数理解析研究所講究録
第 297 巻 1977 年 117-122

Braids と Links について

神大 理学部 丸本嘉彦

E.C.Zeeman [5] は codim $\geqq 3$ の時 すべての knot は unknot であることを示した。 $L=(S^n, \bigcup_{j=1}^{r} S_j^{k})$ を link とするとき, $2n \geqq 3k+4$ の時 link L は linking number のみで決定されることが知られている ([1], [3], [4])

ここでは link を braid に置き換えた時, 得られる結果を述べ, それの link に対しての応用を述べる。

定理 1 $\mathcal{B}$ を $(n: p_1, p_2, \cdots, p_r)$-braid とし, $n-p_j \geqq 3$ $(j=1,2,\cdots,r)$ とする。すると $\mathcal{B}$ は unknotted である。

定義(1) 次の条件を満たす時, $\mathcal{B}=(B^n, \bigcup_{j=1}^{r} B_j^{p_j})$ を $(n; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-braid と呼ぶ。

$$\begin{cases} \text{(i)} \ p_j\text{-ball } B_j^{p_j} \text{ は } n\text{-ball } B^n \text{ に locally flat に embed されている.} \\ \text{(ii)} \ j=1,2,\cdots,r \text{ に対して } \quad B_j^{p_j} \cap \partial B^n = \partial B_j^{p_j} \end{cases}$$

定義(2) $\mathcal{B}_i=(B^n, \bigcup_{j=1}^{r} B_{ij}^{p_j})$ を $(n; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-braid とする $(i=1,2)$

次を満たす時，$\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ が <u>equivalent</u> であると呼ぶ：

level preserving homeomorphism $h: B^n \times I \longrightarrow B^n \times I$ （ただし $I=[0,1]$）

が存在して，次を満たす，

(i) $h(x, 0) = (x, 0)$ for $x \in B^n$

(ii) $h(B_{1j}^{p_j}, 1) = (B_{2j}^{p_j}, 1)$ for $j = 1, 2, \cdots, r$.

<u>定義(3)</u> $\Delta(n, p)$ は $(\Sigma^{n-p}\Delta^p, \Delta^p)$ を表わす，ただし Δ^p は standard p-simplex，Σ^{n-p} は $(n-p)$-fold suspension のことである。

<u>定義(4)</u> $(n; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-braid $\mathcal{B} = (B^n, \bigcup_{j=1}^{r} B_j^{p_j})$ が <u>unknotted</u> であるとは 次の条件を満たすような mutually disjoint n-balls B_j^n が B^n の中に存在する時である：

(i) $B_j^n \cap \partial B^n$ は $(n-1)$-ball である，

(ii) $B_j^{p_j} \subset B_j^n$ であり，$(B_j^n, B_j^{p_j})$ と $\Delta(n, p_j)$ は equivalent である。$(j = 1, 2, \cdots, r)$

定理１の証明のために，次の補題を証明する。

<u>補題２</u> $\mathcal{B} = (B^n, \bigcup_{j=1}^{r} B_j^{p_j})$，$\mathcal{B}' = (B^{n+1}, \bigcup_{j=1}^{r} B_j^{p_j+1})$ をそれぞれ，$(n; p_1, \cdots, p_r)$，$(n+1; p_1+1, p_2+1, \cdots, p_r+1)$-braid とする。すべての j に対して，$n - p_j \geq 3$ の時，次が成り立てば $\mathcal{B}$ は unknotted である。

$$\begin{cases} \text{(i)} \ B^n \subset \partial B^{n+1} \\ \text{(ii)} \ B_j^{p_j} = B^n \cap B_j^{p_j+1} \quad \text{for } j = 1, 2, \cdots, r. \end{cases}$$

[補題2の証明]　x_j を $\partial B_j^{p_j+1} - B_j^{p_j}$ 内の一点，y を $\partial B^{n+1} - (B^n \cup \bigcup_{j=1}^{r} B_j^{p_j+1})$ の中の一点とし，α_j を x_j と y を結ぶ次を満たす simple arc とする：(i) $\alpha_j \subset \partial B^{n+1} - B^n$　(ii) $\alpha_j \cap \alpha_k = \{y\}$ if $j \neq k$，(iii) $\mathrm{int}\,\alpha_j \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i^{p_i+1} = \phi$。

$T = \bigcup_{j=1}^{r} \alpha_j$ とすると，T は collapsible である。ここで $U_j = N(x_j ; B^{n+1})$，$V = N(T ; B^{n+1})$ をそれぞれ，x_j と T の B^{n+1} における regular neighbourhood meeting the boundary regularly とする。すると U_i，V は (n+1)-balls である。このとき，$\tilde{B}^n = cl(\partial V - \partial B^{n+1})$，$\tilde{B}_j^{p_j} = \tilde{B}^n \cap B_j^{p_j+1}$，$\tilde{U}_j = U_j \cap \tilde{B}^n$ とする。すると $\tilde{B}^n$ は n-ball，$\tilde{B}_j^{p_j}$ は p_j-ball，$\tilde{U}_j$ は n-ball となる。さらに，$\tilde{B}_j^{p_j} \cap \partial \tilde{B}^n = \partial \tilde{B}_j^{p_j}$，$\tilde{B}_j^{p_j} \cap \tilde{B}_k^{p_k} = \phi$ if $j \neq k$ となる，つまり，$\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{B}^n, \bigcup_{j=1}^{r} \tilde{B}_j^{p_j})$ は $(n ; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-braid である。ここで，$\tilde{U}_j$ の作り方から，$\tilde{U}_j \cap \partial \tilde{B}^n$ は (n-1)-ball となる。Zeeman's Unknotting Theorem [5] より，$(\tilde{U}_j, \tilde{B}_j^{p_j})$ は $\Delta(n, p_j)$ と equivalent になる。すなわち，$\tilde{\mathcal{B}}$ は unknotted である。$\tilde{\mathcal{B}}$ の作り方より，$\mathcal{B}$ と $\tilde{\mathcal{B}}$ は concordant である。すると Hudson の結果より [2]，$\mathcal{B}$ と $\tilde{\mathcal{B}}$ は equivalent である。すなわち，$\mathcal{B}$ は unknotted となる。

[定理1の証明]　$\mathcal{B} = (B^n, \bigcup_{j=1}^{r} B_j^{p_j})$ を $(n ; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-braid とし，$n - p_j \geq 3$ for $j = 1, 2, \cdots, r$ とする。このとき，$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \times I = (B^n \times I, \bigcup_{j=1}^{r} (B_j^{p_j} \times I))$ とおく。すると補題2の条件を満足することは

容易に確かめられる。すなわち $\mathfrak{B}$ は unknotted となる。

<u>定義(6)</u>　$\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，以下の様な notations を定義する：

$$\mathbb{R}^{n-1}[a \leq x_n \leq b] = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_n \leq b\},$$

$$\mathbb{R}^{n-1}[x_n = a] = \mathbb{R}^{n-1}[a \leq x_n \leq a],$$

$$\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}[0 \leq x_n < \infty).$$

<u>定義(7)</u>　i)　$\bigcup_{j=1}^{r} S_j^{p_j}$ を $\mathbb{R}^n$ における locally flat な disjoint union of spheres とするとき，$L = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^{r} S_j^{p_j})$ を <u>$(n; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-link</u> と呼ぶ。

ii)　link L の各 component が disjoint な ball を bound するとき，L は <u>trivial</u> であるという。

iii)　$L_i = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^{r} S_{ij}^{p_j})$ を link とする $(i=1,2)$。

h ~~様~~ $\mathbb{R}^n$ の orientation preserving auto-homeomorphism であって，各 j に対して $h|S_{1j}^{p_j}$ がまた $S_{1j}^{p_j}$ から $S_{2j}^{p_j}$ への orientation preserving homeo. であるような h が存在するとき，L_1 と L_2 は <u>equivalent</u> であるという。

<u>定理3</u>　$L = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^{r} S_j^{p_j})$ を $(n; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-link として，$n - p_j \geq 3$ for $j = 1, 2, \cdots, r$ と仮定する。このとき，L と equivalent な $(n; p_1, \cdots, p_r)$-link $L' = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^{r} K_j^{p_j})$ で次を満たすものが

存在する：

(1) $\bigcup_{j=1}^{r} K_j^{p_j} \subset \mathbb{R}^{n-1}[0 \leq x_n \leq 1]$,

(2) $\left(\mathbb{R}^{n-1}[x_n=t] , \bigcup_{j=1}^{r}\left(K_j^{p_j} \cap \mathbb{R}^{n-1}[x_n=t]\right)\right)$ は trivial $(n-1; p_1-1, p_2-1, \cdots, p_r-1)$-link である（ただし $0<t<1$）,

(3) $\bigcup_{j=1}^{r} K_j^{p_j} \cap \mathbb{R}^{n-1}[x_n=t]$ は disjoint union of balls である（ただし $t=0$ or 1）。

[証明]

$\bigcup_{j=1}^{r} S_j^{p_j} \subset \mathbb{R}^{n-1}[1 \leq x_n \leq 2]$ と仮定しても一般性を失わない。x_i を a point in $S_i^{p_i}$, y_i を a point of $\mathbb{R}^{n-1}[x_n=0]$, α_i は x_i と y_i を結ぶ simple arc で次を満たすようにする：

$$\alpha_i \subset \mathbb{R}^n_+ , \quad \alpha_i \cap \bigcup_{j=1}^{r} S_j^{p_j} = \{x_i\} , \quad i \neq k \Rightarrow \alpha_i \cap \alpha_k = \phi .$$

すると，次を満足するような embedding $f_j : B^{p_j} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ が存在する：(1) $f_j(B^{p_j} \times I) \subset N(\alpha_j ; \mathbb{R}^n_+)$

(2) $f_j(B^{p_j} \times I) \cap S_j^{p_j} = f_j(B^{p_j}, 1) = N(x_j ; S_j^{p_j})$

(3) $f_j(B^{p_j} \times I) \cap \mathbb{R}^{n-1}[x_n=0] = f_j(B^{p_j}, 0) \subset N(y_j ; \mathbb{R}^{n-1}[x_n=0])$.

すると $(S_j^{p_j} \cup f_j(\partial B^{p_j} \times I)) - \operatorname{int} N(x_j ; S_j^{p_j})$ は p_j-ball となり，この p_j-ball を $B_j^{p_j}$ とし，$\tilde{S}_j^{p_j} = B_j^{p_j} \cup f(B^{p_j}, 0)$ とすると $\tilde{S}_j^{p_j}$ は p_j-sphere である。すると $\tilde{L} = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^{r} \tilde{S}_j^{p_j})$ は L と equivalent な $(n ; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-link である。

$\mathcal{B} = (\mathbb{R}^n_+, \bigcup_{j=1}^{r} B_j^{p_j})$ とすると，$\mathcal{B}$ は $(n ; p_1, p_2, \cdots, p_r)$-braid である。よって定理1より，orientation preserving auto-homeo h of $\mathbb{R}^n_+$

が存在して，次の条件を満足する：

(1) $h(B_j^{p_j}) \subset \mathbb{R}^{n-1}[0 \leq x_n \leq 1]$ for $j=1,2,\cdots,r$,

(2) $\left(\mathbb{R}^{n-1}[x_n=t],\ \bigcup_{j=1}^{r}(h(B_j^{p_j}) \cap \mathbb{R}^{n-1}[x_n=t])\right)$ は trivial $(n-1;p_1-1,\cdots,p_r-1)$-link である（ただし $0 \leq t < 1$）

(3) $\bigcup_{j=1}^{r} h(B_j^{p_j}) \cap \mathbb{R}^{n-1}[x_n=1]$ は disjoint union of balls である。

すると，h は容易に $\mathbb{R}^n$ 全体の orientation preserv. auto-homeo. に拡張でき，それを $\tilde{h}$ とする。ここで $K_j^{p_j} = \tilde{h}(\tilde{S}_j^{p_j})$ とおけば，$K_j^{p_j}$ は p_j-sphere となり，$K_j^{p_j}$ に $\tilde{S}_j^{p_j}$ から $\tilde{h}$ によって induce される orientation を入れることにより，$L' = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^{r} K_j^{p_j})$ は $\tilde{L}$ と equivalent な $(n;p_1,\cdots,p_r)$-link となり，結局，L と L' は equivalent である。L' が求める条件を満していることは明らかである。

References

[1] A. Haefliger ; Differential links, Topology 1 (1962) 241-244.

[2] J. F. P. Hudson ; Concordance, isotopy and diffeotopy, Ann. Math 91 (1970)

[3] K. Kobayashi ; On a p.l link isotopy group, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 22 (1972) 79-98

[4] E. C. Zeeman ; Isotopies and knots in manifold, Topology of 3-manifolds

[5] ________ ; Unknotting combinatorial balls, Ann. Math. 78 (1963)