数理解析研究所講究録
第 297 巻 1977 年 1-23

閉曲面の写像類群

神戸大 理　鈴木 晋一

1. 序

有向多様体 X について、$\mathcal{H}(X)$ で方向を保つ同相写像 $\varphi: X \to X$ の全体の作る群を表わす。$\mathcal{D}(X) = \{\varphi \in \mathcal{H}(X) : \varphi \simeq id.\}$ とおくと、$\mathcal{D}(X)$ は $\mathcal{H}(X)$ の正規部分群となることは容易に確められる。そこで商群 $\mathcal{H}(X)/\mathcal{D}(X)$ を $\mathcal{M}(X)$ と書き、X の写像類群 (mapping class group) と言う。(Homeotopy group とか、Isotopy group と呼ぶこともあるが、これらの呼称を使うときは $\mathcal{H}(X)$ に方向を逆転する同相写像も含めることが多いようである。ただし厳密な区別はないようなので、文献を参照されるときには定義を確められたい。)

ここでは、種数 n の 3 次元有向ハンドル体 V_n と、その境界である有向閉曲面 F_n の写像類群 $\mathcal{M}(V_n)$ と $\mathcal{M}(F_n)$ の生成元をいくつかの簡単な同相写像によって与えることを目的とする。ここで用いる同相写像のほとんどは、寺阪教授が当数理解析研究所における 1972 年 2 月の研究集会において与えた

もので，上記の結果はそこで提出された問題２の肯定的解答になっている（[22]参照）．ただし証明の詳細は[21]において近日公表されるので，ここでは出来るだけ簡単に書き，周辺の話題を多く書くことにする．

閉曲面の写像類群 $\mathcal{M}(F_n)$ については，Birman [3],[4] に詳しい解説があり，Magnus et al. [17] にも扱われているので参照されたい．$\mathcal{M}(F_n)$ の生成元は 1938 年に Dehn [8] によって一応決定されたことになっているが，Lickorish [15] による単純化された再証明がある．Birman [4] の証明も本質的に同じ系統のもので，Dehn twists と呼ぶ写像を利用する．これから与える生成元との比較は後に述べよう．定義関係式については，$n=1$ の場合は別として，$n=2$ の場合に Birman-Hilden [6] によってようやく解決したばかりで，$n\geq 3$ の場合は未解決であり，残された大きな問題である．

一方ハンドル体の写像類群 $\mathcal{M}(V_n)$ については，$n=1$ の場合は特別として，$n=2$ の場合に Goeritz [10] により生成元が与えられた．また極く最近 Hilden より受取った preprint によれば，ここでの報告とは別の写像を用いて，すべての n について生成元を決定したが，我々の場合よりもかなり複雑である．これとの関連等については，いずれ詳しく論じてみたい．

対象が二・三次元なので，すべて PL 圏で話を進める．

2. $\mathcal{N}(V_n)$ と $\mathcal{N}(F_n)$ との関係

まず V_n の標準モデルを3次元空間 R^3 に図1のように定める。簡単に説明すると、球体 B^3 を定め、∂B^3 上に互に素

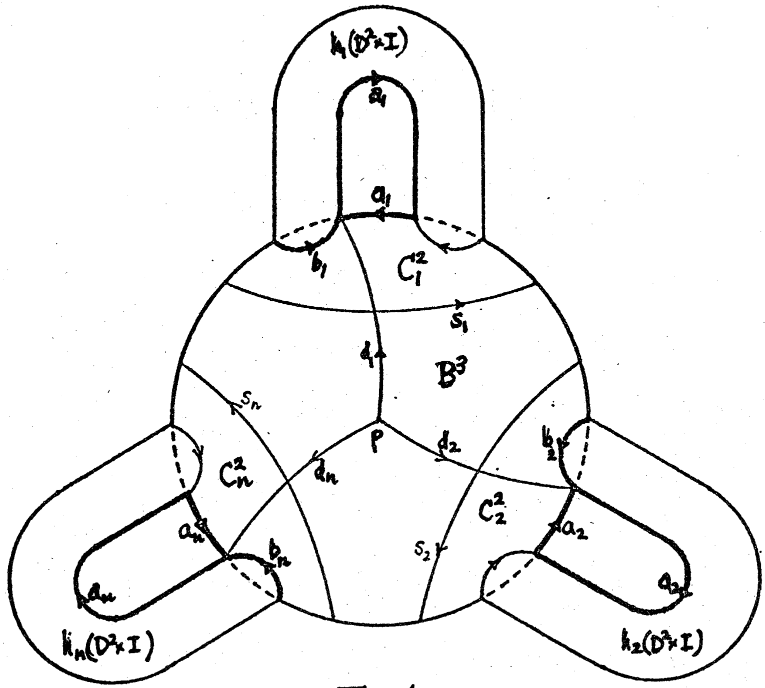

図 1

な円板 $C_1^2,\cdots,C_n^2$ を選ぶ。更に各 C_i^2 の内部に互に素な円板 B_{i0} と B_{i1} を選ぶ。$h_i: D^2\times I\longrightarrow R^3$ を次の条件を満たす埋込みとする（D^2 は単位円板，I は単位閉区間 $[0,1]$）：

$$h_i(D^2\times\{0\}) = B_{i0}, \quad h_i(D^2\times\{1\}) = B_{i1},$$

$$B^3\cap h_i(D^2\times I) = \partial B^3\cap h_i(D^2\times\partial I) = B_{i0}\cup B_{i1},$$

$$h_i(D^2\times I)\cap h_j(D^2\times I) = \phi \quad (i\neq j).$$

$V_n \equiv B^3\cup h_1(D^2\times I)\cup\cdots\cup h_n(D^2\times I)$ を種数 n のハンドル体の標準モデルとし，方向は R^3 から誘導されるものを与える。ま

た B_{i0}, $\partial B_{i0}=b_i$, C_i^2, $\partial C_i^2=s_i$ にも図のように方向を与えておく。$\partial V_n=F_n$ 上に互に素な単純閉曲線 $a_1,\cdots,a_n$ と一点 p を図のように選び、更に点 p と点 $a_i\cap b_i$ を結ぶ単純弧 d_i を図のように選ぶ。

括弧が重複するのを避けるため、閉曲線とそのホモトピー類・ホモロジー類を同じ記号で表わす。すると $\{a_1,\cdots,a_n\}$ および $\{a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\}$ はそれぞれ $H_1(V_n;\mathbb{Z})$, $H_1(F_n;\mathbb{Z})$ の基底(共に自由アーベル群)となる。また a_i, b_i, s_i によって、p を基点とする閉曲線 $d_i a_i d_i^{-1}$, $d_i b_i d_i^{-1}$, $\tilde{d}_i s_i \tilde{d}_i^{-1}$ も表わすことにする(ただし $\tilde{d}_i$ は d_i の適当な部分弧)。すると基本群 $\pi_1(V_n,p)$ は $\{a_1,\cdots,a_n\}$ によって生成される自由群で、基本群 $\pi_1(F_n,p)$ は $\{a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\}$ によって生成され、唯一つの関係式

$$\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1}a_i^{-1}b_i a_i \simeq 1 \quad (\mathrm{rel}\ p\ \mathrm{on}\ F_n)$$

を持つ。$s_i \simeq b_i^{-1}a_i^{-1}b_i a_i$ $(\mathrm{rel}\ p\ \mathrm{on}\ F_n)$ でもある。

$\pi_1(F_n,p)$ の表示を定めると、$\mathcal{M}(F_n)$ を純代数的に特徴付けることが可能で、証明は Nielsen [20] に、単純な証明は Mangler [19] にある。Birman [3, §1], Birman-Hilden [6, §1], Magnus et al. [17, pp. 172～176] 等を参照されたい。

さて $\{x_1,\cdots,x_m\}\subset\pi_1(F_n,p)$ に対し、$\{x_1,\cdots,x_m\}^{\nu}$ で $\{x_1,\cdots,x_n\}$ を含む $\pi_1(F_n,p)$ の最小の正規部分群を表わすことにする。

2.1 <u>命題</u> (Griffiths [12, Th.7.2]) $\iota : F_n \to V_n$ を自然な包含写像とし，$K = \ker(\iota_\# : \pi_1(F_n, p) \to \pi_1(V_n, p))$ とすれば，

$$K = \{b_1, \cdots, b_n\}^\nu. \blacktriangleleft$$

2.2 <u>命題</u> (Griffiths [11, Th. 10.1], McMillan [18], Zieschang [23]) $\psi : (F_n, p) \to (F_n, p)$ を方向を保つ同相写像とするとき，ψ が V_n の同相写像に拡張できる為の必要十分条件は $\psi_\#(K) \subset K$。◀

ここで、任意の $\psi \in \mathcal{N}(F_n)$ に対し，$\eta \in \mathcal{D}(F_n)$ が存在して $\eta\psi(p) = p$ となることに注意。また任意の $\eta \in \mathcal{D}(F_n)$ は V_n の同相写像に拡張できて、$\mathcal{D}(V_n)$ に属することにも注意. [5] において Birman は $\mathcal{M}(F_n)$ の2つの部分群

$$\mathcal{A} = \{[\psi] \in \mathcal{M}(F_n) : \psi_\#(\{a_1, \cdots, a_n\}^\nu) \subset \{a_1, \cdots, a_n\}^\nu\},$$

$$\mathcal{B} = \{[\psi] \in \mathcal{M}(F_n) : \psi_\#(\{b_1, \cdots, b_n\}^\nu) \subset \{b_1, \cdots, b_n\}^\nu\}$$

を定義した。命題2.1と2.2および上の注意から $\mathcal{B}$ は $\mathcal{M}(V_n)$ と同型であることが分る。$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は互に共役であることは明らか。$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ については §6 で扱う。

3. V_n, F_n の基本的な同相写像

この節で $\mathcal{M}(V_n)$ および $\mathcal{M}(F_n)$ の生成元となる同相写像の定義を与える。Baer [1] および Epstein [9] によって与えられた曲面上の閉曲線と isotopy に関する基本的な結果は、特にことわり無しに使用する。同相写像 $\psi \in \mathcal{N}(V_n)$ に対し、制限写像 $\psi|F_n$

を $\dot{\psi} \in \mathcal{N}(F_n)$ で示す。

3.1 ハンドルの巡回的置換： V_n の定義で，$h_i(D^2\times I)$ を V_n の i 番目のハンドルと呼ぼう。点 p と，球体 B^3 の中心点を結ぶ直線を軸として，V_n を時計の針の回転と同じ向きに $2\pi/n$ ラジアンだけ回転する写像を $\rho \in \mathcal{N}(V_n)$ とする。

$$\dot{\rho}_{\#} : \pi_1(F_n, p) \longrightarrow \pi_1(F_n, p) : \begin{cases} a_i \longrightarrow a_{i+1} & (1 \leq i \leq n) \\ b_i \longrightarrow b_{i+1} & (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

である。ただし添数は modulo n で考える。即ち $n+1=1$ であり，このルールは本稿を通じて以後ことわり無く使用する。

3.2 knob の twisting： 単純閉曲線 $s_1, \cdots, s_n$ は B^3 で可縮だから，互に素な円板 $C'_1, \cdots, C'_n$ が B^3 に存在し，$C'_i \cap \partial B^3 = \partial C'_i$，$\partial C'_i = s_i$ となる。C'_i は V_n から種数 1 のハンドル体 K_i を切り取る。K_i は i 番目のハンドル $h_i(D^2\times I)$ を含む；K_i を i 番目の knob と呼ぼう。knob K_1 を C'_1 を固定して図 2 のように π だけひねる写像を $\omega_1 \in \mathcal{N}(V_n)$ とする。

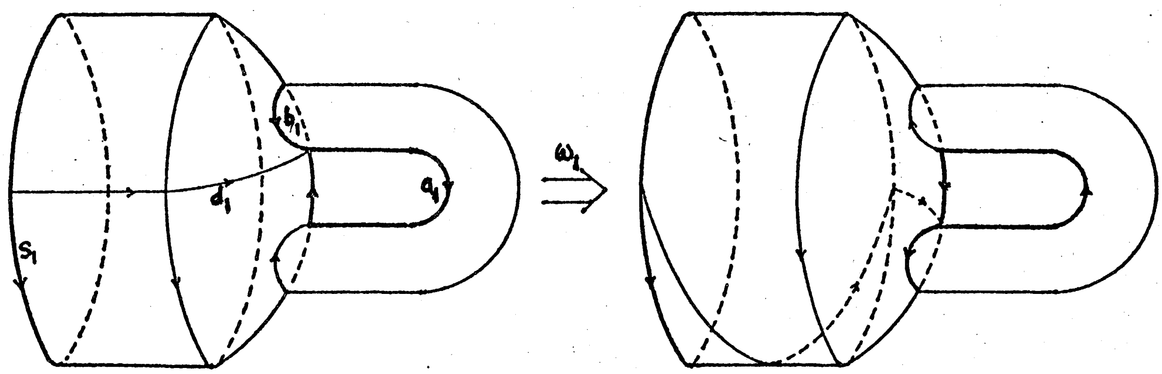

図 2

$$\dot{\omega}_{1\#} : \pi_1(F_n, p) \to \pi_1(F_n, p) : \begin{cases} a_1 \to a_1^{-1} s_1^{-1}, & a_j \to a_j \ (2 \le j \le n), \\ b_1 \to a_1^{-1} b_1^{-1} a_1, & b_j \to b_j \ (2 \le j \le n). \end{cases}$$

となることは図から確められる。各 i, $1 \le i \le n$ に対し.

$$\omega_i = \rho^{i-1} \omega_1 \rho^{-(i-1)}$$

と定めると, $\omega_i \in \mathcal{N}(V_n)$ で、 K_i の twisting になっている。

3.3 ハンドルの twisting : ここで定義する写像 τ_i が、序でふれた "Dehn twists" の特別の場合で、Lickorish [15] の表現では "C-homeomorphism using b_i" であり, Birman [3, 4] の表現では "Dehn twist about b_i" である。実際 $\tau_1 \in \mathcal{N}(V_n)$ を次のように定義する: V_n を B_{i0} に沿って切り開き、ハンドル $h_1(D^2 \times I)$ の端 $h_1(D^2 \times \{0\})$ を 2π だけ回転して再び貼り合せる。

$$\dot{\tau}_{1\#} : \pi_1(F_n, p) \to \pi_1(F_n, p) : \begin{cases} a_1 \to a_1 b_1^{-1}, & a_j \to a_j \ (2 \le j \le n), \\ b_i \to b_i \ (1 \le i \le n). \end{cases}$$

$$\tau_i = \rho^{i-1} \tau_1 \rho^{-(i-1)} \quad (1 \le i \le n).$$

一般に c を F_n 上の単純閉曲線とするとき, c で F_n を切り開き、free ends の一方を 2π 回転して再び貼り合せることにより、"Dehn twist about c" が定義される。この写像は $F_n \to F_n$ で, c が V_n で可縮のとき $V_n \to V_n$ に拡張される。

3.4 二つの knobs の交換: ∂B^3 上で s_1 と s_2 を結ぶ単純弧 e を、$e \cap (s_1 \cup \cdots s_n \cup d_1 \cup \cdots \cup d_n) = e \cap (s_1 \cup s_2) = \partial e$ となるように選び、 C を $C_1^2 \cup e \cup C_2^2$ の ∂B^3 上での正則近傍とする。

円板 C の内部を π だけ時計の針の回転方向に回転することにより、同相写像 $\rho'_{12}: F_n \to F_n$ で、$\rho'_{12}(C_1^2) = C_2^2$, $\rho'_{12}(C_2^2) = C_1^2$ なるものを得る。$\partial C \simeq 1$ in V_n だから、ρ'_{12} は V_n の同相写像に拡張され、$\rho'_{12}(K_1) = K_2$, $\rho'_{12}(K_2) = K_1$ である。そこで写

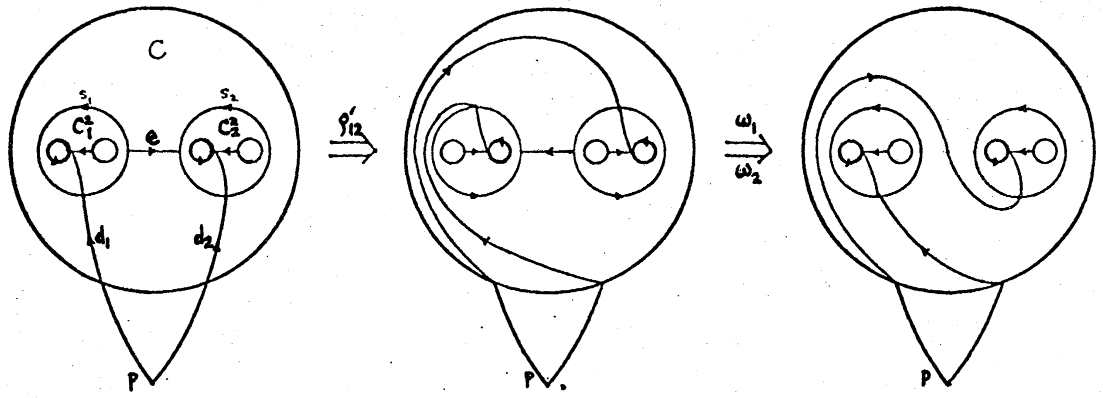

図 3

像 ω_1 と ω_2 とを合成して，写像 $\rho_{12} \in \mathcal{N}(V_n)$ を得る：

$$\rho_{12} = \omega_2 \omega_1 \rho'_{12} .$$

$$\dot{\rho}_{12\#}: \pi_1(F_n, p) \to \pi_1(F_n, p) : \begin{cases} a_1 \to s_1^{-1} a_2 s_1, \quad a_2 \to a_1, \\ a_j \to a_j \quad (3 \le j \le n), \\ b_1 \to s_1^{-1} b_2 s_1, \quad b_2 \to b_1, \\ b_j \to b_j \quad (3 \le j \le n). \end{cases}$$

更に ρ_{12} を利用して、一般に $\rho_{ij} \in \mathcal{N}(V_n)$ を定義する：

$$\rho_{i,i+1} = \rho^{i-1} \rho_{12} \rho^{-(i-1)} \qquad (1 \le i \le n),$$

$$\rho_{i,i+r} = (\rho_{i,i+1}^{-1} \cdots \rho_{i+r-2,i+r-1}^{-1}) \rho_{i+r-1,i+r} (\rho_{i+r-2,i+r-1} \cdots \rho_{i,i+1}).$$

$$(1 \le i \le n, \quad 1 \le r \le n-1).$$

少々複雑な定義になったが、幾何学的には s_i と s_{i+r} を結ぶ単純弧 e を、$e\cap(s_1\cup\cdots\cup s_n\cup d_1\cup\cdots\cup d_n)=e\cap(s_i\cup s_{i+r})=\partial e$ となるように選び、これから後は ρ_{12} と同じ手順で定義される写像と同じである。

3.5 <u>Spin と Sliding</u>：寺阪[22] の“くぐる”と“わたる”変換を，Birman [4, pp. 166~7] の spin との関係で改めて定義する。$V_n^i=V_n-h_i(D^2\times I)$ とする。∂V_n^i 上の二つの円板 B_{i0} と B_{i1} の中心点を z_{i0}, z_{i1} とする。∂V_n^i 上の有向単純閉曲線 c で、$z_{i0}\notin c$, $z_{i1}\in c$ なるものに対し、c の ∂V_n^i 上の閉近傍 N を (y,θ), $-1\leq y\leq 1$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, で助変数表示する。もちろん $y=0$ で c を，$z_{i1}=(0,0)$ である。このとき，c <u>に関する z_{i1} の spin</u> と呼ばれる方向を保つ同相写像 $\sigma_{cz_{i1}}:\partial V_n^i\longrightarrow\partial V_n^i$ を，次のように定義する（Birman [4] の定義をすこし変えてある）：

$$\sigma_{cz_{i1}}(y,\theta)=(y,\ \theta+2\pi(2y-1))\qquad \text{if}\quad \tfrac{1}{2}\leq y\leq 1,$$
$$\sigma_{cz_{i1}}(y,\theta)=(y,\ \theta-2\pi(2y+1))\qquad \text{if}\quad -1\leq y\leq -\tfrac{1}{2},$$
$$\sigma_{cz_{i1}}(y,\theta)=(y,\ \theta)\qquad \text{if}\quad -\tfrac{1}{2}\leq y\leq \tfrac{1}{2}.$$

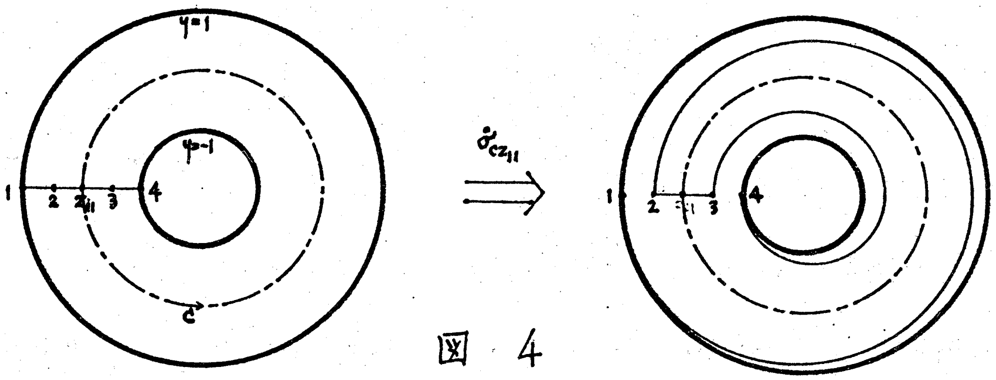

図 4

もちろん N の外部では恒等写像とする（図4参照）。$\sigma_{cz_{i1}}$ は同相写像 $\sigma_{cz_{i1}}: V_n^i \to V_n^i$ に拡張されるが、この写像を c に関する z_{i1} の spin と呼ぼう。さて $B_{i1} \subset N$ で $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ の範囲にあり，$B_{i0} \cap N = \phi$ と仮定してよい。そこで $\sigma_{cz_{i1}}$ を同相写像 $\sigma_{cB_{i1}}: V_n \to V_n$ に，$\sigma_{cB_{i1}}|h_i(D^2 \times I) = id.$ として拡張する；これを c に関する B_{i1} の sliding と呼ぼう。有向単純閉曲線 c を $z_{i0} \in c$, $z_{i1} \notin c$ になるように選べば，c に関する B_{i0} の sliding $\sigma_{cB_{i0}}$ も全く同様に定義される。

∂V_n^i 上の有向単純閉曲線 c で、$z_{i0} \in c$, $z_{i1} \notin c$（または $z_{i0} \notin c$, $z_{i1} \in c$）なるものを多用するので，便宜上このようなものを z_{i0}-ループ（または z_{i1}-ループ）と呼ぶ。次の二つの補題は定義からすぐに得られ、以後基本的役割を果す。

3.6 補題：(1) c を z_{i1}-ループで、$\partial V_n^i - z_{i0}$ で $c \simeq 1$ (rel z_{i1}) とする。$C^2 \subset \partial V_n^i$ を c が bound する円板とし，∂V_n^i から誘導される方向を持つとする。このとき，$\sigma_{cB_{i1}}$ は、c の方向が ∂C^2 の方向と一致するか否かによって、τ_i^{-1} または τ_i とイソトープである。

(2) c_1 と c_2 を共に z_{i1}-ループとし，$c_1 \simeq c_2$ (rel z_{i1}) とすると、$\sigma_{c_1B_{i1}}$ と $\sigma_{c_2B_{i1}}$ は (modulo τ_i) イソトープである。◀

3.7 補題：$c_0, c_1, \cdots, c_m$ を z_{i1}-ループとし，$\partial V_n^i - z_{i0}$ で $c_0 \simeq c_1 \cdots c_m$ (rel z_{i1}) とすれば、$\sigma_{c_0B_{i1}}$ は $\sigma_{c_mB_{i1}} \cdots \sigma_{c_1B_{i1}}$ と

(modulo τ_i) イソトープである。◀

さて ∂V_n^i 上に２種類の z_{i1}-ループを選んで、特種な slidings を選び出そう。

3.8. <u>Sliding</u> Θ： α を z_{11}-ループで次の条件を満たすものとする： $\alpha \cap (a_2 \cup b_2 \cup \cdots \cup a_n \cup b_n \cup d_1 \cup \cdots \cup d_n) = \alpha \cap b_2$ でこれは唯一の交叉点から成り，$\partial V_n^1 - z_{10}$ で $\alpha \simeq a_2$ 。そこで，

$$\Theta_{12} = \sigma_{\alpha B_{11}} \cdot \tau_1^{-1} .$$

$$\dot{\Theta}_{12*} : \pi_1(F_n, p) \to \pi_1(F_n, p) : \begin{cases} a_1 \to a_1(b_2^{-1} a_2^{-1} b_2), \\ a_j \to a_j \ (j \neq 1), \\ b_2 \to a_2 b_2 (a_1^{-1} b_1 a_1)(b_2^{-1} a_2^{-1} b_2), \\ b_j \to b_j \ (j \neq 2). \end{cases}$$

Θ_{12} を使えば，一般に $\Theta_{ij} \in \mathcal{N}(V_n)$ が次式で定義される：

$$\Theta_{1,1+r} = \rho_{2,1+r}\, \Theta_{12}\, \rho_{2,1+r}^{-1} , \qquad \Theta_{i,1+r} = \rho^{i-1}\, \Theta_{1,1+r}\, \rho^{-(i-1)}$$

ただし $1 \leq r \leq n-1$, $2 \leq i \leq n$.

また $\sigma_{\alpha B_{10}}$ の方は ω_1 を用いて $\sigma_{\alpha B_{11}}$ で表わされるので，

$$\Theta_{12}^* = \omega_1^{-1} \Theta_{12}\, \omega_1 , \quad \Theta_{1,1+r}^* = \rho_{2,1+r}\, \Theta_{12}^*\, \rho_{2,1+r}^{-1} , \quad \Theta_{i,i+r}^* = \rho^{i-1}\, \Theta_{1,1+r}^*\, \rho^{-(i-1)} .$$

Θ_{ij} 等を写像の合成で定義したので，幾何学的意味が不明になったが，実は上記 α の代りに次のような z_{i1}-ループ α に関する $\sigma_{\alpha B_{i1}}$ と τ_i^{-1} の合成である： $\alpha \cap (a_1 \cup b_1 \cup \cdots \cup \check{a}_i \cup \check{b}_i \cup \cdots \cup a_n \cup b_n \cup d_1 \cup \cdots \cup d_n) = \alpha \cap b_j$ は唯一つの交叉点から成り，$\partial V_n^i - z_{i1}$ で $\alpha \simeq a_j$ である。 Θ_{ij}^* も同様である．

3.9 <u>Sliding</u> ξ： 次に z_{11}-ループ β を次のように選ぶ：
$\beta \cap (a_2 \cup b_2 \cup \cdots \cup a_n \cup b_n \cup d_1 \cup \cdots \cup d_n) = \beta \cap a_2$ は唯一つの交叉点から成り．$\partial V_n^1 - z_{10}$ で $\beta \simeq b_2$．そこで

$$\xi_{12} = \sigma_{\beta B_{11}} \cdot \tau_1^{-1}.$$

$$\xi_{12\#} : \pi_1(F_n, p) \to \pi_1(F_n, p) : \begin{cases} a_1 \longrightarrow b_1 a_1 b_2^{-1} s_2 (a_1^{-1} b_1^{-1} a_1), \\ a_2 \longrightarrow a_2 b_2 (a_1^{-1} b_1^{-1} a_1) b_2^{-1}, \\ a_j \longrightarrow a_j \quad (j \neq 1, 2), \\ b_j \longrightarrow b_j \quad (1 \leq j \leq n). \end{cases}$$

θ の場合と全く同様にして，ξ_{ij}，$\xi^*_{ij} \in \mathcal{N}(V_n)$ を定義する：

$$\xi_{1,1+r} = \rho_{2,1+r}\, \xi_{12}\, \rho_{2,1+r}^{-1}, \quad \xi_{i,i+r} = \rho^{i-1}\, \xi_{1,1+r}\, \rho^{-(i-1)},$$

$$\xi^*_{12} = \omega_1^{-1}\, \xi_{12}\, \omega_1, \quad \xi^*_{1,1+r} = \rho_{2,1+r}\, \xi^*_{12}\, \rho_{2,1+r}^{-1}, \quad \xi^*_{i,i+r} = \rho^{i-1}\, \xi^*_{1,1+r}\, \rho^{-(i-1)},$$

$$(1 \leq r \leq n-1, \quad 2 \leq i \leq n).$$

ξ_{ij} の幾何学的意味は，次に挙げる条件を満たす z_{i1}-ループ β に関する $\sigma_{\beta B_{i1}}$ と τ_i^{-1} の合成写像である：$\beta \cap (a_1 \cup b_1 \cup \cdots \cup \check{a}_i \cup \check{b}_i \cup \cdots \cup a_n \cup b_n \cup d_1 \cup \cdots \cup d_n) = \beta \cap a_j$ は唯一つの交叉点から成り．$\partial V_n^i - z_{i0}$ で $\beta \simeq b_j$．

3.10 <u>**補題**</u>：c を任意の z_{i1}-ループとすれば，$\sigma_{cB_{i1}}$ は $\theta_{ij}^{\pm 1}$ と $\xi_{ij}^{\pm 1}$ と $\tau_i^{\pm 1}$ の積とイソトープである $(j \neq i,\ 1 \leq j \leq n)$．

<u>証明</u>：写像の定義から $i=1$ の場合に証明すれば十分である．∂V_n^1 上に z_{11}-ループ $\alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_2, \cdots, \beta_n$ を次の条件を満たすように選ぶ：$\alpha_j \cap \alpha_k = z_{11}\ (j \neq k)$，$\beta_j \cap \beta_k = z_{11}\ (j \neq k)$，$\alpha_j \cap \beta_k = z_{11}$

$(1 \leq j, k \leq n)$, かつ α_i, β_j は 3.8 および 3.9 の α と β の条件を満たす。すると $\{\alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n\}$ は階数 $2n-2$ の自由群 $\pi_1(\partial V_n^1 - z_{10}, z_{11})$ の自由基底となる。従って c は $\partial V_n^1 - z_{10}$ 上で $\alpha_2^{\pm1}, \cdots, \alpha_n^{\pm1}, \beta_1^{\pm1}, \cdots, \beta_n^{\pm1}$ の積とホモトープである。従って補題 3.6 と 3.7 よりこの補題が結論される。◀

3.11 <u>系</u>: $\sigma_{cB_{i0}}$, $\sigma_{cB_{i1}}$ はいずれも、$\rho^{\pm1}$, $\rho_{12}^{\pm1}$, $\omega_1^{\pm1}$, $\tau_1^{\pm1}$, $\theta_{12}^{\pm1}$, $\xi_{12}^{\pm1}$ の積とイソトープになる。◀

3.12 <u>写像</u> μ_i : 最後に同相写像 $\mu_i \in \mathcal{N}(F_n)$ で、$\mu_i \notin \mathcal{N}(V_n)$ なるものを一種導入しておく。K_1 を 3.2 で導入した knob とするとき、$U_1 = \partial K_1 \cap \partial V_n$ とおく。U_1 は連結で種数 1 の有向曲面で、$\partial U_1 = s_1$ である。U_1 を単純閉曲線 a_1 と b_1 で切り開いて円管 U_1' を得る。U_1' の一方の境界 s_1 を固定し、新しい境界を $\pi/2$ だけひねることにより、同相写像 $\mu_1 \in \mathcal{N}(F_n)$ を得る。$\mu_1(a_1) = b_1$, $\mu_1(b_1) = -a_1$ で $\mu_1 | F_n - U_1 = id.$ である。

$$\mu_{1\#} : \pi_1(F_n, p) \to \pi_1(F_n, p) : \begin{cases} a_1 \to a_1^{-1} b_1 a_1, & a_j \to a_j \ (j \neq 1), \\ b_1 \to a_1^{-1}, & b_j \to b_j \ (j \neq 1). \end{cases}$$

$$\mu_i = \rho^{i-1} \mu_1 \rho^{-(i-1)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

4. $\mathcal{M}(V_n)$, $\mathcal{M}(F_n)$ の生成元

前節で導入した写像によって、$\mathcal{M}(V_n)$, $\mathcal{M}(F_n)$ が生成されることを示そう。定理の形にまとめると次のようになる。

4.1 定理：(1) $\mathcal{M}(V_n)$ は、$[\rho]$, $[\rho_{12}]$, $[\omega_1]$, $[\tau_1]$, $[\theta_{12}]$, $[\xi_{12}]$ によって生成される。特に $\mathcal{M}(V_0)\cong 0$ で、$\mathcal{M}(V_1)$ は $[\omega_1]$, $[\tau_1]$ によって生成され、$\mathcal{M}(V_2)$ は $[\rho]$, $[\omega_1]$, $[\tau_1]$, $[\theta_{12}]$, $[\xi_{12}]$ によって生成される。

(2) $\mathcal{M}(F_n)$ は $[\dot\rho]$, $[\dot\tau_1]$, $[\dot\theta_{12}]$, $[\mu_1]$ によって生成される。特に $\mathcal{M}(F_0)\cong 0$ で、$\mathcal{M}(F_1)$ は $[\dot\tau_1]$, $[\mu_1]$ によって生成される。◀

4.2 $n=0$ と $n=1$ の場合：F_0 は球面、V_0 は球体であることを思い出してもらえば、$\mathcal{M}(V_0)\cong\mathcal{M}(F_0)\cong 0$ はおなじみのことである。$n=1$ の場合は、$\pi_1(F_1)\cong H_1(F_1)$ で階数2の自由アーベル群であり、昔しから多くのことが知られている。ここでは証明を割愛するが、一般の場合を参考にして確められたい。

4.3 定理4.1(1)の証明：今後 $n\geq 2$ と仮定する。証明は種数 n に関する帰納法でなされ、系3.11 と Birman[4] の結果を本質的に利用する。便宜上2段階に分けて書こう：

（第1段）$G=\{\rho^{\pm1}, \rho_{12}^{\pm1}, \omega_1^{\pm1}, \tau_1^{\pm1}, \theta_{12}^{\pm1}, \xi_{12}^{\pm1}\}$ とおき、$\mathcal{S}(n)$ で $\mathcal{N}(V_n)$ の部分群で、すべての slidings によって生成されるものを表わす。補題3.10により、$\mathcal{S}(n)$ は θ_{ij}, θ_{ij}^*, ξ_{ij}, ξ_{ij}^* および τ_i によって生成される部分群である。系3.11により、ρ, ρ_{ij}, ω_i, および $\mathcal{S}(n)$ の元のイソトピー類によって $\mathcal{M}(V_n)$ が生成されることを証明すれば十分である。

$\psi\in\mathcal{N}(V_n)$ を任意の元とすると、まず次が成立する：

<u>4.4 補題</u>： Gの元と $\mathcal{D}(V_n)$ の元の積で書ける元 $\psi_0 \in \mathcal{H}(V_n)$ が存在して，$\psi_0\psi\,|\,B_{n0} = id.$ となる．

<u>証明</u>： $\nabla = B_{10}\cup B_{11}\cup\cdots\cup B_{n0}\cup B_{n1}$ とおく．V_n は既約だから，$\eta_1\in\mathcal{D}(V_n)$が存在して，$\eta_1\psi(B_{n0})\cap\nabla$ は有限個の単純孤のみから成るとしてよい；$\eta_1\psi$ を ψ_1 と書く．$\psi_1(B_{n0})\cap\nabla$ から $\psi_1(B_{n0})$ 上で最小の単純孤 l を選び，l が $\psi_1(B_{n0})$ から切り取る円板を Δ とする： $\mathrm{int}\,\Delta\cap\nabla=\phi$。 $l\subset\psi_1(B_{n0})\cap B_{k0}$ と仮定し，$m=\partial\Delta - l$ とおく。

今 $m\subset h_k(\partial D^2\times I)$ ならば，$\eta_0\in\mathcal{D}(V_n)$が存在して，$\eta_0\psi_1(B_{n0})\cap\nabla \subset \psi_1(B_{n0})\cap\nabla - l$ とできるから，$m\cap h_k(\partial D^2\times I)=\phi$ とする。単純閉曲線 $l\cup m$ は ∂B^3 を二つの円板 Σ_1 と Σ_2 に分割する。今 $\Sigma_2\supset B_{k1}$ と仮定してよい。もし $B_{i0}\subset\Sigma_1$ $(i\neq k)$ ならば，図5のように z_{i0}-ループ c を選んで $\sigma_{cB_{i0}}$ を施す。$\eta_2\in\mathcal{D}(V_n)$が存在して，$\eta_2\sigma_{cB_{i0}}(\Sigma_1)\subset\Sigma_1$，$\eta_2\sigma_{cB_{i0}}(\Sigma_1)\cap B_{i0}=\phi$ となる。簡単の

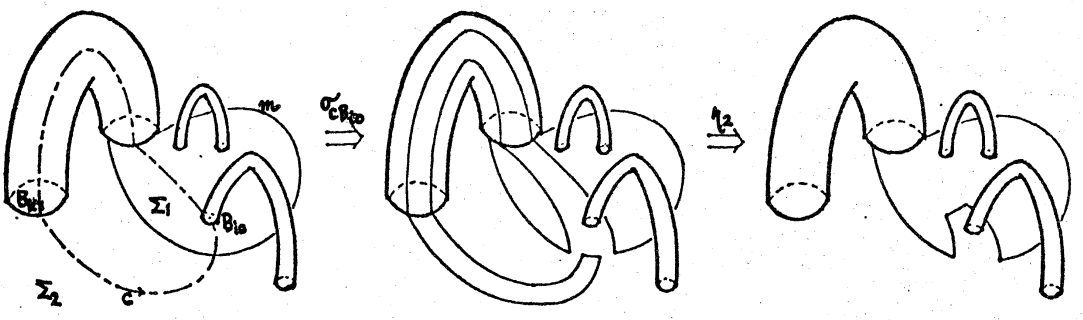

図 5

ために $\eta_2\sigma_{cB_{i0}}\psi_1$ を ψ_2 と書く．$B_{i1}\subset\Sigma_1$ $(k\neq i)$ についても事情は全く同じである。この操作を反復することによって，最後

に $l \cup m$ は ∂B^3 上で円板 Σ_1 と Σ_2 を bound し、Σ_1 は他のハンドルを含まないようになる。こうなれば、$\eta_3 \in \mathcal{D}(V_n)$ を用いて $\eta_3\psi_2(B_{n0}) \cap \nabla \subset \psi_1(B_{n0}) \cap \nabla - l$ とすることは容易である。結局この手順を反復して次が得られる：$\eta \in \mathcal{D}(V)$ と $\sigma \in \mathcal{S}(n)$ が存在して、$\eta\sigma\psi(B_{n0}) \cap \nabla = \phi$; $\eta\sigma\psi \equiv \psi_3$ とする。

ここで次の二つの場合が考えられる：

<u>Case 1</u>：ハンドル $h_k(D^2 \times I)$ が存在して，$\psi_3(B_{n0}) \subset h_k(D^2 \times I)$ となるとき；$\partial B_{n0} = b_n \not\simeq 1$ だったから、$\eta_4 \in \mathcal{D}(V_n)$ が存在して、$\eta_4\psi_3(B_{n0}) = B_{k0}$ とできる。$\rho^{n-k}\eta_4\psi_3(B_{n0}) = B_{n0}$ である；$\rho^{n-k}\eta_4\psi_3 \equiv \psi_4$ とおく。$\psi_4(B_{n0})$ と B_{n0} の方向が一致するときは，B_{n0} は円板だから、$\psi_4|B_{n0} = id.$ とできる。方向が逆転しているときは $\omega_n\psi_4$ に適当な $\eta_5 \in \mathcal{D}(V_n)$ を選べば、$\eta_5\omega_n\psi_4|B_{n0} = id.$ とできるから、補題 4.4 の証明は完了する。

<u>Case 2</u>：$\psi_3(B_{n0}) \subset B^3$：単純閉曲線 $\psi_3(\partial B_{n0}) = \psi_3(b_n)$ が ∂B^3 を二つの円板 Σ_1' と Σ_2' に分割する。$b_n \not\sim 0$ (on F_n) だから、$B_{k0} \subset \Sigma_1'$ かつ $B_{k1} \subset \Sigma_2'$ (または $B_{k0} \subset \Sigma_2'$, $B_{k1} \subset \Sigma_1'$) なる V_n のハンドル $h_k(D^2 \times I)$ が存在する。このハンドルを利用して他のハンドルを図5と同じ方法で除去することによって、$\Sigma_1' \cap \nabla = B_{k0}$ (または $\Sigma_1' \cap \nabla = B_{k1}$) とできる。従って $\eta_6 \in \mathcal{D}(V_n)$ により $\eta_6\psi_3(B_{n0}) = B_{k0}$ (または $\eta_6\psi_3(B_{n0}) = B_{k1}$) とできるから、Case 1 の同じ議論で補題4.4 が結論される。

（第2段）才1段により、定理4.1(1)の証明には、$\psi|B_{n0}=id.$ と仮定してよい。ハンドルの定義から、さらに $\psi|h_n(D^2\times I)=id.$ とも仮定してよい。さて $\psi'\equiv\psi|_{V_n^n}:V_n^n\to V_n^n$ とおくと，$\psi'|B_{n0}\cup B_{n1}=id.$ で，V_n^n を V_{n-1} とみなすことができる。ここで $\psi\approx id.\iff\psi'\approx id.$ であることに注意（$\approx$ は isotopic to の意）。

さて帰納法を用いる準備が完了した。$\mathcal{M}(V_1)$ は G の元のイソトピー類で生成される。今 $\mathcal{M}(V_{n-1})$ も G の元のイソトピー類で生成されると仮定しよう。

$\mathcal{N}(V_{n-1};z_{n0}\cup z_{n1})$ を、$\psi\in\mathcal{N}(V_{n-1})$ で $\psi(z_{n0}\cup z_{n1})=z_{n0}\cup z_{n1}$ なるものの全体の作る群とし，$\mathcal{M}(V_{n-1};z_{n0}\cup z_{n1})$ を $\mathcal{N}(V_{n-1};z_{n0}\cup z_{n1})$ の元の $z_{n0}\cup z_{n1}$ を固定するイソトピーに関するイソトピー類の作る群とする。Birman [4] の Th. 4.2, Th. 4.3 および pp. 158～160 の結果をまとめると、次のようになる。

4.5 <u>補題</u>：$j:\mathcal{N}(V_{n-1};z_{n0}\cup z_{n1})\to\mathcal{N}(V_{n-1})$ を自然な包含写像，$j_*:\mathcal{M}(V_{n-1};z_{n0}\cup z_{n1})\to\mathcal{M}(V_{n-1})$ を誘導される準同型写像とすると，$\mathcal{M}(V_{n-1};z_{n0}\cup z_{n1})$ は $\ker.j_*$ と、$\mathcal{M}(V_{n-1})$ の生成元を $\mathcal{M}(V_{n-1};z_{n0}\cup z_{n1})$ へリフトしたもので生成される。更に $\ker.j_*$ は $\overline{\omega}_n\equiv\omega_n|V_{n-1}$ と z_{n0} および z_{n1} の spins で生成される。◀

4.6 <u>注意</u>：必要ならば少しだけ変形して、G の元は V_{n-1} $(\equiv V_n^n)$ の同相写像として $z_{n0}\cup z_{n1}$ を固定する……と仮定してよい。◀

従って、補題4.5から ψ' は $\overline{\omega}_n^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}, \rho_{12}^{\pm 1}, \omega_1^{\pm 1}, \tau_1^{\pm 1}, \theta_{12}^{\pm 1}, \xi_{12}^{\pm 1}$ および z_{n0} と z_{n1} の spins の積とイソトープである。3.5 で与えた sliding の定義から、ψ は G の元と ω_n と B_{n0} および B_{n1} の slidings の積とイソトープである。ω_n の定義と系3.11より ψ は G の元の積とイソトープとなり、これで定理4.1(1)の証明が完了する。◀

4.7 定理4.1(2)の証明：Lickorish [15] (c.f. Birman [4]) により $\mathcal{M}(F_n)$ は、単純閉曲線 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ および $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ に関する Dehn twists によって生成される。ここで γ_j は $\partial B^3 - (B_{10} \cup B_{11} \cup \cdots \cup B_{n0} \cup B_{n1})$ の単純閉曲線で、B_{j1} と $B_{j+1,0}$ を含む円板を ∂B^3 で bound するものとする。ところで b_i に関する Dehn twist は τ_i（3.5を見よ）である。μ_i は a_i を b_i に移すし、$\theta_{j,j+1}$ は γ_j を b_{j+1} に移すから、a_i と γ_j に関する Dehn twists は各々 τ_i と μ_i, τ_{j+1} と $\theta_{j,j+1}$ の積で表わせる。◀

5. Siegel の Modular Group に関する注意

$H_1(F_n, Z)$ は基底 $\{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n\}$ を持つ自由Z加群だから、F_n の方向を保つ同相写像によって誘導される $H_1(F_n, Z)$ の自己同型写像の作る群は、Siegel の Modular 群、あるいは整数を要素とする $2n \times 2n$ 次の symplectic 行列の群 $Sp(2n, Z)$ として知られる。Birman [5, §3], Coxeter-Moser [7], Magnus et. al. [17] 等を参照

されたい。 $\psi \in \mathcal{N}(F_n)$ を $\psi_*: H_1(F_n, \mathbb{Z}) \to H_1(F_n, \mathbb{Z})$ に対応させることにより、自然な準同型写像 $\alpha: \mathcal{M}(F_n) \to Sp(2n, \mathbb{Z})$ が得られる。 $Sp(2n, \mathbb{Z})$ の生成元の分り易い決定は Hua-Reiner [13] にあり、Klingen [14] により定義関係式が与えられた。Dehn twists の写像 α による像を用いて、Birman [2] で定義関係式をきちんと整理してある。ところで我々が定理 4.1 (2) で与えた写像の α による像は、Hua-Reiner が代数的に与えた生成元に一致し、4.1 (1) で与えた写像の α による像のほとんどは Klingen [14] で用いた生成元に一致する。興味のある方には詳しい対応をまとめたものを差し上げます。

ついでに一つ注意を： Griffiths [11, §7] で写像 $\theta \in \mathcal{N}(V_n)$ を複雑な図を用いて定義していますが、 $\mathring{\theta}_*$ は symplectic 行列ではないので、実際は $\theta \notin \mathcal{N}(V_n)$ である。この定義を少しぐらい変えてみても、うまく要求する性質を満たすようにはならない。 θ の代りに、我々の定義した写像 $\mathring{\theta}_{12}$ を用いると、[11] の定理 3.1 および系 3.3 が結論される。また Klingen [14] の結果を我々の写像で書き換えてみると、Griffiths [11] の 209 頁上から 17～18 行目にある疑問は肯定的であることがわかる。

6. ホモロジー 3次元球面

寺阪教授の講演 [22] では、3次元のホモロジー球面の特徴

付けを行っている。基本的には全く同じ概念で Birman [5] が3次元ホモロジー球面の特徴付けを与えているので、興味のある方のために簡単に紹介しておこう。

V_n, $F_n = \partial V_n$, a_i, b_i 等すべて §2 の記号を用いる。V_n' を V_n のコピーとし，$F_n' = \partial V_n'$, a_i', b_i' 等で表わす。同相写像

$$\iota : (F_n, p) \longrightarrow (F_n', p')$$

で、$\iota(a_i) = a_i' b_i' a_i'^{-1}$, $\iota(b_i) = a_i'^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ なるものを一つ固定する。$\psi \in \mathcal{H}(F_n)$ で $\psi(p) = p$ のとき、$M = V_n \cup_\psi V_n'$ を $z \in F_n$ に対し $\psi(z) = \iota(z)$ で定義する。$\psi_\#(a_i)$, $\psi_\#(b_i) \in \pi_1(F_n, p)$ を $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ の語で書いたものを

$$\left.\begin{aligned} \psi_\#(a_i) &= A_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \\ \psi_\#(b_i) &= B_i(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \end{aligned}\right\} \text{——— (1)}$$

とおくと、$\pi_1(V_n \cup_\psi V_n')$ は表示

$$\langle a_1, \cdots, a_n \mid A_i(a_1, \cdots, a_n, 1, \cdots, 1) = 1, \ i = 1, \cdots, n \rangle \text{ — (2)}$$

を持つ。$\psi, \psi' \in \mathcal{H}(F_n)$ で $\psi \approx \psi'$ ならば，$V_n \cup_\psi V_n'$ と $V_n \cup_{\psi'} V_n'$ が同相になることはすぐ分る。

6.1 <u>命題</u>：$V_n \cup_\psi V_n'$ がホモロジー3次元球面になるための必要十分条件は，$[\psi] \in \mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{B}$ である。ここで $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は 2.2 のすぐ後に定義した $\mathcal{M}(F_n)$ の部分群で，$\mathcal{K}$ は $\alpha : \mathcal{M}(F_n) \longrightarrow Sp(2n, \mathbb{Z})$ の核である。◀

これと，Waldhausen の S^3 の Heegaard 分解についての定理

等を合せれば、割合簡単な議論で次が言える。

6.2 命題： $V_n \cup_\psi V_n'$ が真の3次元球面であるための必要十分条件は、$[\psi] \in \mathcal{AB}$ である。◀

この結果、Poincaréの予想は代数的に形式化できる：

6.3 系： Poincaréの予想が正しいことと、次の $\mathcal{M}(F_n)$ に関する予想が正しいことは同値である： $[\psi] \in \mathcal{AKB} \subset \mathcal{M}(F_n)$ で、$\psi_\#$ の $\pi_1(F_n, p)$ 上のactionが(1)で与えられる。また、$\pi_1(V_n \cup_\psi V_n')$ は(2)の表示を持つ抽象群とする。このとき、$\pi_1(V_n \cup_\psi V_n') = \{1\}$ となるのは $[\psi] \in \mathcal{AB}$ に限る。◀

参考文献

[1] Baer, R.: Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, J. reine angew. Math., 159(1928), 101-111.

[2] Birman, J.S.: On Siegel's modular group, Math. Ann., 191 (1971), 59-68.

[3] ————————: Mapping class groups of surfaces; A survey, Ann.of Math.Studies #79, Discontinuous Groups and Riemann Surfaces (ed.Greenberg), Princeton Univ. Press,1974.

[4] ————————: BRAIDS, LINKS AND MAPPING CLASS GROUPS, Ann.of Math.Studies #82, Princeton Univ.Press, 1974.

[5] ————————: Poincare conjecture and the homeotopy group of a closed orientable 2-manifold, J.Aust.Math.Soc., 17(1974), 214-221.

[6] Birman,J.S. and Hilden,H.M.: On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces, Ann.of Math.Studies #66, Advances on the Theory of Riemann Surfaces (ed. Ahlfors et al.), Princeton Univ.Press, 1972.

[7] Coxeter,H.S.M. and Moser,W.O.J.: GENERATORS AND RELATIONS FOR DISCRETE GROUPS, 3rd ed., Springer-Verlag, 1972.

[8] Dehn, M.: Die Gruppe der Abbildungsklassen, Acta Math., 69 (1938), 135-206.

[9] Epstein,D.B.A.: Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 115(1966), 83-107.

[10] Goeritz, L.: Die Abbildungen der Brezelflachen und der Vollbrezel vom Geschlecht 2, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 9 (1933), 244-259.

[11] Griffiths,H.B.: Automorphisms of a 3-dimensional handlebody, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 26(1964), 191-210.

[12] ———————— : Some elementary topology of 3-dimensional handlebodies, Comm.Pure and Appl.Math., 17(1964), 317-334.

[13] Hua,L.K. and Reiner,I.: On the generators of the symplectic modular group, Trans.Amer.Math.Soc., 65(1949), 415-426.

[14] Klingen,H.: Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endlisches System definierender Relationen, Math. Ann., 144(1961), 64-82.

[15] Lickorish,W.B.R.: A finite set of generators fortthe homeotopy group of a 2-manifold, Proc.Camb.Phil.Soc., 60 (1964), 769-778. Also Corrigendum, 62(1966), 679-681.

[16] Magnus, W.: Uber n-dimensionale Gittertransformationen, Acta Math., 64(1934), 353-367.

[17] Magnus.W., Karass,A. and Solitar,D.: COMBINATORIAL GROUP THEORY, Interscience, 1966.

[18] McMillan Jr.,D.R.: Homeomorphisms on a solid torus, Proc. Amer.Math.Soc., 14(1963), 386-390.

[19] Mangler,W.: Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Flache auf sich, Math.Z., 44(1939), 541-554.

[20] Nielsen,J.: Untersuchen zur Topologie der geschlossenen Zweiseitigen Flachen I, Acta Math., 50(1927), 184-358. Also, III, Acta Math., 58(1932), 87-167.

[21] Suzuki,S.: On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can.J.Math., (to appear).

[22] 寺阪英孝：閉曲面上の閉曲線群について，数理解析研究所講究録 219 (1974), 70-89.

[23] Zieschang,H.: Über einfache Kurven auf Vollbrezeln, Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg, 25(1962), 231-250.