数理解析研究所講究録
第 297 巻 1977 年 100-116

On knot groups

関西学院大学　　前田　　亨

1．Knot groups．

定義。finitely presentedな群Gが次の３つの条件を満足するとき，knot groupと呼ぶ。

(1)　$H_1(G) \cong Z$，（Zは無限巡回群）

(2)　Gのweightが１である，

(3)　$H_2(G)=0$。

ここに、群Gのweightとは、normal closureがGとなる部分集合全体の中での、最小濃度のことである。今、weightが１を決定するGの元xを、Gのweighted elementと呼ぶ。

H．Hopf [3]によれば、任意の自由群Fと任意の全射準同形写像$\varphi: F \to G$に対し、$R=\mathrm{Ker}\,\varphi$とすれば、

$$H_2(G)=([F,F]\cap R)/[F,R]$$

である。

この定義をknot groupと呼ぶことにしたのは、次のM. A. Kervaire の proposition [4]による。

(1.1)　S^n, S^{n+2}はn, $(n+2)$次元球面, $f: S^n \to S^{n+2}$を可微分な埋め込みとすれば、全ての$n \geqq 1$に対し、$G = \pi_1(S^{n+2} - f(S^n))$は、条件(1), (2), (3)を満たす。逆に，群Gが条件(1), (2), (3)を満たすならば、任意の$n \geqq 3$において、可微分な埋め込み$f: S^n \to S^{n+2}$で、$\pi_1(S^{n+2} - f(S^n)) \cong G$を満足するものが存在する。

$n = 1, 2$に対して、群Gのknot group$\pi_1(S^{n+2} - f(S^n))$としての実現には、Gが Wirtinger presentation をもつことが大きな意味をもつ。群Gが Wirtinger presentation をもつとは、Gが次の様なpresentationで表わされることである。

$$G = \langle x_1, \cdots, x_m : r_1, \cdots, r_n \rangle_\varphi$$

$$r_i = x_{k_i} u_i x_{l_i}^{-1} u_i^{-1},$$

$$1 \leqq k_i,\ l_i \leqq m, \qquad (i = 1, \cdots, m).$$

u_iは$x_1, \cdots, x_m$による語,

幾何学的には、(1.1)より、全てのknot groupが Wirtinger presentation をもつことは明らかであるが、代数的証明が Yajima [9]に与えられている。すなわち、

(1.2)　knot group$G$は、任意のweighed element xに

対し、xを生成系に含む、Wirtinger presentation をもつ。

さらに、GがWirtinger presentation をもつならば、Yajima [7] の方法により、次のproposition を得る。

(1.3) 全てのknot group Gに対し、$\pi_1(R^4-F)\cong G$となる2-dimensional connected closed orientable surface Fが存在する。

ここで、Wirtinger presentation に対し、2つの補題を述べておく。

(1.4) 群GがWirtinger presentationをもち、条件(1)を満足するならば、Gは、次の形のWirtinger presentationをもつ。

$$G=\langle x_0, x_1, \cdots, x_n : r_1, \cdots, r_n, s_1, \cdots, s_p \rangle_\varphi$$

$$r_i = x_i u_i x_0^{-1} u_i^{-1} \qquad (i=1,\cdots,n),$$

$$s_j = x_0 v_j x_0^{-1} v_j^{-1} \qquad (j=1,\cdots,p),$$

u_i, v_j は $x_0, x_1, \cdots, x_n$による語である。

(1.5) 群Gが(1.4)のpresentationをもつとき、Gがknot groupであることと、Gのpresentationが、

$$G=\langle x_0, x_1, \cdots, x_n : r_1, \cdots, r_n, [x_i, s_j] \rangle_\varphi$$

（但し、i, jは全てをとる必要はない。）
となる。

（1.4）の証明。

GのWirtinger presentationに対し、Yajima[8], p.441, で用いられているdiagramを考える。条件(1)を満たすことから、connected component は1である。よって、diagramに適当に、maximal treeをとり、一つの頂点をx_0とすると、x_0から他の頂点x_iへのpathで、treeを通るものが一つ決定される。それに対応するrelator をr_iとする。さらに、maximal treeに属さない辺に対し、その辺だけがmaximal treeに属さないx_0からx_0へのclosed pathが唯一つ決まる。それに対して、s_jをつくれば、明らかに（1.4）の結論を得る。

（1.5）の証明。

必要条件は、［9］, p.997により明らか。十分条件は、Gが（1.4）のpresentationを満たすことから、条件(1), (2)は明らか。よって、条件(3)を示せばよい。今、$F = \langle x_0, x_1, \cdots, x_n : \quad \rangle$, $R = \mathrm{Ker}\,\varphi$（すなわち、Fにおける$\{r_i, [x_i, s_j]\}$のnormal closure）に対し、$[F,R] \supseteq ([F,F] \cap R)$を示す。$\omega$を$[F,F] \cap R$の元とする。$\omega \in R$であるから、

$$\omega = \prod_{k=1}^{m} W_k t_k^{\epsilon_k} W_k^{-1}, \quad \epsilon_k = \pm 1, \quad t_k = r_i \text{ or } [r_i, s_j],$$
$$W_k \in F,$$

と書ける。ここで、$t_{k'} = [x_i, s_j]$ に関し、k' が小さい順に、$k'_1, \cdots, k'_c$，$t_{k''} = r_i$ に対し、$k''_1, \cdots, k''_d$ とする。さらに、

$$U_u = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k'_1, \cdots, k'_{u-1}}}^{k'_u - 1} W_k t_k^{\epsilon_k} W_k^{-1}, \qquad U_u^* = U_u W_{k'_u} t_{k'_u}^{\epsilon_{k'_u}} W_{k'_u}^{-1} U_u^{-1},$$

$$U = \prod_{u=1}^{c} U_u^*, \qquad V = \prod_{v=1}^{d} W_{k''_v} t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}} W_{k''_v}^{-1},$$

とすれば、

$$\omega = U \cdot V。$$

仮定より、$s_j \in R$。よって、$[x_i, s_j] \in [F, R]$。故に $U \in [F, R]$。よって $V \in [F, R]$ を示せばよいことになる。

$\omega \in [F, F]$ であるから、各生成元 x_i に対し、ω 中の index sum $\sigma_{x_i}(\omega) = 0$ である。ところが、$\sigma_{x_i}(U) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ であるから、$\sigma_{x_i}(V) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ を得る。よって、

$$\begin{aligned} \sigma_{x_i}(V) &= \sigma_{x_i}\left(\prod_{v=1}^{d} W_{k''_v} t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}} W_{k''_v}^{-1}\right) \\ &= \sum_{v=1}^{d} \sigma_{x_i}(t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

一方、$\sigma_{x_i}(r_i) = 1$，$\sigma_{x_i}(r_q) = 0$ $(i \neq q)$ であるから、$t_{k''_v}^{\epsilon_{k''_v}}$ が r_i であれば必ず $t_{k''_{v'}}^{\epsilon_{k''_{v'}}} = r_i^{-1}$ となる v' が存在する。よって、例えば、$V = V' r_i V'' r_i^{-1} V'''$ ならば、$V = (V'[r_i, V''] V'^{-1}) V' V'' V'''$ となる。$[r_i, V''] \in [F, R]$ であるから、$V' V'' V''' \in [F, R]$

を示すこととなり、Vに行なったと同様のことを考えれば、結論を得る。

2. Commutator subgroups.

Gをknot group, $N=[G,G]$とすれば、条件(1)より、GはNのZによるsplitting extensionと見ることが出来る。そこで、いくらかのよく知られている群に対し、Zからその群の自己同形群への準同形を考えることにより、その群をNとしてもつknot groupの存在について連記しておく。

(2.1) $N=1$, the trivial group.

NのZによるextensionはZだけであり、これはknot group。

(2.2) $N=Z_m$, the cyclic group of order m.

mが偶数のとき、存在しない。((1),(2)を同時に満足できない)

mが奇数のとき、存在する。

(2.3) $N=D_m=\langle a,b:a^m=1,\ b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$,

the dihedral group.

存在しない。($m=1$のとき、$N=Z_2$。$m=2$のとき、(1),(2)を満足するものは存在するが、(3)を満足しない。$m\geqq 3$のとき、(1)を満足しない。)

(2.4) $N=\langle a,b:a^{2m}=1,\ b^2=a^m,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$,

the dicyclic group.

$m=1$のとき、存在しない（$N=Z_4$）。$m=2$のとき、Nはquaternion groupであり、存在する。事実、S^4中のtwist spun knotとして実現できる。$m \geqq 3$のとき，存在しない（(1)を満足しない）。

（2.5）$N=F_m$: the free group of rank n.
$m=1$のとき、存在しない（(1)を満足しない）。$m \geqq 2$のとき、少なくとも1つ存在する。

（2.6）$N=$ the free abelian group of rank m.
$m=1$，存在しない（$N=$ the free group of rank 1）。
$m=2$のとき、存在しない（(1), (2)を満足するものは存在するが、(3)を満足しない。幾何学的証明は、M. A. Kervaire [4], p.117のJ. Milnorの例）。$m \geqq 3$のとき、存在する（幾何学的証明は、S. E. Cappel and J. L. Shaneson [1]により与えられている）。

Yajimaのproposition（1.2）の逆の問題「群Gが条件(1)を満たすWirtinger presentationをもつならば、$H_2(G)$が消えるか。」は、まだ解けていない。上記の例において、(1), (2)を満たすが(3)を満たさない$N=D_4$（Klein 4-group）と$N=Z \oplus Z$が反例の候補であったが、いずれもWirtinger presentationをもたないことが示される。

3. Composition of knot groups.

knot group Gの任意のweighted element xは、$x \notin [G,G]$であるから、xにより生成されるGの部分群$\langle x \rangle$は、$\mathbb{Z}$に同形となる。よって、knot group G_1, G_2，それらのweighted element x, yに対し、the free product with amalgamation

$$G = *(G_1, G_2, \langle x \rangle, \langle y \rangle, \phi)$$

が定義できる。ϕは、$\phi(x) = y$で定義される$\langle x \rangle$から$\langle y \rangle$への同形写像である。ここで、G_1, G_2はGの部分群と見なす。便宜上、$G = (G_1, x) \# (G_2, y)$と記す。

(3.1) $(G_1, x) \# (G_2, y)$は、knot groupである。

証明。

(1.2), (1.4) よりG_1, G_2は、次の様なpresentationをもつ。

$$G_1 = \langle x_0, x_1, \cdots, x_m : r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_p \rangle_\varphi$$

$$G_2 = \langle y_0, y_1, \cdots, y_n : R_1, \cdots, R_n, S_1, \cdots, S_q \rangle_\psi$$

$$\varphi(x_0) = x, \quad \psi(y_0) = y,$$

$$r_i = x_i u_i x_0^{-1} u_i^{-1}, \qquad s_j = x_0 v_j x_0^{-1} v_j^{-1},$$

$$R_k = y_k U_k y_0^{-1} U_k^{-1}, \qquad S_l = y_0 V_l y_0^{-1} V_l^{-1}.$$

よって、Gは次のpresentationをもつことになる。

$$G = \langle x_0, x_1, \cdots, x_m, y_0, y_1, \cdots, y_n :$$

$$r_1, \cdots, r_m, R_1, \cdots, R_n, x_0 = y_0,$$
$$s_1, \cdots, s_p, S_1, \cdots, S_q, \quad >_\xi ,$$
$$\xi(x_u) = \varphi(x_u) \quad (u = 0, 1, \cdots, m),$$
$$\xi(y_v) = \psi(y_v) \quad (v = 0, 1, \cdots, n)。$$

G_1, G_2はknot groupであるから、(1.5)より、

$$G_1 = \langle x_0, x_1, \cdots, x_m : r_1, \cdots, r_m, [x_i, s_j] \rangle_\varphi ,$$
$$G_2 = \langle y_0, y_1, \cdots, y_n : R_1, \cdots, R_n, [y_k, S_l] \rangle_\psi$$

となる。但し、i, j, k, lは全てをとる必要はない。よって、

$$G = \langle x_0, x_1, \cdots, x_m, y_0, y_1, \cdots, y_n :$$
$$r_1, \cdots, r_m, R_1, \cdots, R_n, x_0 = y_0,$$
$$[x_i, s_j], [y_k, S_l] \quad \rangle_\xi$$
$$= \langle x_0, x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n :$$
$$r_1, \cdots, r_m, R_1^*, \cdots, R_n^*,$$
$$[x_i, s_j], [y_k^*, S_l^*] \quad \rangle_\xi 。$$

ここに$*$のついたものは、その語の中のy_0を全てx_0で書き換えたものである。よって再び(1.5)より、Gはknot groupである。

C. Mac Gordon [2]は、3つのS^4中のtwist-spun knot K_1, K_2, K_3を構成し、それらのknot groupは全て同形であるが、$K_i \# K_j$ $(1 \leqq i, j \leqq 3)$の6つのknot groupは全て同形

でないことを証明している。これは、$(G_1, x) \# (G_2, y)$ が、G_1, G_2によるばかりか、x, y の選び方にもよることを示す良い例といえる。その証明について述べておくことにする。

① $G_1 = \langle X_1, Y_1 : X_1^2 = Y_1^3,\ (Y_1^{-1}X_1)^5 X_1 = X_1(Y_1^{-1}X_1)^5,$
$\qquad (Y_1^{-1}X_1)^5 Y_1 = Y_1(Y_1^{-1}X_1)^5 \rangle_{\varphi_1^*}$

ここで、$x_0 = Y_1^{-1}X_1$, $x_1 = X_1Y_1^{-1}$ とおけば、次のWirtinger presentationを得る。

$$G_1 = \langle x_0, x_1 : \quad x_1 = (x_0 x_1)\, x_0\, (x_0 x_1)^{-1},$$
$$x_0 = (x_1^{-1} x_0^5 x_1)\, x_0\, (x_1^{-1} x_0^5 x_1)^{-1} \rangle_{\varphi_1}$$

② $G_2 = \langle X_2, Y_2 : X_2^3 = Y_2^5,\ (Y_2^2 X_2^{-1})^2 X_2 = X_2(Y_2^2 X_2^{-1})^2,$
$\qquad (Y_2^2 X_2^{-1})^2 Y_2 = Y_2(Y_2^2 X_2^{-1})^2 \rangle_{\varphi_2^*}$

ここで、$y_0 = Y_2^2 X_2^{-1}$, $y_1 = X_2 Y_2^{-3} X_2$, $y_2 = X_2^{-1} Y_2^2$ とおくと、

$$G_2 = \langle y_0, y_1, y_2 : \quad y_1 = (y_2 y_0 y_1 y_2)\, y_0\, (y_1 y_0 y_1 y_2)^{-1},$$
$$y_2 = (y_1 y_2 y_0 y_1)^{-1}\, y_0\, (y_1 y_2 y_0 y_1),$$
$$y_0 = ((y_2 y_0 y_1 y_2)^{-1} y_0^2 (y_2 y_0 y_1 y_2))\, y_0\, ((y_2 y_0 y_1 y_2)^{-1} y_0^2 (y_2 y_0 y_1 y_2))^{-1},$$
$$y_0 = ((y_1 y_2 y_0 y_1)^{-1} y_0^2 (y_1 y_2 y_0 y_1))\, y_0\, ((y_1 y_2 y_0 y_1)^{-1} y_0^2 (y_1 y_2 y_0 y_1))^{-1} \rangle_{\varphi_2}$$

③ $G_3 = \langle X_3, Y_3 : X_3^5 = Y_3^2,\ (Y_3 X_3^{-2})^3 X_3 = X_3(Y_3 X_3^{-2})^3,$
$\qquad (Y_3 X_3^{-2})^3 Y_3 = Y_3(Y_3 X_3^{-2})^3 \rangle_{\varphi_3^*}$

ここで，$z_0 = Y_3 X_3^{-2}$, $z_1 = X_3^{-2} Y_3$ とおくと、

$$G_3 = \langle z_0, z_1 : \quad z_1 = (z_1 z_0)^{-2}\, z_0\, (z_1 z_0)^2,$$

$z_0 = ((z_1 z_0 z_1)\ z_0^3\ (z_1 z_0 z_1)^{-1})\ z_0\ ((z_1 z_0 z_1)\ z_0^3\ (z_1 z_0 z_1)^{-1})^{-1} >_{\varphi_3}$

これら3つのknot groupに対し、

$$
\begin{aligned}
G = < t,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 :\ & \\
& t^{-1} a_i t = a_i \ (i = 0, 1, \cdots, 4) \\
& a_0 a_2 = a_1,\ \ a_1 a_3 = a_2,\ \ a_2 a_4 = a_3, \\
& a_3 a_0 = a_4,\ \ a_4 a_1 = a_0 \qquad >_{\varphi}
\end{aligned}
$$

を考えれば、例えば、次の写像f_iは、G_iからGへの同形写像をinduceする。

$f_1 : (x_0, x_1) \longrightarrow (a_1 a_0^{-1} a_1^{-1} t,\ a_1^{-1} a_0 t)$,

$f_2 : (y_0, y_1, y_2) \longrightarrow (a_0^{-2} a_1^{-1} t,\ a_2 a_0^{-2} a_1^{-1} t,\ a_3 a_0^{-2} a_1^{-1} t)$,

$f_3 : (z_0, z_1) \longrightarrow (a_0^2 a_1^{-1} a_0 t,\ a_0^3 a_1^{-1} a_0 t)$。

$x = \varphi f_1(x_0)$, $y = \varphi f_2(y_0)$, $z = \varphi f_3(z_0)$とし、$G_{11} = (G, x) \# (G, x)$, $G_{22} = (G, y) \# (G, y)$, $G_{33} = (G, z) \# (G, z)$, $G_{12} = (G, x) \# (G, y)$, $G_{23} = (G, y) \# (G, z)$, $G_{31} = (G, z) \# (G, x)$とする。$G_1$に関するpresentationから、$x^5 \in C(G)$, $x \notin C(G)$。よって、$\langle x \rangle \cap C(G) = \langle x^5 \rangle$, 同様に、$\langle y \rangle \cap C(G) = \langle y^2 \rangle$, $\langle z \rangle \cap C(G) = \langle z^3 \rangle$である。このことから、

$C(G_{11}) = <x^5>$, $C(G_{12}) = <x^{10}> = <y^{10}>$,

$C(G_{22}) = <y^2>$, $C(G_{23}) = <y^6> = <z^6>$,

$C(G_{33}) = \langle z^3 \rangle$, $C(G_{31}) = \langle z^{15} \rangle = \langle x^{15} \rangle$
となる。これらの$H_1(G_{ij})$での像が、全て異なることよりG_{ij}は全て同形でないことが解る。

よって、knot groupのcompositionには、weighted elementの指定が必要である。knot groupに対し、weighted elementの影響まで含めた(G, x)の対で考えることとする。そこで、compositionに対しても、$(G_1, x) \# (G_2, y) = (G, z)$, $G = *(G_1, G_2, \langle x \rangle, \langle y \rangle, \phi)$, $z = x = y$と改めて考えなおすことにする。

$\mathcal{G} = \{ (G, x) \mid G$はknot group, xはGのweighted element$\}$において、knot groupを考えることにしたのであるが、この$\mathcal{G}$の元に対しては、次の様なものは同一視するのが自然であろう。すなわち、(G, x), $(G', x') \in \mathcal{G}$に対し、GからG'への同形写像fで、$f(x) = x'$となるものが存在するとき、(G, x)と(G', x')は同値$(G, x) \sim (G', x')$とする。明らかにこれは、$\mathcal{G}$における同値関係である。$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} / \sim$とする。

$\mathcal{G}^*$の元を$(G, [x])$で記す。ここにGは、抽象群, $[x]$は、Gの自己同形写像によってxの像となり得る全てのGの元のつくるclassである。例えば、$[G, G]$が可換ならば、

$H_1(G)$ のgenerator t 及び t^{-1} の G での原像は全てweighted element である。すなわち、x を G のweighted element とすれば、$x[G,G] \cup x^{-1}[G,G]$ が G のweighted elementの全体となる。さらに、x を $x[G,G]$ の任意の元へ、$[G,G]$ の元は、同じ元へ対応をつければ、これは G の自己同形写像をinduceするので、$x[G,G] \subsetneqq [x]$、同様に、$x^{-1}[G,G] \subsetneqq [x^{-1}]$ となり、G のweighted element のつくるclass は、高高2つとなる。これが1つとなる為の必要十分条件は、x による G の内部自己同形写像を $[G,G]$ に制限したものを h とすれば、$[G,G]$ の自己同形写像 f で、$fhf^{-1} = h^{-1}$ を満足するものが存在することである。よって h のperiodが1，2の場合には $f = h^{-1}$ とすることにより、weighted element のclass は1つとなる。periodが1となるのは恒等写像だけであるから、h は内部自己同形写像。よって $[[G,G],[G,G]] = [G,G]$ でなければならず、これより、$[G,G] = 1$ を得る。すなわち、$G = \mathbb{Z}$。

(3.2) $(G_1, x) \sim (G_1', x')$，$(G_2, y) \sim (G_2', y')$ ならば $(G_1, x) \# (G_2, y) \sim (G_1', x') \# (G_2', y')$。

証明。

[5], p.207 の Cor. 4.4.4. より明らか。

（3.2）より、$(G_1,[x])$，$(G_2,[y])\in\mathcal{G}^*$に対し、$(G_1,[x])\#(G_2,[y])$がinduceされる。

（3.3）$(G,[z])=(G_1,[x])\#(G_2,[y])$ならば、$[G,G]=[G_1,G_1]*[G_2,G_2]$。

証明。

G_1，G_2はGの部分群であるから、$[G,G]\supseteqq[G_i,G_i]$ $(i=1,2)$。また、[5], p.201, Theorem 4.4より、$g\in G$は$g=z^d\nu_1\nu_2\cdots\nu_k$，$d$は整数，$\nu_i\neq 1$，$\nu_i\in[G_1,G_1]$又は$[G_2,G_2]$，$\nu_i$，$\nu_{i+1}$は同時に$[G_1,G_1]$又は、$[G_2,G_2]$に属さない，ようにuniqueに書ける。一方、$g\in[G,G]$と，$d=0$とは同値であるから、$[G,G]$の元は、その部分群$[G_i,G_i]$ $(i=1,2)$の元の積としてuniqueに表わせることになり結論を得る。

（3.3）より、次の3つのCorollaryを得る。

（3.4）$(G,[z])=(G_1,[x])\#(G_2,[y])$のL-polynomialは、$(G_1,[x])$と$(G_2,[y])$のL-polynomialの積に等しい。

証明。群Kに対し，$K'=[K,K]$，$K''=[K',K']$とすれば、（3.3）より、$G'/G''=(G_1'/G_1'')\oplus(G_2'/G_2'')$。$G_1'$，$G_2'$

への $H_1(G)$ のactionは、G_i' への $H_1(G_i)$ のactionと同じ。よって明らか。

(3.5) 全ての $(G,[x]) \in \mathcal{G}^*$ に対し、$(G,[x]) \# (K,[y]) = (G,[x])$ であることと、$(K,[y]) = (Z,[t])$ とは、同値である。

証明。

十分条件は明らか。必要条件を示す。$(G,[x])$ として $(Z,[t])$ をとれば、仮定より、$(Z,[t]) \# (K,[y]) = (Z,[t])$。$[Z,Z] = 1$ であるから、(3.3) より、$1 * [K,K] = 1$。故に、$K = 1$。

(3.6) $\mathcal{G}^*$ は、# に関して単位元 $(Z,[t])$ をもつ半群を構成する。

証明。

(3.5) により明らか。

$(G,[x]) = (G_1,[y]) \# (G_2,[z])$ ならば、必ず $(G_1,[y]) = (Z,[t])$ 又は、$(G_2,[z]) = (Z,[t])$ となる $(G,[x]) \in \mathcal{G}^*$ を prime と呼ぶ。(3.3) より次の proposition は明らか。

(3.7) knot group Gが、有限あるいは、nontrivialなcenterを含むcommutator subgroupをもつならば、$(G, [x])$はprimeである。

最後に次の問題を提起しておく、

[問題] H. Schubert [6]は、S^3における全てのknotはprime knotにuniqueに分解できることを示している。では、$\mathscr{G}^*$に対し、次のTheoremは成立するか。

Unique decomposition theorem. もし、$(G, [x])$がprimeの積として次の様に2通りに書けたとする。

$$\begin{aligned}(G, [x]) &= (G_1, [y_1]) \# \cdots \# (G_p, [y_p]) \\ &= (K_1, [z_1]) \# \cdots \# (K_q, [z_q]),\end{aligned}$$

このとき、$p = q$であり、$(G_i, [y_i])$, $(K_j, [z_j])$の間に、$(G_i, [y_i]) = (K_j, [z_j])$となる一対一の対応がつく。

References

[1] Cappel, S.E. and Shaneson, J.L., *There exist inequivalent knots with the same complement*, Ann. of Math., 103 (1976), 349 - 353.

[2] Gordon, C. McA, *Some higher dimensinal knots with the same homotopy groups*, Quat. J. Math., Oxford

(2), 24 (1973), 411-22.

[3] Hopf, H., Funcdamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comm. Math. Helv., 14 (1941), 257-309.

[4] Kervaire, M. A., On higher dimensional knots, Diff. and Comb. Topology, edited by S. S. Cairns, Princeton Univ. Press. (1965), 105-119.

[5] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, Interscience Pub. New York (1966).

[6] Schubert, H., Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, Sitz. der Heidelberger Akad., Math. Natur. Klasse, 3 (1949), 57-104.

[7] Yajima, T., On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space, Jour. of Math., Osaka City Univ., 13 (1962), 63-71.

[8] Yajima, T., On a charactorization of knot groups of some spheres in R^4, Osaka J. of Math., 6 (1969), 435-46.

[9] Yajima, T., Wirtinger presentations of knot groups, Proc. of Japan Acad., 46 (1970), 997-1000.