数理解析研究所講究録
第 297 巻 1977 年 44-53

Allmost sufficiantly large manifold of type II

北大 教養　小林 一章
大学院　平山 律子

§1. 序

W. Jaco らによって提起された次の問題を考える.

Question : M は closed irreducible 3-manifold. $\pi_1(M)$ は infinite group ならば, $\pi_1(M)$ は closed surface の基本群と同型な群を subgroup としてもつか?

この問題を考えるうちに, 次の結論を得た.

定理. M は closed 3-manifold, $\pi_2(M)=0$, $\pi_1(M)$ は infinite group とする. α は M の中の次の条件を満足する simple closed curve とする

(1) $\alpha \nsim 0$ in $\pi_1(M)$

(2) $\partial U(\alpha)$ 上の distinguished longitude l は $\langle l \rangle \in H_1(M-\mathring{U}(\alpha))$ で infinite order

(3) $nm(\{[l]\}, \pi_1(M-\mathring{U}(\alpha))) = gp(\{[l]\}, \pi_1(M-\mathring{U}(\alpha)))$

ならば, $\pi_1(M)$ は closed orientable surface の基本群と同型

な部分群をもつ

ここで $[\alpha]$, $<\alpha>$はそれぞれ homotopy class, homology class である.

$nm(X, G)$ = the smallest normal subgroup by X in G

$gp(X, G)$ = the subgroup generated by X in G

を意味する.

この定理の応用として, Heil によって示された次の系を得る.

[系] Mは Seifert fiber space, $\pi_2(M)=0$, $\pi_1(M)$ が infinite group ならば $\pi_1(M)$は closed orientable surface の基本群を部分群としてもつ.

(証明)

αとしてMの中の normal fiber を表現している simple closed curve をとると, 定理(1), (2), (3)の条件をみたす.

§2. 定理の証明の準備

定理の証明の前に, いくつかの lemma を証明する.

lemma 1. Mは closed orientable 3-manifold, $\pi_2(M)=0$ αは simple closed curve, mは$\partial U(\alpha)$の distinguished meridian とするなら, $[m] \neq 1 \in \pi_1(M-\mathring{U}(\alpha))$

(証明). もし$[m]=1$とすると loop theorem より proper に embed されたB^2が存在して$\partial B^2=m$とできる。ここで

$\Sigma^2 = B^2 \underset{\partial}{\cup} B_1^2$ （ B_1^2 は $U(\alpha)$ の meridian disk ）とおくと，Σ^2 は α と一点で transvers に交わっているから Σ^2 は M を split しない．しかし，$\pi_2(M)=0$ より Σ^2 は compact contractible 3-manifold に bound されるから，Σ^2 は M を split するので矛盾が生じる。

lemma 2. M は closed orientable 3-manifold，α は simple closed curve とすると

$\mathrm{Im}\,(H_1(\partial U(\alpha):\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(M-\mathring{U}(\alpha):\mathbb{Z}))$ は infinite.

（証明） $\mathrm{Im}\,(H_1(\partial U(\alpha):\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(M-\mathring{U}(\alpha):\mathbb{Z}))$ が finite と仮定すると，$\mathrm{Im}\,(H_1(\partial U(\alpha):\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(M-\mathring{U}(\alpha):\mathbb{Q}))=0$.

$(M-\mathring{U}(\alpha),\ \partial U(\alpha))$ の $\mathbb{Q}$-係数 homology exact sequence，Poincaré dual を使うと $H_1(\partial U)=0$ となり矛盾が出る．

lemma 3. M は closed orientable 3-manifold，α は simple closed curve，l は $\partial U(\alpha)$ 上の distinguished longitude とするとき，distinguished homeo $h: S^1\times D^2 \longrightarrow U(\alpha)$ の適当なとり方によって，$\langle l\rangle$ は $\pi_1(M-\mathring{U}(\alpha))$ で infinite order とできる．

（証明）

$\langle\alpha\rangle \in H_1(M)$ で infinite order であれば $\langle l\rangle$ は $H_1(M-\mathring{U}(\alpha))$ で infinite order となるから，finite 即ち $p\langle\alpha\rangle=0$ のとき，証明する．

(I). $|p|>1$ のとき. $\langle l\rangle$ が $H_1(M-\mathring{U}(\alpha))$ で finite order.
i.e. $q\langle l\rangle=0$ とする. $U(\alpha)$ の中に $\beta \underset{\text{homologous}}{\sim} \alpha\cup\cdots\cup\alpha$ となる simple closed curve をとると $\langle\beta\rangle=0\in H_1(M)$ となり, surface F が存在して $\partial F=\beta$ とできる。ここで $\gamma\equiv F\cap\partial U(\alpha)$ とおくと. γ は simple closed curve で $\langle\gamma\rangle=a\langle m\rangle+q\langle l\rangle$ in $H_1(\partial U(\alpha))$. $(a,q)=1$. m, l はそれぞれ meridian, longitude である
$\langle\gamma\rangle=q\langle l\rangle=0$ in $H_1(M-\mathring{U}(\alpha))$ であるから $a\neq 0$ なら $\langle m\rangle$ も finite order となり. lemma 2 に矛盾する.
(II). $|p|=1$ のとき. (I) と同様に $q\langle l\rangle=0$ として矛盾を出す.
$\langle\gamma\rangle=a\langle m\rangle+q\langle l\rangle$ と同じくとると. $|q|>1$. $a\neq 0$ なら $\langle m\rangle$ は finite となり矛盾.
$|p|=|q|=1$, $a=0$ のとき問題であるが、このとき特 distinguished homeo $h: S^1\times D^2\longrightarrow U(\alpha)$ を新しく h' として $h'(m')=h(m')=m$. $h'(l')=h(m'l')=ml$ と定義し直し. ここで meridian, longitude m_1, l_1 を $h'(m')=m_1$, $h'(l')=l_1$ とおく. すると $\langle\gamma\rangle=-\langle m_1\rangle+\langle l_1\rangle$ とかけて. 前の事から $\langle l_1\rangle$ は infinite order でなければならない.

[定義] index 2 の embedded surgery の定義をする.
F は proper に embed された compact orientable manifold M

の中の 2-sided surface とし．αは simple closed curve．
$\exists B^2 \subset M$．such that $\partial B^2 = \alpha$，$B^2 \cap F = \alpha$ と仮定する．
$U(B^2)$: regular neighborhood か $U(B^2) \cap F \overset{put}{=} A \cong S^1 \times I$ なら．
$U(B^2)$ に embed された B^2 と parallel な B_1^2，B_2^2 で．$(B_1^2 \cup B_2^2) \cap F$
$= (\partial B_1^2 \cup \partial B_2^2) \cap F = \partial A$ となるのに対して
$F' = (F - \mathring{A}) \cup (B_1^2 \cup B_2^2)$ とおくと．F を F' に変えることを
index 2 の embedded surgery と呼ぶ．

lemma 4．　Mは compact orientable 3-manifold
Fは compact connected orientable surface で M に proper に
embed されている．もし $Ker(\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M)) \neq \{1\}$ なら
$\exists F'$: compact connected orientable surface　such that
$\partial F' = \partial F$，$Ker(\pi_1(F') \xrightarrow{i_*} \pi_1(M)) = \{1\}$
（証明）　$[\partial F] = 1$ なら $F' \cong D^2$．
$[\partial F] \neq 1$ なら loop theorem より $\exists B^2 \subset M$　such that $B^2 \cap F = \partial B^2$．
$[\partial B^2] \in Ker\, i_*$．この B^2 を使って．index 2 の embedded surgery
をする。その surface を F_1 とし．disconnected なら ∂F を含む
component を F_1 とおく．この操作を　$Ker(\pi_1(F_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M))$
が Kill するまで行う．最後にできた surface を F' とおくと．
F' は proper に embed された compact connected orientable
surface で $Ker\, i_* = \{1\}$ である．

lemma 5. M は compact 3-manifold, $\pi_2(M)=0$

$\pi_1(M)$ は infinite group なら $\pi_1(M)$ は torsion free.

§3. 定理の証明.

I. orientable case.

α は仮定で与えられた simple closed curve とすると.

lemma 5 より. $[\alpha]$ は infinite order である.

$\phi: \pi_1(M-\mathring{U}(\alpha)) \longrightarrow H_1(M-\mathring{U}(\alpha)) \longrightarrow \{\langle l \rangle\} \cong \mathbb{Z}$ に対し. l は

aspherical だから. $\exists f: M-\mathring{U}(\alpha) \longrightarrow l$ such that. $f_*=\phi$

f は一点 $x \in l$ に対し. transversally にしておくと. $f^{-1}(x)$ は

proper に embed された compact orientable surface,

$[\partial f^{-1}(x)] = m l^{\mu} \in \pi_1(\partial U(\alpha))$

lemma. $\mu=0$ なら M は incompressible orientable surface

をもつ. (F が incompressible surface とは $\mathrm{Ker}(\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M)) = \{1\}$ となるとき)

(証明) $f^{-1}(x)$ に対し index 2 の embedded surgery を行うと.

incompressible orientable surface F' を $M-\mathring{U}(\alpha)$ から lemma 4 より

とることができ. $[\partial F'] = m l^{\mu}$. ここで $\mu=0$ を仮定すると.

$[\partial F'] = m$. lemma 1 より $m \neq 1$ だから $F' \neq D^2$

$F''=F' \cup B^2$, B^2 は meridian disk in $U(\alpha)$ とおく.

もし $\mathrm{Ker}(i_*'(\pi_1(F'') \longrightarrow \pi_1(M)) \neq \{1\}$ なら index 2 の

embedded surgery をすると.

$F'' \sim F_1 \cup \cdots \cup F_t$: F_i は incompressible surface を得る.
$I(X, \alpha)$ を X と α の intersection number と定義すると.
$I(F'', \alpha) = 1$ だから $\exists F_i$ such that $I(F_i, \alpha) = 1$.
この F_i に対して $F_i \not\cong S^2$ ∵ $F_i \cong S^2$ なら. $[m] = \prod^{\xi} k[m]k^{-1}$
と表わすと. $[m] = [m]^{\xi}$ in $\pi_1(\partial U(\alpha))$ ξ は even
$[m]^{\xi - 1} = 1$ in $\pi_1(\partial U(\alpha))$ これは矛盾. $F_i \not\cong S^2$ となる incompressible
surface がある.

従って $\mu \neq 0$ としてよい.

$i_*: \pi_1(f^{-1}(x)) \longrightarrow \pi_1(M - \mathring{U}(\alpha))$ が $\mathrm{Ker}\, i_* \neq \{1\}$ なら. $\exists B^2$ で.
$M - \mathring{U}(\alpha)$ を使って index 2 の embedded surgery をする. 最後に
$f_1 : M - \mathring{U}(\alpha) \longrightarrow l$ such that

(1) $f_1 \simeq f$.

(2) f_1 は $x \in l$ に対し transverse

(3) $f_1^{-1}(x)$ の component は proper に embed された connected incompressible orientable surface F' で $\partial F' = m l^{\mu}$, $F' \cong D^2$.
を得る.

$W \underset{put}{=} (M - \mathring{U}(\alpha)) \underset{h}{\cup} (S^1 \times D^2)$ $h : S^1 \times D^2 \longrightarrow (\alpha)$ homeo
such that $h(m') = m l^{\mu}$

$F'' \underset{put}{=} F' \cup B'$ B' は meridian disk

f_1 を $f_2 : W \longrightarrow l$ へ拡張しておく.

もし. $\mathrm{Ker}(i_2^* : \pi_1(F'') \longrightarrow \pi_1(W)) \neq \{1\}$ なら. surgery しておくと
$F'' \sim F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_t$ となり. $F_i \cap h(S^1 \times D^2) \cong \{D^2\}$.

F_i と ℓ との intersection を考えると、このうちで

$F_i \cap h(S^1 \times D^2) = D_1^2 \cup \cdots \cup D_s^2$　s : odd となるものがある。

$F_i \cong S^2$ とすると、$[m\,\ell^\mu] = \prod_{j=1}^{\xi} k_j [m\,\ell^\mu]^{n(j)} k_j^{-1}$ とかけ、

$[\ell]^\mu = [\ell]^{\mu\xi}$ in $\pi_1(M)$ (by condision (3))　$\mu \neq 0$ から

$[\alpha]$ は infinite order に矛盾し、　$F_i \not\cong S^2$

従って W は incompressible surface $(\neq S^2)$ を含む。

次の diagram を考える

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(M - \mathring{U}(\alpha)) \arrow[dl, "j_{1*}"'] \arrow[dr, "j_{2*}"] & \\
\pi_1(W) \arrow[dr, "\psi_1"'] & & \pi_1(M) \arrow[dl, "\psi_2"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

$\pi_1(W) = \langle g_1, \cdots, g_p \mid r_1, \cdots, r_q \rangle$ とする。$[\alpha] = g_1$ と仮定

$\psi_1 : \pi_1(W) \longrightarrow H = \langle g_2, \cdots, g_p \mid r_1', \cdots, r_q' \rangle$

s.t.

$\psi_1(g_1) = 1$,　$\psi_1(g_i) = g_i$　$(i \neq 1)$

r_i' は r_i において g_1 を 1 と置きかえた relator

同様にして、$\psi_2(g_1) = 1$,　$\psi_2(g_i) = g_i$ を定義する

ここで $H \neq \{1\}$ としてよい。

∵　$\pi_1(M) = \operatorname{Ker}\psi_2 = nm(\{g_1\}, \pi_1(M)) = gp(\{g_1\}, \pi_1(M)) \cong \mathbb{Z}$

$H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ より incompressible surface $(\neq S^2)$ をもつ [7]。

$W \supset F_i$ に対し $G = \pi_1(F_i)$, $G' = \psi_1(G)$ とおく

G_0 : smallest subgroup of $\pi_1(M - \mathring{U}(\alpha))$ s.t. $j_{1*}(G_0) = G$

$\underset{\text{put}}{G'' =} j_{2*}(G_0)$. $G \cap \mathrm{Ker}\,\psi_1 = \{1\}$, $G'' \cap \mathrm{Ker}\,\psi_2 = \{1\}$ である.

何故なら, 条件(3)より $nm(\{g_1\}, \pi_1(W)) = gp(\{g_1\}, \pi_1(W))$

$nm(\{g_1\}, \pi_1(M)) = gp(\{g_1\}, \pi_1(M))$

$\omega \in G \cap \mathrm{Ker}\,\psi_1 = G \cap gp(\{g_1\}, \pi_1(W))$ があるとすると,

$\exists$ S path in M. such that $[S]\,\omega[S^{-1}] \in \pi_1(F'')$

$f_2^*([S]\,\omega[S^{-1}]) = 0 \in \pi_1(\ell)$ $\because$ $f_2(F'') = x$.

又, $\omega = g_1^{\,t}$. $f_2^*([S]\,\omega[S^{-1}]) = g_1^{\,t}$ 矛盾.

同様に $G'' \cap \mathrm{Ker}\,\psi_2 = \{1\}$ も示せる.

従って. $G'' \underset{\psi_2}{\cong} G' \underset{\psi_1}{\cong} G = \pi_1(F)$ となり $\pi_1(M)$ は closed orientable surface の基本群を部分群にもつ.

(II) non-orientable case.

M の double covering $\tilde{M}$ $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ をとる. $\tilde{M}$ は orientable になる. 定理の条件で与えられる simple closed curve α の lift したのを $\tilde{\alpha}$ とおくと. $\tilde{\alpha}$ は $\tilde{M}$ の中で条件(1), (2), (3) が成り立っている. p_* は injective であるから. $\pi_1(M)$ は closed orientable surface の基本群に同型な群を部分群としてもつ.

参考文献

1. B. Evans and W. Jaco : Varieties of groups and three manifold. Topology 12 (1973) 83-97

2. W. Jaco : The structure of three manifold groups (mimeographed note)

3. C. D. Papakyriakopoulos : On solid tori. Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957) 281-299

4. P. Scott : An introduction to 3-manifold (Lecture note)

5. J. R. Stalling : On fibering certain 3-manifold J. London Math. Soc. 7 (1973) 246-250

6. ———— : On the loop theorem, Ann of Math. (2) 72 (1960) 12-19

7. F. Waldhausen : Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, topology 6 505-517

8. W. Heil : Almost sufficiently large Seifert fiber space, Michigan Math. J. 20 (1973) 217-222