちに成立し，また2の条件も $|X_i \cap X_j| = 1$ なら $X_i = X_j$ となるので成立する． □

［補題6］ $\Pi(SN) \subseteq \Pi(PN)$

（証明） 表1の条件より明らか． □

図2，3に示す関係 R_1，R_2 に基づくEスライス $\pi_1 = \{\Lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_3, \sigma_3\sigma_1\}$， $\pi_2 = \{\Lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3\sigma_1, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\}$ に対し，次の補題7，8が成立する．

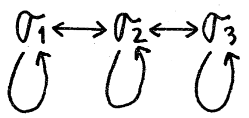

図2　関係R_1

（$\sigma_i \to \sigma_j$ は $\sigma_i R \sigma_j$ を表わす）

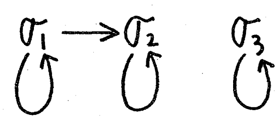

図3　関係R_2

［補題7］ $\pi_1 \notin \Pi(SN)$

（証明） SN $\mathcal{N}$が π_1 を定義すると仮定すると，C1，C2を満たすdが存在する．定義4より (1) $\sigma_1\sigma_2 \notin \pi_1$，

(2) $\sigma_2\sigma_3 \notin \pi_1$，かつ (3) $\sigma_1\sigma_3 \in \pi_1$． これらと注4より，(4) $X_1 \cap X_2 \neq \phi$， (5) $X_2 \cap X_3 \neq \phi$ (6) $X_1 \cap X_3 = \phi$，あるいは $X_1 \cap X_3 \subseteqq X_1 - Y_1$ となる．

SNでは (4) と (5) より (7) $\overline{X_1} \cap X_2 \cap X_3 = \phi$，(8) $X_1 \cap \overline{X_2} \cap X_3 = \phi$，(9) $X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3} = \phi$ が成立する．

次に (4)，(5) と (7) ～ (9) より (10) $X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_3 = X_1 \cap X_3 \neq \phi$ が導かれることを示す．まず $X_1 \cap X_2 \subseteqq X_2 \cap X_3$ を示す．(4) より $a \in X_1 \cap X_2$ が存在し，このaに対し，今 $a \notin X_2 \cap X_3$ と仮定する．この時 (i) $a \notin \overline{X_1 \cap X_2} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$，かつ (ii) $a \in \overline{X_2 \cap X_3} = \overline{X_2} \cup \overline{X_3}$ が成立．(i) より $a \notin \overline{X_2}$ であるから (ii) より $a \in \overline{X_3}$ となる．故に $a \in X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3}$ となり (9) に矛盾．逆に $X_2 \cap X_3 \subseteqq X_1 \cap X_2$ も同様に示され $X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_3$ が成立する．更に $X_2 \cap X_3 = X_1 \cap X_3$ も同じようにして示される．

従って (10) より $X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X_3 \neq \phi$ であるから (6) の前半はあり得ず，後半より $X_1 \cap X_2 \subseteqq X_1 - Y_1$ が成立する．これは t_1 の発火後，t_2 の各入力 *place* の

トークンの個数は，発火前のそれと同じであることを意味する．故に t_1 の発火後，引き続き t_2 は発火可能，すなわち $t_1 t_2 \in f(\mathcal{N})$ となり，$d(t_1 t_2) = \sigma_1 \sigma_2 \in \pi_1$ ．これは（1）に矛盾． □

［補題8］ $\pi_2 \in \Pi(SN)$

（証明） π_2 に対し，$SN\ \mathcal{N} = \langle P, T, E, M_0 \rangle$ を次のように構成する．

$P = \{ P_1, P_2, P_3 \}$, $T = \{ t_1, t_2, t_3 \}$, $E = \{ [P_1, t_1], [P_1, t_2], [P_2, t_2], [P_3, t_3], [t_2, P_1] \}$, $M_0(P) = 1\ (P \in P)$.

以上の構成より $d(t_i) = \sigma_i\ (1 \leqq i \leqq 3)$ と決めると C1，C2 が成立する． □

6．結論

［定理1］ $PN \Rightarrow SN$

（証明） 補題6より $PN \not\leftarrow SN$ ．更に π_1 はEスライスなので $\pi_1 \in \Pi(PN)$[2] かつ補題7より $PN \rightarrow SN$ が成立する． □

［定理2］ $LPN^{\dagger} \rightleftarrows SN$

（証明） π_1 は対称スライスなので $\pi_1 \in \Pi(LPN)$，

---

† LPNは丁度対称スライスを定義するクラスである[2]．

かつ補題7より　$LPN \rightarrow SN$．　π_2は対称スライスでないので　$\pi_2 \notin \Pi(LPN)$，かつ補題8より　$LPN \leftarrow SN$．□

［定理3］　$SN \Rightarrow SM$

（証明）　補題5より $SN \not\leftarrow SM$．　π_2は同値スライスでないので補題2より　$\pi_2 \notin \Pi(SM)$，かつ補題8より，$SN \rightarrow SM$．　□

［定理4］　$SM \equiv FCN \equiv LSN$

（証明）　補題2，3，4より成立．　□

［定理5］　$SM \Rightarrow \hat{MG}$

（証明）　補題1，2より成立．　□

7．むすび

ここでは *Lipton* らの導入した，Σスライスを用いて，PNのサブクラスとして知られている，SN，FCN，SMおよび新らたに定義したLSN，$\hat{MG}$についてその能力比較を行ない，図4に示す結果を得た．一方，*Peterson* [5]，*Hack* [6]らは，発火系列を一つの言語とみなし，ペトリネット言語なるものを導入して，他の言語との比較を行なっている．現在，ペトリネット言語を用いてペトリネットのサブクラスの表現能力の比較について検討中である．

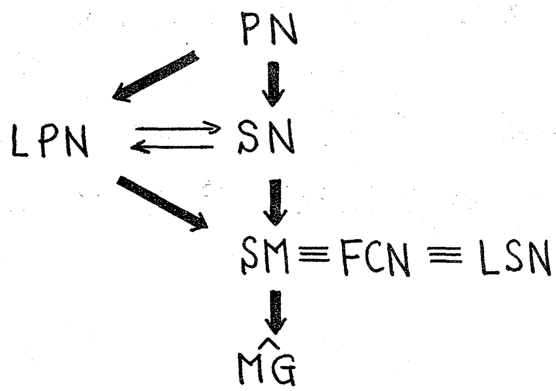

図4　比較結果

文　献

[1] J.L.Peterson and T.H.Bredt : " A comparison of models of parallel computation", Information Processing 74, North Holland Pub. Comp. p.466 (1974).

[2] R.J.Lipton, L.Snyder and Y.Zalcstein : " A comparative study of models of parallel computation", IEEE, 15th Ann. Symp. on SWAT, p.145 (Oct. 1974).

[3] J.B.Dennis : " Computation structures", Dep. Elec. Eng., Massachusetts Institude of Technology, Cambridge, notes for subject 6.232 (1970).

[4] 嵩，伊澤：" 並列プログラムの理論", P.985 昭和50年電気四学会連合大会.

[5] J.L.Peterson : " Computation Sequence Sets ", J.Comput. System Sci. 13, p.1 (1976).

[6] Hack : " Petri Net Languages ", Computation Structures Group

Memo 124, Project MAC, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, June 1975.

[7] 菊野，吉田，宇都宮："ペトリネットのサブクラスの表現能力について"，信学論(D) 技術談話室 掲載予定.