数理解析研究所講究録
第 297 巻 1977 年 141-146

小林氏の問題について

神戸大・教養　池田裕司
東洋大・工　山下正勝

§1. 序

小林一章氏は「$b(M)=3$ なる4次元PL閉多様体 M^4 は homology と向き付け可能性でどこまで分類できるか」という問題を提起された。もしも「そのような M^4 は（PL同相の意味で）一意である」ことが分かれば最終的な分類を得たことになる。$b(M)$ の正確な定義は [1] を参照して欲しいが、乱暴に言えば「M を cover するのに必要な4-balls の最小数」のことである。$b(M)=3$ なる4次元閉多様体 M^4 には、$b(W)=2$ なる4次元多様体 W^4, $\dot{W}^4\neq\emptyset$, が

$$W^4=M^4-\mathring{B}^4,\quad B^4 \text{ は } M^4 \text{ 内の 4-ball},$$

という相互関係によって、1対1に対応する。こゝでは次の4つの条件：

(1)　$b(W)=2$,

(2)　$\dot{W}=S^3$,

(3) $H_1(\overline{W}) = p\mathbb{Z}$,

(4) $H_2(\overline{W}) = \mathbb{Z}$

を満足する connected compact bounded PL 4-manifold $\overline{W}^4$ の全体 $\overline{C}(p,1)$ について知り得た結果を報告する．主な結果は次の2つである．

定理1. $\overline{W}_p \in \overline{C}(p,1)$ の内部から 4-ball D^4 の内部を取り除き，2つの3-spheres $\dot{D}^4$ と $\dot{\overline{W}}_p$ を 1-handle $I \times D^3$ でつないで得られる $\overline{W}_{p+1}$，すなわち，

$$\overline{W}_{p+1} = (\overline{W}_p - \mathring{D}^4) \cup I \times D^3$$

$$\text{such that} \quad (\overline{W}_p - \mathring{D}^4) \cap (0,1) \times D^3 = \emptyset, \quad \dot{D}^4 \supset 0 \times D^3, \quad \dot{\overline{W}}_p \supset 1 \times D^3$$

は $\overline{C}(p+1,1)$ の元である．逆に $\overline{C}(p+1,1)$ のすべての元は $\overline{C}(p,1)$ の或る元から上のようにして作られる．

定理2. 任意の多様体 $\overline{W}_p \in \overline{C}(p,1)$，$p \geq 0$，は

$$(S^1_1 \vee \cdots \vee S^1_p) \vee S^2 \vee (S^3_1 \vee \cdots \vee S^3_p)$$

の形の spine を持つ．

以下でこれらの定理を示す手順の概要を述べる．

§2. Key Theorem.

$\overline{W} \in \overline{C}(p.1)$は2つの 4-balls A, B で

$$\overline{W} = A \cup B,$$

$$A \cap B = \dot{A} \cap \dot{B} = 3\text{次元多様体}$$

とあらわされる。このとき3次元多様体

$$F = A \cap B$$

は $(p+1)$ 個の連結成分 $F_0, F_1, \cdots, F_p$ で

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_p$$

とあらわされる。 $(A, B; F)$ を $\overline{W}$ の実現と呼ぶことにしよう。p 個の F_i $(i \neq 0)$ は何れも 3-ball から何個かの小さい 3-balls を取り除いたものである。 F_0 の形はすぐには分らないが、その境界 $\dot{F}_0$ の形は唯1個の torus $S^1 \times S^1$ と何個かの 2-spheres の和で

$$\dot{F}_0 = S^1 \times S^1 + (S^2_0 + \cdots + S^2_r)$$

とあらわされることが分かる。但し r は 0 かも知れない。実を言うと、$r \geq 1$ であって欲しいのだが、勝手に $\overline{W}$ の実現を取るとそうはならない。

$\dot{\overline{W}} = S^3$ だから $\overline{W}$ に 4-ball C をはりつけた4次元閉多様体 $\hat{W}$ を考える。すなわち

$$\hat{W} = A \cup B \cup C, \quad \overline{W} \cap C = \dot{\overline{W}} = \dot{C}.$$

そのとき $\overline{W}$ の実現として

$$(A, B; A\cap B),\ (B, C; B\cap C),\ (C, A; C\cap A)$$

の3つが自然に考えられる. この3つのうち1つが我々の望む条件"$r\geq 1$"を保障してくれる.

さて再び実現 $(A, B; F)$ について話を進めよう. F_0 は connected で $F_0 \subset S^3$ (=たとえば $\dot{A}$) であるから F_0 は knot の exterior から r 個の 3-balls を取り除いたものである. いまこの取り除かれた 3-balls をそっくりそのまゝ埋め直したものを $\hat{F}_0$ とする. すなわち,

$$\hat{F}_0 = F_0 \cup (D^3_1 + \cdots + D^3_r),$$

$$F_0 \cap D_j = S^2_j, \quad D_i \cap D_j = \phi \ (i \neq j)$$

である. そのとき $\hat{F}_0$ は knot の exterior そのものである. この $\hat{F}_0$ が trivial knot の exterior (すなわち solid torus) であれば都合がよいが一般には分らない. ところが先程の $\overline{W}$ の3つの実現

$$(A, B; A\cap B),\ (B, C; B\cap C),\ (C, A; C\cap A)$$

のうちから好都合なものを捜しだすことができる. すなわち

Key Theorem. $\overline{W} \in \mathcal{T}(p, 1)$, $p \geq 1$, の実現 $(A, B; F)$ として, $r \geq 1$ かつ $\hat{F}_0$ が (3-sphere $\dot{A}$ の中で trivial な)

solid torus であるようなものがとれる．

この結果から homology の rank 等を調べることにより，F_i $(i=1,\cdots,p)$ のうちの1つ，たとえば F_p，が 3-ball そのものであることが分かる．この 3-ball F_p を用いて $\overline{W}$ を surgery すれば $\overline{W}_{p-1} \in \overline{C}(p-1,1)$ が得られる．その手順を次で示そう．

§3. $\overline{W}_p \in \overline{C}(p,1)$ の surgery.

今までの $\overline{W} \in \overline{C}(p,1)$ をこゝでは $\overline{W}_p$ と書くことにする．$(A,B;F)$ を F_p が 3-ball であるような $\overline{W}_p$ の実現とする．そのとき

$$\overline{V} = \overline{\overline{W}_p - N(F_p,\overline{W}_p)}$$

を考える．こゝに $N(F_p,\overline{W}_p)$ は F_p の $\overline{W}_p$ での正則近傍である．$\dot{\overline{V}}$ は丁度2つの 3-spheres から成り立っていることが (3,2)-Schoenflies Th. から分かるから，そのうちの1つに 4-ball D^4 を attach してふさいでしまう．すなわち，

$$\overline{W}_{p-1} = \overline{V} \cup D^4,$$

$$\overline{V} \cap D^4 = \dot{\overline{V}} \cap \dot{D}^4 = 3\text{-sphere}.$$

そのとき $\overline{W}_{p-1} \in \mathcal{C}(p-1,1)$ であることが分かる. この操作を逆に見てゆけば冒頭で述べた2つの定理が得られる.

文献

[1] Kobayashi, K. and Tsukui, Y., The ball coverings of manifolds, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976) 133-143.