数理解析研究所講究録
第297巻 1977年 54-68

Genus 2 の Heegaard 分解をもつ S^3 について

東工大 理学部 本間龍雄

Poincaré 予想がもしも肯定的に解決したとしても、群が trivial かどうかを判定する方法が決定されていないから、与えられた 3-manifold が 3-Sphere かどうか判定する方法が見つかるとは限らない。この paper では genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold は 3-sphere かどうかを判定する単純な algorithm が存在することを証明する。

Def M, L が genus 2 の solid torus で, $N = M \cap L = \partial M = \partial L$ であるとき, $\{M, L, N\}$ を 3-manifold $M \cup L$ の genus 2 の Heegaard 分解という。

今後 M, L, N は上述の定義の genus 2 の二つの solid torus と torus をそれぞれ意味するものとする。

Def. M (L) の proper な disc の boundary

を <u>meridian</u> (<u>longitude</u>) と呼ぶ。 $\mu=\{m_1, m_2, m_3\}$ ($\lambda=\{l_1, l_2, l_3\}$) が互いに交わらない meridian (longitude) で，どの二つも $H_1(N)$ で一次独立なとき，<u>meridian-系</u> (<u>longitude-系</u>) と呼ぶ。また $\{\mu, \lambda\}$ を <u>m.l.-系</u> と呼ぶ。

<u>Def.</u> meridian と longitude が transversal に交わり，両者の二つの弧によって N の disc が bound されないとき，m.l.-系 は <u>normal</u> であるという。

meridian 又は longitude を N 上の isotopy で動かして，任意の m.l.系 は normal にできるから，今後 normal な m.l. 系 のみを扱う。

$\mu=\{m_1, m_2, m_3\}$, $\lambda=\{l_1, l_2, l_3\}$ が normal な m.l.-系 であるとき，$M \cup L$ が homology-sphere なら

$$N-(m_1 \cup m_2 \cup m_3 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3)$$

の各連結成分の boundary は，4つの弧，又は6つの弧，又は8つの弧からできていて，meridian と longitude の弧が交互に並んでいる。それぞれの場合各連結成分の閉包を<u>四辺形</u>，<u>六辺形</u>，<u>八辺形</u> といい，これ等を m.l.-系 $\{\mu, \lambda\}$ の <u>多辺形</u>と呼ぶ。homology sphere かどうかの判定は容易なので，ここで扱う 3-manifold は homology sphere に限ることにする。

<u>Def.</u> m.l.-系の多辺形で一つのmeridianあるいは一つのlongitudeに属する二辺をもつものが存在するとき、<u>reducible</u> であるという。前者の場合を <u>m-reducible</u>, 後者の場合を <u>l-reducible</u> という。reducible でないとき <u>irreducible</u> という。

reducible なときに実際に reduction が存在することを示すために m.l.-系の性質を調べる。つぎのことは良く知られている。

<u>Prop. 1</u> (m.l.-系の対称性) $\{\mu, \lambda\}$ が任意の m.l.-系であるとき, N の involution T ($T^2 = I$) が存在し

$$T(m_i) = m_i \quad , \quad T(l_i) = l_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

を満たす。

もちろん $N - (m_1 \cup m_2 \cup m_3)$ は二つの連結成分をもつがその一つの閉包 N^+ 内の longitude の様子により、m.l.-系の性質もある程度判明する。例えばつぎの命題が成立する。

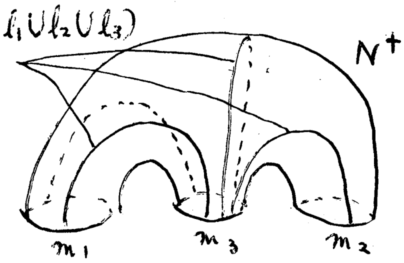


図1

<u>Prop. 2</u> 多辺形で m_3 に属する二つの弧をもつ（従って m.l.-系は m-reducible）ものが存在するための必要充分条件は, $N^+ \cap (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ に含まれる弧で, m_1 と m_3, m_2 と m_3 ~~に属する~~ を結ぶ弧が存在し, m_1 と m_2 を結ぶ弧が存在しないことである。

<u>Proof</u>　m_1とm_2を結ぶlongitudeの弧が存在すればm_3の二つの弧を二辺とする多辺形は存在し得ない。またhomology sphereであるからm_1とm_3, m_2とm_3を結ぶlongitudeの弧が存在する。

<u>Remark</u>　Prop. 2でm_3から出てm_3に入るlongitudeの弧がある場合とない場合（後に述べる0-型）とがある。図1はそのような弧が存在する場合である。

MUL は homology sphere であることと Prop. 2 よりつぎの命題が直ちに導びかれる。

<u>Prop. 3</u>　Prop. 2の条件のもとで，$(l_1 \cup l_2 \cup l_3)-(m_1 \cup m_2)$ の弧aでm_1とm_2を結ぶものが存在し，aはm_3と交わる。（図2）

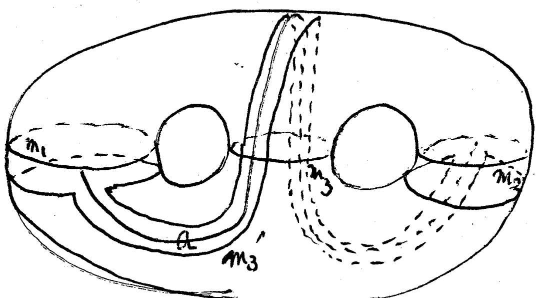


図2

<u>Reductionの方法</u>

$\{\mu, \lambda\}$がreducibleとする。

たとえばProp. 2の条件を満足したとする。図2のようにaを中心線とするbandでm_1とm_2をつなぐと新しいmeridian系$\mu' = \{m_1, m_2, m_3'\}$を得る。（後に述べるsimple transformation）つぎの命題によりこの変換$\{\mu, \lambda\} \longrightarrow \{\mu', \lambda\}$はreductionとなっている。

<u>Prop. 4</u>　meridian系とlongitude系の交点数は

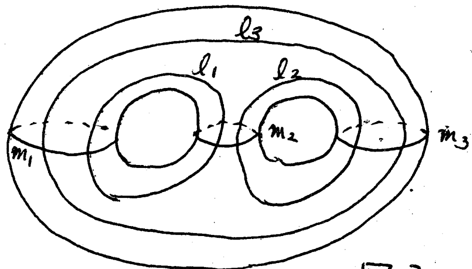
$\{\mu',\lambda\}$ が $\{\mu,\lambda\}$ より少なくなっている。

Proof　m_1 と m_2，λ はそのままだから，m_3' と λ の交点数が，m_3 より少なくなっていることを示せば良い。図1を見れば判るように m_3 と λ の交点数は

m_1 の交点数 ＋ m_2 の交点数 ＋ m_3 を結ぶ弧の数

であるが，図2で判るように m_3' と λ の交点数は m_3 と a の交点数だけ少なくなる（normal になおすので実際はもっと少なくなる。）

Def.　任意の meridian と任意の longitude が丁度一点で交わるとき，その m.l.-系は標準形と呼ばれる。



標準形　図3

m.l.-系が標準形ならば，もちろん 3-manifold $M \cup L$ は 3-sphere となるが，次の定理がこの paper の主定理である。

Theorem　S^3 の genus 2 の Heegaard 分解の irreducible な m.l.-系は標準形である。

S^3 判定の algorithm　genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold $M \cup L$ が与えられれば homology sphere かどうかは直ちに判定できる。homology sphere ならばその m.l.系が reducible か irreducible かを判定し

(判定の方法は簡単である) reducible ならば irreducible になるまですでに述べた手段で reduction を繰り返し，最後に得た irreducible な m.l.-系 が標準形ならば S^3，標準形でなければ S^3 でない。

<u>Def.</u> meridian系 (longitude系) の <u>simple transformation $\mu \xrightarrow{s} \mu'$</u> (<u>$\lambda \xrightarrow{s} \lambda'$</u>) とは，$\mu = \{m_i, m_j, m_k\}$ の二つの meridian m_i, m_j はそのままにして，残りの一つの meridian m_k の代りに m_i と m_j を <u>band $a\times b$</u> ($a=b=[0,1]$) でつないで新しい meridian系 $\mu' = \{m_i, m_j, m'_k\}$ を作ることである。(図4)

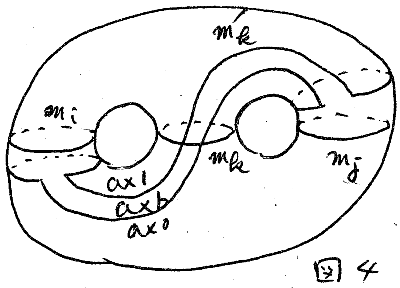


図4

<u>Remark</u> band $a\times b$ が m_k と交わらなければ，m'_k は V上の isotopy で m_k に移れるから μ と μ' は同じ meridian 系と考えられる。故に band $a\times b$ は常に m_k と交わるものとする。

つぎの Prop. は明らかである。

<u>Prop. 5</u> (simple transformation の対称性)
simple transformation $\mu \to \mu'$ と $\mu \to \mu''$ において，$\mu = \{m_i, m_j, m_k\}$，$\mu' = \{m_i, m_j, m'_k\}$，$\mu'' = \{m_i, m_j, m''_k\}$

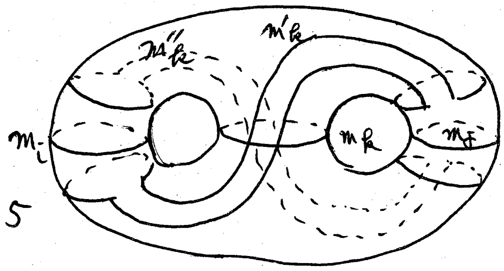
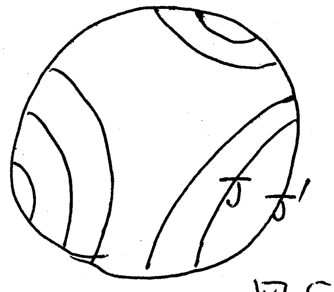


図5

で，両者の band が交わらず m_i と m_j を反対側からつないで，μ'_k と μ''_k が作られるならば，μ'_k と μ''_k は N 上の isotopy で互いに移れるから，μ' と μ'' は同じ meridian 系と考えて良い。

Def. $\mu = \mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \mu_2 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \mu_m = \mu'$ が simple transformation の列で，(1) μ_i の新しい meridian と古い meridian の一つを band をつないで μ_{i+1} の新しい meridian が作られ，(2) $\mu_i \xrightarrow{s} \mu_{i+1}$ の band は $\mu_{i-1} \xrightarrow{s} \mu_i$ の band の中を通っているとき，この列を elementary transformation と呼び，$\mu \xrightarrow{e} \mu'$ と書く。

m, $\{m_1, m_2, m_3\}$ は meridian と meridian 系で normal に交わるものとする。D, $\{D_1, D_2, D_3\}$ をそれぞれに対応する meridian disc とする。$D \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ は $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ の boundary の二点を結ぶ曲線の集合からできているとして良いが，その中で outermost なものを一つ選び J とし，それに対応する boundary arc (meridian の弧) を J' とする。m を二点 $\partial J = \partial J'$ で切断してできる弧を $\overline{m'}$, $\overline{m''}$ とし，$\{m, \overline{m'} \cup J', \overline{m''} \cup J'\}$



D_i 図5
$\dot{D}_i = m_i$

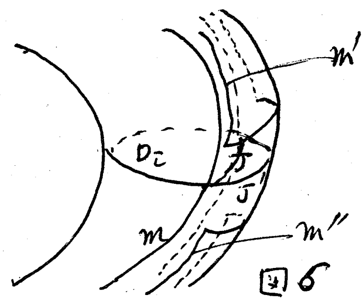


図6

をnormalになおしてmeridian系$\{m, m', m''\}$を得る。これはm'とm''をbandをつないでmを作る操作の逆をしたことになる。

<u>Prop. 6</u> (meridian系作成の一意性) 上に述べた$\{m, m', m''\}$はJの選び方に無関係に一意的に定まる。(mod. isotopy)

<u>Proof</u> Jの選び方によって、二つのmeridian系$\mu_1=\{m, m_1', m_1''\}$, $\mu_2=\{m, m_2', m_2''\}$が作られたとする。m_1'はμ_2と交わらず、m_2''はμ_1と交わらないとして差支えない。meridian系μ_i $(i=1, 2)$と交わらないmeridianはμ_iの三つのmeridianのどれか一つとisotopicである。故にμ_1とμ_2はisotopicである。

二つのmeridian系$\mu=\{m_1, m_2, m_3\}$と$\bar{\mu}=\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$がよえられたとき、上に述べたmeridian系の作り方と同じ方法で新しいmeridian系$\mu'=\{m_1', m_2', m_3'\}$を作り、$\mu' \xrightarrow{s} \mu$はsimple transformationとなり、μ'と$\bar{\mu}$の交点数をμと$\bar{\mu}$の交点数より下げることができる。Prop. 6よりつぎの命題を得る。

Prop. 7 (simple transformation 作成の一意性) 上に述べた $\mu' \xrightarrow{s} \mu$ の作り方において，μ' は μ と $\bar{\mu}$ によってのみ一意的に定まる。(mod. isotopy)

Prop. 7 を繰り返して用いることによりつぎの Lemma を得る。

Lemma 1 二つの meridian 系 μ, $\bar{\mu}$ が与えられれば，elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ が存在し，一意的に定まる。

つぎの Lemma は良く知られている。

Lemma 2 (Waldhausen の定理) S^3 の genus 2 の Heegaard 分解は標準形の m.l. 系をもつ。

Lemma 1 と Lemma 2 よりつぎの Lemma を得る。

Lemma 3 S^3 の任意の genus 2 の Heegaard 分解の m.l. 系を $\{\mu, \lambda\}$ とする。標準形 $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\}$ からの elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ が存在し，一意的に定まる。

elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ とは meridian 系の elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ と longitude 系の elementary transformation $\bar{\lambda} \xrightarrow{e} \lambda$ を組み合わせたもので，

$$\bar{\mu} = \mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1 \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \lambda_{\ell-1} \xrightarrow{s} \lambda_\ell = \lambda$$

と表わされているものとする。

定理の証明では $\{\mu, \lambda_i\}$ の reduciblity を i に関する induction で確かめる。もしも $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band が μ の meridian を横切れば，$j \geqq i$ なるすべての j に対し，$\lambda_{j-1} \xrightarrow{s} \lambda_j$ の band が μ を横切って，$\{\mu, \lambda_j\}$ はすべて l-reducible で，もちろん $\{\mu, \lambda\}$ も l-reducible となるから，(i) $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band は μ を横切らないと仮定して良い。

もしも $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band が $\bar{\lambda} = \lambda_0$ を横切らなければ，μ は標準形となり (i) より λ も標準形となって定理は自明となるので，(ii) $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band は $\bar{\lambda} = \lambda_0$ を横切るものとする。

Def. m.l.-系が八辺形をもつとき，0-型という。

八辺形ならば四辺は meridian の孤であり，他の四辺は longitude の孤であるから，二辺は一つの meridian に属し，二辺は一つの longitude に属するからつぎの命題が成立つ。

Prop. 8 0-型の m.l.-系は m-reducible であり，l-reducible である。

Def. $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band $a \times b$ の subband

$[t_1, t_2] \times b \quad (0 < t_1 < t_2 < 1)$ が λ_i の二つの longitude を結んでいてそれ以外では λ_i の longitude と交わらないとき，$[t_1, t_2] \times b$ を <u>bridge</u> と呼ぶ。

<u>Def.</u> $\{\mu, \lambda_i\}$ を bridge を用いてつぎのように分類する。

<u>1-型</u>：1対の longitude に bridge が存在し，他の二対に bridge が存在しない。

<u>2-型</u>：2対の longitude に bridge が存在し，他の一対に bridge が存在しない。

<u>3-型</u>：三対の longitude とも bridge が存在する。

<u>Prop. 8</u> $\{\mu, \lambda_i\}$ が 1-型，2-型または 3-型ならば，m-reducible である。

<u>Proof</u> bridge $[t_1, t_2] \times b$ は四辺形で，二辺 $[t_1, t_2] \times \dot{b}$ は μ の一つの meridian に属するから，いずれの場合も m-reducible である。

定理の証明には，(i), (ii) の仮定のもとですべての $\{\mu, \lambda_i\}$ が $\{\mu, \lambda_i\}$ が 0, 1, 2, 3-型のいずれかであることを確める。つぎの命題が定理の証明に非常に役に立つ。

<u>Lemma 4</u> simle transformation $\lambda_{i-1} \xrightarrow{S} \lambda_i$ で結ばれる λ_{i-1} の二つの longitude をつなぐ bride が存在すれば，$\lambda_i \xrightarrow{S} \lambda_{i+1}$ で結ばれる二つの longitude をつなぐ bridge が存在する。

<u>Proof</u>　$\lambda_{i-1}=\{l_1, l_2, l_3\}$，$\lambda_i=\{l_1, l_2, l_3'\}$ で，l_1 と l_2 を結ぶ bridge が存在したとする。l_3' は l_1 と l_2 を band で結んでできる longitude であるから，λ_i において l_1 と l_3' を結ぶ bridge と，l_2 と l_3' を結ぶ bridge が共に存在する。simple transformation $\lambda_i \xrightarrow{s} \lambda_{i+1}$ は l_1 と l_3' を band で結ぶか，l_2 と l_3' を band で結ぶかのどちらかであるから，Lemma 4 が成立する。

Lemma 4 の前提の条件を $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ が満足すればそれ以後の $\lambda_j \xrightarrow{s} \lambda_{j+1}$ $(i \leqq j)$ はすべてその条件を満足することを Lemma 4 は明らかにしている。故に結論として $\{\mu, \lambda\}$ にも bridge が存在し，従って m-reducible である。

<u>定理の証明</u>　elementary transformation

$$\{\mu, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_1\} \xrightarrow{s} \cdots\cdots \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_{e-1}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda\}.$$

の各 step の m.l.系 $\{\mu, \lambda_i\}$ が 0, 1, 2, 3－型のどれかであることを確める。仮定(iii)より $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band は $\bar{\lambda}=\lambda_0$ を横切るが，bridge が存在しなければ isotopy で band と $\bar{\lambda}$ の交わりはなくせるから，bridge は必らず存在するとして良い。故に induction の出発点の $\{\mu, \bar{\lambda}\}$ は 1, 2, 3 型のいずれかである。

a) <u>$\{\mu, \bar{\lambda}\}$ が 3－型の場合</u>，この場合は $\bar{\lambda}=\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$

Lemma 4の前提の条件が満足されるので, inductiveにすべての段階でこの条件が満され, 結局 $\{\mu, \lambda\}$ は m-reducible となる。

b) $\{\mu, \overline{\lambda}\}$ が1-型の場合, この場合は, $\overline{\lambda}=\lambda_0=\{l_1, l_2, l_3\}$ で l_1 と l_2 を結ぶbridgeが存在したとする。もしも simple trasformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ において, l_1 と l_2 がbandで結ばれるならLemma 4より, a)の場合と同じ理由で $\{\mu, \lambda\}$ は m-reducibleとなる。故に l_1 と l_3 または l_2 と l_3 をbandで結ぶ場合のみを考えれば良い。いま l_1 と l_3 がbandで結ばれ新しい λ_1 のlongitude l_3' ができたとする。仮定(1)よりそのbandは μ を横切らないことと, l_1 と l_2 にかかるbridgeが存在することより, l_2 と l_3' を結ぶbridgeの数は l_2 と l_3 を結ぶbridgeの数より少なくなる。引き続きlongitude-系のsimple transformationを進めると, $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ のbandとlongitude系の交わりが減っていく。$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ のbandとlongitudeが交わらなくなった後は, $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ のbandと, $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ のbandの交わりの中に八回形が現われるから, $\{\mu, \lambda_i\}$ は0-型となる。$\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ のbandとlongitudeが交わって

いる時はもちろん $\{\mu, \lambda_i\}$ は m-reducible であるから，いずれにしても reducible である。

c) <u>$\{\mu, \lambda\}$ が2-型の場合</u> この場合は $\lambda = \lambda_0 = \{l_1, l_2, l_3\}$ において l_1 と l_2 を結ぶ bridge と l_1 と l_3 を結ぶ bridge が存在したとする。Lemma 4 より simple transformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ は l_2 と l_3 を band で結ぶ場合を考えれば良い。このとき二つの場合が考えられる。まず $\{\mu, \lambda_1\}$ が3-型になる場合であるが，この場合は a) に帰着する。つぎは $\{\mu, \lambda_1\}$ が2-型または1-型となる場合で，このときは $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band と λ_1 の交わりは減っている。さらに引続く simple transformation で交わりは単調に減っていくから，b) の場合に帰する。 証明終り

[1] によるとソ連の A. Volodin, V. E. Kuznetsov, A. T. Fomenko は同じような Algorithm を genus が一般の場合の Heegaard 分解に対して考えている。10^6 個の例について試したところ正しかったそうであるが，まだ証明はできていないらしい。

参照文献

[1] A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko

The Problem of Discriminating Algorithmically the Standard Three-dimensional Sphere, Russian Math. Surveys, 29:5 (1974), P.71—74.

[2] Birman J. S. and Hilden H. M., The homeomorphism for S^3. Bulletin of the A.M.S. vol. 79 No.5 (1973), P.1006～1010。

[3] 高橋元男，種数 2 の Heegaard 分解についての Birman-Hilden の定理の別証，数理解析研究所講究録，243，(1975).

[4] F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegung der 3-Sphäre, Topology, 7 (1968) P.195～203

[5] 本間龍雄，S^3判定の Algorithm について，(多様体の低余次元位置問題について)，数理解析研講究録，243，(1975)。