数理解析研究所講究録
第 298 巻 1977 年 16-39

温度差をもつ回転同軸円筒間に於ける流体運動の最初の枝分かれについて

名大・教養・数学　　竹下 彬

節1. 序. 我々は此の小論で、外側は熱せられ内側は冷却された回転する２つの同軸円筒間に於ける圧縮性流体の熱対流の問題を取り扱う。扱う問題の設定は次の通り。半径が $R_1 < R_2$ の直立した２つの回転円筒が同一の角速度 ω で回転しており、かつ、内外の円筒はそれぞれ一定の温度 $T_1, T_2\ (> T_1)$ に保たれており、圧縮性粘性流体がその間の領域で運動しているという状況を考える。此の設定の下にパラメーター $R_i, \omega, T_i\ (i=1,2)$ のすべての値に対して、以下で自明な運動と呼ぶ事にする所謂、剛体的運動が存在する。即ち，流体は回転する円筒と共にあたかも剛体であるかの様に運動する。しかし，此の運動を２円筒と共に回転する座標系から見れば，回転の結果遠心力及びコリオリ力が生じている。一方で２円筒の温度差より流体の質量密度に非均質性が生じており、従って浮力が生じる。

従ってBénard問題に於ける様な熱対流が生じる事が期待される(即ち 運動方程式の定常解(自明な運動に対応する解)の非一意性)。 此の事を証明するのが此の小論の目的である。 此の問題は大気中の所謂ジェット気流に対する一模型である。 これについては K. Gotoh [5] を参照されたい。

此処で此の小論に於ける仮定，立場について 2，3 の事を明確にしておきたい。

(1) 流れを2次元流に限る事。

(2) 熱流体力学の基礎方程式にBoussinesq 近似を施して得られる所謂 Oberbeck－Boussinesq方程式を基礎方程式として採用し、その後では如何なる近似，項の無視も行わない。 (マントル対流のパターン形成に関するBusseの最近の論文参照。 そこでは3次以上の非線型項が無視されている。)

(3) 定常解の範囲での枝分かれに議論を制限する事(後に本論で証明する定常解の枝分かれの以前に既に Hopf型 の枝分かれが起こっている可能性は調べる事が出来なかった)。

(4) 非線型偏微分方程式の解の非一意性の証明の数学的技法の説明に叙述の重点を置く事。

此の問題は、京都大学数理解析研究所の後藤金英先生に教えて戴いたものである。問題を教えて戴き、かつ有益な助言を下さった後藤先生に感謝します。

節2. Lyapounov－Schmidt 方程式, Morse の補題

$\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ を実 Hilbert 空間とし $\mathcal{N} : \mathbb{R}^1_\lambda \oplus \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ を滑らかな写像で $\mathcal{N}(\lambda, 0) = 0$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ とする。$\mathcal{L}(\lambda) : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ を $\mathcal{N}$ の $X \in \mathbf{E}$ に関する $\mathcal{N}$ の $(\lambda, 0)$ に於ける Fréchet 微分とする。即ち $\mathcal{N}(\lambda, X) - \mathcal{N}(\lambda, 0) = \mathcal{L}(\lambda) X + o(\|X\|)$. $\lambda \neq \lambda_c$ で $\mathcal{L}(\lambda)$ は同型かつ、$\lambda = \lambda_c$ で $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda_c) = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathcal{L}(\lambda_c) = 1$ とする。$\mathbf{E}_1 = \operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda_c)$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1^\perp$, (直交補空間), $\mathbf{F}_2 = \operatorname{Im} \mathcal{L}(\lambda_c)$, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2^\perp$, P_i, Q_i を $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ から $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{F}_i$ $(i = 1, 2)$ への直交射影とする。方程式

$$\mathcal{N}(\lambda, X) = 0 \tag{1}$$

を考える。これは

$$Q_i \mathcal{N}(\lambda, X) = 0 , \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

と同等である。$\mathbf{E}_1$ の基底を X_0 とすると任意の $X \in \mathbf{E}$ は $X = \xi X_0 + Y$ 但し $Y \in \mathbf{E}_2$, $\xi \in \mathbb{R}$ と一意的に表わされる。写像 $Q_2 \mathcal{N}(\lambda, \xi X_0 + Y) : \mathbb{R}^1_\lambda \oplus \mathbb{R}^1_\xi \oplus \mathbf{E}_2 \longrightarrow \mathbf{F}_2$ を考えると此の写像の Y に関する $(\lambda_c, 0, 0)$ に於ける

Fréchet微分 $E_2 \to F_2$ は同型である。従って陰関数の定理により $(\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^2$ の E_2-値関数 $Y(\lambda, \xi)$ が $(\lambda_c, 0)$ の近傍で一意に存在し，$Q_2\mathcal{N}(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)) = 0$，かつ $Y(\lambda_c, 0) = 0$。此の $Y(\lambda, \xi)$ を残る方程式により，即ち $Q_1\mathcal{N} = 0$ となる様に決める。$Q_1\mathcal{N} = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{N} \in F_2$ かつ $F_2 = (\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}(\lambda_c)^*)^\perp$，（但し $\mathcal{L}(\lambda_c)^* : F \to E$ は $\mathcal{L}(\lambda_c)$ の共役作用素）に注意すれば，$\hat{X}_0$ を $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}(\lambda_c)^*$ の基底とする時，結局

$$Q_1\mathcal{N}(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)) = 0 \Longleftrightarrow (\mathcal{N}(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)), \hat{X}_0)_F = 0$$

となる。$h(\lambda, \xi) = (\mathcal{N}(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)), \hat{X}_0)_F$ とおく。$h(\lambda, \xi) = 0$ の解 (λ, ξ) が $\mathcal{N} = 0$ の解 $\xi X_0 + Y(\lambda, \xi)$ を与える。　<u>注.</u> $h(\lambda, 0) = 0$ は常に満たされておりこれが自明な解 0，$\mathcal{N}(\lambda, 0) = 0$ を与える。方程式

$$(\mathcal{N}(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda, \xi)), \hat{X}_0)_F = 0 \qquad (3)$$

が此の場合の *Lyapounov - Schmidt* 方程式である。

<u>Morse の補題</u>　$h = h(\lambda, \xi)$ を $(\lambda, \xi) = (\lambda_c, 0)$ の近傍で定義された滑らかな関数とする。$h(\lambda_c, 0) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda_c, 0) = \frac{\partial h}{\partial \xi}(\lambda_c, 0) = 0$ かつ，Hessian matrix

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2}(\lambda_c, 0) & \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda \partial \xi}(\lambda_c, 0) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda \partial \xi}(\lambda_c, 0) & \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(\lambda_c, 0) \end{bmatrix}$$

の指数が (1, 1) ならば $(\lambda_c, 0)$ の近傍の座標変換 $(\lambda, \xi) \longrightarrow \lambda', \xi'$ が存在して $\lambda'(\lambda_c, 0)=0$, $h=\lambda'^2-\xi'^2$ が成立する。

注. 本論で後に扱う我々の場合にはHは

$$H=\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & * \end{bmatrix}, \quad a<0 \tag{4}$$

の形となり，従って指数は (1, 1) となり， $h(\lambda, \xi)=0$ は (λ, ξ) 平面で直線 $\xi=0$ (自明な解に対応) 及び $(\lambda_c, 0)$ に於いて $\xi=0$ と横断的に交わる曲線の２つからなる。 後者が非自明な解を与える (熱対流解)

節3. 問題の設定とBoussinesq近似

２次元ユークリッド空間 E_2 に於いて我々は２つの座標系，即ちデカルト座標系 $x=(x_1, x_2)$ 及び 極座標系 $x=(r, \theta)$ を用いる。 e_1, e_2 ; e_r, e_θ で E_2 上のベクトル場で、各点で長さが１でかつ x_1, x_2 ; r, θ ー方向のものを表わす。 E_2 上のベクトル場 u は $u=u_1e_1+u_2e_2$ $=u_re_r+u_\theta e_\theta$ と分解されるが，此の時 $u=(u_1, u_2)$ $=(u_r, u_\theta)$ などとも書くことにする。

$\Omega=\{x=(r, \theta); R_1<r<R_2\}$ とおく。 採用する基礎方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho u) = 0 & (5) \\ \frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\mu}{\rho}\Delta u - \nabla_u u + (\lambda + \frac{\mu}{3}) grad \cdot div\, u - \frac{1}{\rho} grad\, p & (6) \\ \frac{\partial}{\partial t}T = \kappa \Delta T - \nabla_u T & (7) \\ u|_{r=R_i} = R_i \omega e_\theta \,,\ T|_{r=R_i} = T_i,\ i=1,2. & (8) \end{cases}$$

である。但し，u：速度ベクトル，ρ：質量密度，p；圧力，T；温度分布，μ；粘性係数，λ；才２粘性係数，κ；熱伝導係数，ω；円筒の回転角速度，$T_1(T_2)$；内(外)側の温度である。これにBoussinesq近似を施すと，

$$\begin{cases} div\, u = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\mu}{\rho_1}\Delta u - \nabla_u u - \{1 + \chi(T - T_1)\} r e_r - \frac{1}{\rho_1} grad\, p \\ \frac{\partial}{\partial t}T = \kappa \Delta T - \nabla_u T \\ u|_{r=R_i} = R_i \omega e_\theta \,,\ T|_{r=R_i} = T_i,\ i=1,2. \end{cases}$$

が得られる。但しρ_1は温度T_1に於ける質量密度で，χは体積膨張率である。無次元化を行い，かつ円筒と共に回転する座標系から見た方程式は（$(1-\chi T_1) r e_r$ は圧力項に組み入れて）

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u - \nabla_u u + 2(u_\theta e_r - u_r e_\theta) + r e_r - \lambda r T e_r - grad\, p, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T = \frac{1}{\mathcal{P}}\Delta T - \nabla_u T - \frac{\alpha}{r}u_r \quad (10)$$

$$div\, u = 0 \quad (11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \,,\ T|_{\partial\Omega} = 0 \quad (12)$$

但し $\Omega=\{x=(r,\theta);1<r<R_0\}$, 又 Tは本来のTから剛体運動に対応する$\tilde{T}=\alpha\log r+\beta$を減じたものである。又 $\mathcal{R}=R_1^2\omega/\nu$, $\nu=\mu/\rho_1$, $\lambda=\chi(T_2-T_1)$, $\mathcal{P}=R_1^2\omega/k$, $R_0=R_2/R_1$, $\alpha=1/\log R_0$, $\beta=T_1/(T_2-T_1)$とする。遠心力 $r\mathbf{e}_r$ は圧力項に組み入れられ，又コリオリ力 $2(u_\theta\mathbf{e}_r-u_r\mathbf{e}_\theta)$ も線積分 $\pi=\int_\gamma(u_\theta dr-ru_r d\theta)$ を考えれば同様であることが判る。よって以下では此等の項は省略して良い。

節4. 関数解析による定式化

我々は次の定常方程式

$$
\begin{cases}
\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u-\nabla_u u-\lambda rT\mathbf{e}_r-\mathrm{grad}\,p=0 & (13)\\
\frac{1}{\mathcal{P}}\Delta T-\nabla_u T-\frac{\alpha}{r}u_r=0 & (14)\\
\mathrm{div}\,u=0 & (15)\\
u|_{\partial\Omega}=0,\ T|_{\partial\Omega}=0. & (16)
\end{cases}
$$

の自明な解 $(u,T,p)=(0,0,0)$の枝分かれの可能性を調べる。節2のプログラムが適用出来る様にする為に以下の様に関数解析的定式化を行う。以下で用いる関数空間はすべて実数値関数，実ベクトル場より成るものとする。$C_0^\infty\equiv C_0^\infty(\Omega)$, $H^m\equiv H^m(\Omega)$ (m階のL_2−Sobolev空間), $L_2\equiv L_2(\Omega)$ は通常の通り。又，$\dot{H}^m\equiv\dot{H}^m(\Omega)\overset{\mathrm{def}}{=}$ closure of C_0^∞ in H^m.

又 $\mathbf{H}^m \equiv \mathbf{H}^m(\Omega)$ (resp. $\dot{\mathbf{H}}^m \equiv \dot{\mathbf{H}}^m(\Omega)$, $\mathbf{C}_0^\infty \equiv \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$) $= \{\mathbf{u} = \sum_1^2 u_i \mathbf{e}_i \,;\, u_i \in H^m$ (resp. $\dot{H}^m$, C_0^∞)$\}$ とおく。 又 $\mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty \equiv \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty \,;\, \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}$ とする。 $\mathbf{H}^m$には自然な内積 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_m = \sum_1^2 \sum_{1 \le |\alpha| \le m} \int_\Omega D^\alpha u_i(x) D^\alpha v_i(x)\,dx$ が与えられている。 そのノルムを $\|\cdot\|_m$ とかく。 又 $(\ ,\ ) = (\ ,\ )_0$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_m$ とする. $\mathbf{L}_{2,\sigma} \equiv \mathbf{L}_{2,\sigma}(\Omega) \overset{\text{def.}}{=}$ closure of $\mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty$ in $\mathbf{L}_2$ とし $\mathbf{L}_{2,\pi}$ で $\mathbf{L}_{2,\sigma}$ の $\mathbf{L}_2$ に於ける直交補空間を表わす (但し $\mathbf{L}_2 = \mathbf{H}^0$)。 P_σ, P_π で $\mathbf{L}_2$ から $\mathbf{L}_{2,\sigma}, \mathbf{L}_{2,\pi}$ への直交射影を表わす. 次の補題は良く知られている。(例えば *Ladyzhenskaya* [12])。

<u>*Lemma 1*</u>. $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2$ に対して

$$\begin{cases} (1)\ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_{2,\sigma} \Longleftrightarrow \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega \text{ かつ } \mathbf{u} \text{ の } \partial\Omega \text{ に於ける} \\ \qquad\qquad \text{法線成分} \left(\in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right) = 0 \\ (2)\ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_{2,\pi} \Longleftrightarrow p \in H^1(\Omega) \text{ が存在して } \mathbf{u} = \operatorname{grad} p. \end{cases}$$

次に Stokes 作用素 $A : \mathcal{D}(A)(\subset \mathbf{L}_{2,\sigma}) \longrightarrow \mathbf{L}_2$, 及び作用素 $B : \mathcal{D}(B)(\subset L_2) \longrightarrow L_2$ を $\mathcal{D}(A) = \mathbf{H}^2 \cap \dot{\mathbf{H}}^1 \cap \mathbf{L}^2_\sigma$, $\mathcal{D}(B) = H^2 \cap \dot{H}^1$, $A\mathbf{u} = -P_\sigma \Delta \mathbf{u}$, $BT = -\Delta T$ で定義する。 此の時明らかに $A\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow$「$\Delta\mathbf{u} = \operatorname{grad} p$ となる。 $p \in H^1(\Omega)$ が存在しかつ $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ となる」 が成立する (*Lemma 1*). 此等の設定の下に我々の方程式系 (13)−(16)は

$\mathbf{L}_{2,\alpha} \oplus \mathsf{L}_2$ に於ける非線型方程式

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} A\mathbf{u} + P_\sigma \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + \lambda P_\sigma (r T \mathbf{e}_r) = 0 & (17) \\ \frac{1}{\mathcal{P}} BT + \nabla_{\mathbf{u}} T + \frac{\alpha}{r} u_r = 0 & (18) \end{cases}$$

に帰着される。

<u>*Lemma 2.*</u> A, B strictly positive な自己共役作用素である。

以下我々は $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}(B)$ をグラフ位相による内積 $\langle\!\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\!\rangle = (A\mathbf{u}, A\mathbf{v})$, $\langle\!\langle S, T \rangle\!\rangle = (BS, BT)$ の与えられた Hilbert 空間と見なす事とする。次に $\mathbf{E} = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B)$, $\mathbf{F} = \mathbf{L}_{2,\alpha} \oplus \mathsf{L}_2$ とし非線型作用素 $\mathcal{N} : \mathbb{R}^1_\lambda \oplus \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ を

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{u} \\ T \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{R}} A\mathbf{u} + P_\sigma(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}) + \lambda P_\sigma (r T \mathbf{e}_r) \\ \frac{1}{\mathcal{P}} BT + \nabla_{\mathbf{u}} T + \frac{\alpha}{r} u_r \end{bmatrix}$$

で定義する。

以下簡単の為に <u>λ のみ variable parameter, $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$, α は fixed parameters とする</u>。又 $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\lambda, \mathbf{u}, T)$ とも又 $\mathbf{X} = (\mathbf{u}, T)$ として $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\lambda, \mathbf{u}, T) = \mathcal{N}(\lambda, \mathbf{X})$ などとも書く事にする。$\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\lambda\lambda}$, $\cdots$ (resp. $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$, $\cdots$) で $\mathcal{N}$ の λ (resp. $\mathbf{X}$) に関する微分を表わす。直ちに

$$\mathcal{N}(\lambda, 0) = \mathcal{N}_\lambda(\lambda, 0) = \mathcal{N}_{\lambda\lambda}(\lambda, 0) = \cdots = 0, \ \forall \lambda \tag{19}$$

である事が判る。

節5. 固有値問題

節2で述べたプログラムに従って非線型作用素 $\mathcal{N}$ の Fréchet 微分の固有値問題を調べる。

$\mathcal{L}(\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{N}'(\lambda, 0) : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ とすると

$$\mathcal{L}(\lambda)\boldsymbol{x} = \mathcal{L}(\lambda)\begin{bmatrix} u \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{R}} A u + \lambda P_\sigma(rTe_r) \\ \frac{1}{\mathcal{P}} BT + \frac{\alpha}{r} u_r \end{bmatrix} \tag{20}$$

となり、その共役作用素 $\mathcal{L}(\lambda)^* : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ は

$$\mathcal{L}(\lambda)^*\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{L}(\lambda)^*\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-2}\{\frac{1}{\mathcal{R}} A\hat{u} + \alpha P_\sigma(\frac{1}{r}\hat{T}e_r)\} \\ B^{-1}(\frac{1}{\mathcal{P}} B\hat{T} + \lambda r \hat{u}_r) \end{bmatrix}$$

となる事が判る。 $\mathcal{L}(\lambda)^*\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{T} \end{bmatrix} = 0$ は

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}} A\hat{u} + \alpha P_\sigma(\frac{1}{r}\hat{T}e_r) = 0 \\ \frac{1}{\mathcal{P}} B\hat{T} + \lambda r \hat{u}_r = 0 \end{cases} \tag{21}$$

と同等である。 Lemma 1, により $\mathcal{L}(\lambda)\begin{bmatrix} u \\ T \end{bmatrix} = 0$ は $p \in H^1(\Omega)$ が存在して

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u - \lambda r T e_r + \operatorname{grad} p = 0, & (22) \\ \frac{1}{\mathcal{P}}\Delta T - \frac{\alpha}{r} u_r = 0, & (23) \\ \operatorname{div} u = 0, & (24) \\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ T|_{\partial\Omega} = 0 & (25) \end{cases}$$

と同等であり，又 $\mathcal{L}(\lambda)^*\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{T}\end{pmatrix}=0$ は $\hat{p}\in H^1$ が存在して

$$\begin{cases}\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta\hat{u}-\frac{\alpha}{r}\hat{T}e_r+\operatorname{grad}\hat{p}=0 & (22^*)\\ \frac{1}{\mathcal{P}}\Delta\hat{T}-\lambda r\hat{u}_r=0 & (23^*)\\ \operatorname{div}\hat{u}=0 & (24^*)\\ \hat{u}|_{\partial\Omega}=0,\ \hat{T}|_{\partial\Omega}=0 & (25^*)\end{cases}$$

と同等である（(21) を用いた）。

$u=u_re_r+u_\theta e_\theta$, $u_r(r,\theta)=f(r)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$, $u_\theta(r,\theta)=g(r)\begin{Bmatrix}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{Bmatrix}$, $T(r,\theta)=\Theta(r)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$, $p(r,\theta)=\pi(r)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$ として (22)－(25*) に代入し，又 $\hat{u}=\hat{u}_re_r+\hat{u}_\theta e_\theta$, $u_r(r,\theta)=\hat{f}(r)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$, $\hat{u}_\theta(r,\theta)=\hat{g}(r)\begin{Bmatrix}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{Bmatrix}$, $\hat{T}(r,\theta)=\hat{\Theta}(r)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$, $\hat{p}(r,\theta)=\hat{\pi}(r)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$ として (22*)－(25*) に代入すると，

$$\begin{cases}\frac{1}{\mathcal{R}}\left\{\frac{1}{r}(rf')'-\frac{n^2+1}{r^2}f-\frac{2n}{r^2}g\right\}-\lambda r\Theta+\pi'=0 & (26)\\ \frac{1}{\mathcal{R}}\left\{\frac{1}{r}(rg')'-\frac{n^2+1}{r^2}g-\frac{2n}{r^2}f\right\}+\frac{n}{r}\pi=0 & (27)\\ \frac{1}{\mathcal{P}}\left\{\frac{1}{r}(r\Theta')'-\frac{n^2}{r^2}\Theta\right\}-\frac{\alpha}{r}f=0 & (28)\\ \frac{1}{r}(rf)'+\frac{n}{r}g=0 & (29)\\ f=g=\Theta=0,\quad r=1,R。 & (30)\end{cases}$$

及び

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{R}}\left\{\frac{1}{r}(r\hat{f}')' - \frac{n^2+1}{r^2}\hat{f} - \frac{2n}{r^2}\hat{g}\right\} - \frac{\alpha}{r}\Theta + \hat{\pi}' = 0 & (26^*) \\ \frac{1}{\mathcal{R}}\left\{\frac{1}{r}(r\hat{g})' - \frac{n^2+1}{r^2}\hat{g} - \frac{2n}{r^2}\hat{f}\right\} - \lambda r\hat{f} = 0 & (27^*) \\ \frac{1}{\mathcal{P}}\left\{\frac{1}{r}(r\hat{\Theta}')' - \frac{n^2}{r^2}\hat{\Theta}\right\} - \lambda r\hat{f} = 0 & (28^*) \\ \frac{1}{r}(r\hat{f})' + \frac{n}{r}\hat{g} = 0 & (29^*) \\ \hat{f} = \hat{g} = \hat{\Theta} = 0 \quad , r = 1, R。 & (30^*) \end{cases}$$

(26)－(30) から π, g を，(26*)－(30*) から $\hat{\pi}$, $\hat{g}$ を消去すると

$$\begin{cases} Mf = -\mathcal{R}\lambda n^2 r^3 \Theta & (31) \\ (r\Theta')' - \frac{n^2}{r}\Theta = \mathcal{P}\alpha f & (32) \\ f = f' = \Theta = 0, \quad r = 1, R。 & (33) \end{cases}$$

及び

$$\begin{cases} M\hat{f} = -\mathcal{R}\alpha n^2 r \hat{\Theta} & (31^*) \\ (r\hat{\Theta}')' - \frac{n^2}{r}\hat{\Theta} = \mathcal{P}\lambda r^2 \hat{f} & (32^*) \\ \hat{f} = \hat{f}' = \hat{\Theta} = 0 & (33^*) \end{cases}$$

を得る。 但し $M = \left\{r^2\frac{d^2}{dr^2} + r\frac{d}{dr} - (n^2-1)\right\}\left\{r^2\frac{d^2}{dr^2} + r\frac{d}{dr} - (n^2+1)\right\}$ とする。

次の2つの補題は良く知られている。

<u>*Lemma 3.*</u> $D_i = a_i(r)\frac{d^2}{dr^2} + b_i(r)\frac{d}{dr} + c_i(r)$, $i=1,2$ を区間$[r_1, r_2]$に於ける滑らかな係数をもつ常微分作用素とし、次の２つの境界値問題を考える。

$$(\mathrm{BVP}-1)\begin{cases} D_1 u = f \\ u(r_i) = 0, \quad i=1,2. \end{cases}$$

$$(\mathrm{BVP}-2)\begin{cases} D_1 D_2 u = f \\ u(r_i) = u'(r_i) = 0, \quad i=1,2. \end{cases}$$

a_i, b_i, c_i が実数で $a_i(r) > 0$, $c_i(r) \leqq 0$ ならば (BPV-1), (BVP-2) は Green 関数（夫々 $K_1(r,s)$, $K_2(r,s)$ とする）を持ちかつ

$K_1(r,s) < 0$, $K_2(r,s) > 0$, $(r,s) \in (r_1, r_2) \times (r_1, r_2)$

が成立する。

（Kirchgässner〔10〕, Rabinowitz〔16〕参照）

<u>*Lemma 4.*</u> $K(r,s)$ を区間$[r_1, r_2]$に於ける連続核とし、$K(r,s) > 0$, $(r,s) \in (r_1, r_2) \times (r_1, r_2)$ を満たすものとする。此の時積分作用素 $(Ku)(r) = \int_{r_1}^{r_2} K(r,s)u(r)\,ds$ は正の特性値（$\overset{\mathrm{def}}{=}$ 1/固有値）を持つ。更に正の特性値の中で最小のものは単純でかつ，対応する特性関数は(r_1, r_2)で正値をとるものがとれる。

（Schmeidler〔22〕, Krein-Rutman〔11〕, Karlin〔6〕,〔7〕参照）。

さて此処で我々の境界値問題 (31)–(33) 及び (31*)–(33*) に戻る。次の境界値問題を考える。

$$(\mathrm{BVP}-1)\begin{cases} Mf \equiv \left\{r^2\frac{d^2}{dr^2}+r\frac{d}{dr}-(n^2-1)\right\}\left\{r^2\frac{d^2}{dr^2}+r\frac{d}{dr}-(n^2+1)\right\}f = \varphi \\ f(1)=f'(1)=f(R_0)=f'(R_0)=0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{BVP}-2)\left\{ (r\Theta')' - \frac{n^2}{r}\Theta = \psi, \quad \Theta(1) = \Theta(R_0) = 0 \right.$$

$$(\mathrm{BVP}-\hat{1})\left\{ M\hat{f} = \hat{\varphi}, \quad \hat{f}(1)=\hat{f}'(1)=\hat{f}(R_0)=\hat{f}'(R_0)=0 \right.$$

$$(\mathrm{BVP}-\hat{2})\left\{ (r\hat{\Theta}')' - \frac{n^2}{r}\hat{\Theta} = \hat{\psi}, \quad \hat{\Theta}(1) = \hat{\Theta}(R_0) = 0 \right. .$$

(BVP $-1, 2, \hat{1}, \hat{2}$) は Lemma 3 により Green 関数 K_1, K_2, $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ を持ち，かつ $1<{}^\forall r, {}^\forall s<R_0$ に対して

$$K_1(r,s)>0, \quad K_2(r,s)<0, \quad \hat{K}_1(r,s)>0, \quad \hat{K}_2(r,s)<0$$

が成り立つ。此等の核を用いると (31)–(33) 及び (31*)–(33*) は夫々次の積分方程式 (34) 及び (34*) に変換される。

$$\begin{cases} f(r) = \mu\int_1^{R_0} K(r,s;n) f(s)\,ds, & (34) \\ \hat{f}(r) = \mu\int_1^{R_0} \hat{K}(r,s;n) \hat{f}(s)\,ds. & (34^*) \end{cases}$$

但し $\mu = \mathcal{P}\mathcal{R}\alpha\lambda = R_1^4\chi\omega^2(T_2-T_1)/\kappa\nu\log(R_2/R_1)$ 及び

$$K(r,s;n) = -n^2\int_1^{R_0} K_1(r,t;n)\,t^3 K_2(t,s;n)\,dt,$$

$$\hat{k}(r,s) = -n^2\int_1^{R_0}\hat{k}_1(r,t;n)k_2(t;s;n)s^2dt$$

とする。直ちに判る様に $k(r,s)>0$, $\hat{k}(r,s)>0$, $1<{}^\forall r, {}^\forall s<R_0$ が成立する。従って Lemma 4 により (34), (34*) は正の特性数を持つ。正の特性数の内最小のものを μ_n, $\hat{\mu}_n$ とする。此の時次の補題が成り立つ。

Lemma 5. $\mu_n = \hat{\mu}_n$.

証明. 略。

次の定義を設ける。

Definition 1. $\mu_c = \min\limits_n \mu_n$

Lemma 6. $\mu_c > 0$.

Lemma 7. $\mu_n = \mu_c$ となる n は高々有限個.

証明はいずれも省略する。Lemma 6 により次の定義は well-defined である。

Definition 2. $n_c = \max\{n;\mu_n=\mu_c\}$ とおき臨界波数 (critical wave number) と呼ぶ。

節6. 対称性と関数空間の縮小

$\lambda_c = \mu_c/PR\alpha$ とおくと $\mathcal{L}(\lambda): E \longrightarrow F$ は $0<\lambda<\lambda_c$ 及び $\lambda_c<\lambda<\lambda_c+\delta$ $({}^\exists\delta>0)$ で同型でかつ

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda) = 2\times \text{number of}\{n;\mu_n=\mu_c\} \qquad (35)$$

でき1となり節2で述べたプログラムが用いられない。それで以下に述べる様に $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ の部分空間をうまくとり, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda) = 1$ となる問題に、我々の問題を帰着させる。それをうまく行うには以下に述べる様に問題の持つ対称性を利用すると良い。

$\gamma \in O(2)$ (2次元直交群), $u \in \mathbf{L}_2$, $T \in L_2$ に対して

$$(V_\gamma u)(x) = \gamma u(\gamma^{-1}x), \quad (W_\gamma T)(x) = T(\gamma^{-1}x)$$

とおく。明らかに V, W は $O(2)$ の $\mathbf{L}_2$, L_2 上の直交表群を定義するが更に次の事が判る。

<u>*Lemma 8.*</u> (1) 任意の $\gamma \in O(2)$, $u \in \mathbf{L}_{2,\sigma}$ に対して $V_\gamma u \in \mathbf{L}_{2,\sigma}$, 即ち V は $\mathbf{L}_{2,\sigma}$ 上の $O(2)$ の直交表現を定義する。

(2) $X = (u, T) \in \mathbf{L}_{2,\sigma} \oplus L_2$, $\gamma \in O(2)$ に対して $(\Gamma_\gamma X)(x) = (V_\gamma u, W_\gamma T)$ とおく。此の時

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \equiv \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B) \arrow[r, "\mathcal{N}"] \arrow[d, "\Gamma_\gamma"] & \mathbf{F} = \mathbf{L}_{2,\sigma} \oplus L_2 \arrow[d, "\Gamma_\gamma"] \\
\mathbf{E} \arrow[r, "\mathcal{N}"] & \mathbf{F}
\end{tikzcd}$$

は任意の $\gamma \in O(2)$ に対して可換である。(証明, 略)。

<u>註</u>. 我々の非線型作用素 $\mathcal{N}$ が $O(2)$-不変性を持つ

とは，此の diagram の可換性を意味するとする。

Definition 3. 自然数 n に対して，G_n で $O(2)$ の部分群で角度 $2\pi/n$ の回転及び x_1-軸に関する鏡映より生成される部分群を表わすものとする。

Definition 4. 自然数 n に対して

$$E_n\ (\text{resp. } F_n) = \{X=(u,T)\in E\ (\text{resp. } F)\,;\ \Gamma_\gamma X = X,\ {}^\forall\gamma\in G_n\}$$

とおく。このとき

Lemma 9. $X=(u,T)\in E$ (resp. F) が $X\in E_n$ (resp. F_n) となる為の必要かつ十分条件は $X=(u,T)=(fe_r+ge_\theta, T)$ とおく時 f, g, T が

$$f(r,\theta)=\sum_0^\infty f_k(r)\cos kn\theta,\ g(r,\theta)=\sum_1^\infty g_k(r)\sin kn\theta,\ T(r,\theta)=\sum_0^\infty \Theta_k(r)\cos kn\theta$$

の形に Fourier 展開される事である。

Lemma 10. (1) $\mathcal{N}$ は E_n を F_n に写す。

(2) (1) と $\Gamma_\gamma 0=0$, ${}^\forall\gamma\in G_n$ より $\mathcal{L}(\lambda)$ は E_n を F_n に $\mathcal{L}(\lambda)^*$ は F_n を E_n に写す。

証明. 自明.

以後 $n=n_c$ (critical wave number) ととり，

$\mathcal{N}: R^1_\lambda\oplus E_{n_c}\longrightarrow F_{n_c}$, $\mathcal{L}(\lambda): E_{n_c}\longrightarrow F_{n_c}$, $\mathcal{L}(\lambda)^*: F_{n_c}\longrightarrow E_{n_c}$ と考

える。此の意味の $\mathcal{L}(\lambda)$ は此の意味の $\mathcal{N}$ の $(\lambda, 0)$ に於ける x に関する Fréchet 微分となっている。

次の補題はこれまでの議論より明らかである。

<u>Lemma 11.</u> (1) $\mathcal{L}(\lambda)$, $\mathcal{L}(\lambda)^*$ は index $= 0$ の Fredholm 型の線型作用素である。

(2) $0 < \lambda < \lambda_c$, $\lambda_c < \lambda < \lambda_c + \delta$ $({}^\exists \delta > 0)$ なる λ に対して $\mathcal{L}(\lambda)$, $\mathcal{L}(\lambda)^*$ は isomorphism である。

(3) $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda_c) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda_c)^* = 1$。

(4) $\operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda_c)$ 及び $\operatorname{Ker} \mathcal{L}(\lambda)^*$ はそれぞれ次の形をした X_{n_c} 及び $\hat{X}_{n_c}$ で張られる。

$$X_{n_c} = (u_{n_c}, T_{n_c}) = (f_{n_c}(r)\cos n_c\theta\, \mathbf{e}_r + g_{n_c}(r)\sin n_c\theta\, \mathbf{e}_\theta, \Theta_{n_c}(r)\cos n_c\theta),$$

$$\hat{X}_{n_c} = (\hat{u}_{n_c}, \hat{T}_{n_c}) = (\hat{f}_{n_c}(r)\cos n_c\theta\, \mathbf{e}_r + \hat{g}_{n_c}(r)\sin n_c\theta\, \mathbf{e}_\theta, \hat{\Theta}_{n_c}(r)\cos n_c\theta),$$

但し f_{n_c} 及び $\hat{f}_{n_c}$ は、それぞれ $n = n_c$ とした (34), (34*) の解で $(1, R_0)$ で正値をとるもので, g_{n_c}, Θ_{n_c} 及び $\hat{g}_{n_c}$, $\hat{\Theta}_{n_c}$ は夫々 (26)−(30) 及び (26*)−(30*) の対応する解とする。

<u>節7. 自明な解の枝分かれ</u>

以上で節2のプログラムの為の準備がすべて整った。節2の記号に合わせる為, 前節の E_{n_c}, F_{n_c} を単に E, F

とかき, 又 X_{n_c}, $\hat{X}_{n_c}$ を X_0, $\hat{X}_0$ とかく。 これに合わせて他の記号の n_c はすべて 0 に書き直す事にする。
節2に合わせて

$$h(\lambda,\xi) = (\mathcal{N}(\lambda, \xi X_0 + Y(\lambda,\xi)), \hat{X}_0)_F \quad \text{とおく。}$$

$$h(\lambda_c, 0) = h_\lambda(\lambda_c, 0) = h_\xi(\lambda_c, 0) = h_{\lambda\lambda}(\lambda_c, 0) = 0$$

である事は容易に確かめられる。 又

$$h_{\xi\xi}(\lambda_c, 0) = (\mathcal{N}_\lambda'(\lambda_c, 0)X_0, \hat{X}_0)_F = \left(\begin{bmatrix} P_\sigma(r\mathcal{P}_0 e_r) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{\mathcal{P}}_0 \end{bmatrix}\right)_F$$

$$= \int_\Omega r\mathcal{P}_0 \hat{u}_{r,0}\, dx \,.$$

この値を a とおくと

$$a = \int_0^{2\pi}\int_1^{R_0} \Theta_0(r)\hat{f}_0(r)\cos^2 n_c\theta \cdot r^2 dr = \pi\int_1^{R_0} \Theta_0(r)\hat{f}_0(r)\, r^2 dr$$

であるが, $\hat{f}_0(r) > 0$, $1 < r < R_0$ 及び Θ_0 は

$$(r\Theta_0')' - \frac{n_c^2}{r}\Theta_0 = \mathcal{P}\alpha f_0 \,, \quad \Theta_0(1) = \Theta_0(R_0) = 0,$$

であるので $f_0(r) > 0$, $1 < r < R_0$, 及び Lemma 3 により
$\Theta_0(r) < 0$, $1 < r < R_0$ である。 故に $a < 0$。 故に
$h(\lambda,\xi)$ の $(\lambda_c, 0)$ に於ける Hessian matrix は

$$H=\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & * \end{bmatrix}, \quad a<0$$

の形となり 節2で述べた様に Morse の補題により 自明な解からの定常解の枝分かれが結論される。以上の議論を総まとめして次の結果が得られる。

<u>定理</u>. 方程式 $\mathcal{N}(\lambda, X)=0$, $(\lambda>0)$ に対して $\lambda_c>0$ が存在して

(1) $0<\lambda<\lambda_c$ に対して解 $(\lambda, 0)$ は枝分かれ点ではない。

(2) $R^1_\lambda \oplus E$ (このEはもとの, 即ち $=\mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{D}(B)$) に於ける曲線 $\gamma: (-\delta, \delta)\longrightarrow R^1_\lambda \oplus E$ $(^\exists\delta>0)$ が存在して

(イ) γ は $(\lambda_c, 0)$ で直線 $R^1_\lambda\oplus\{0\}$ と横断的に交わる。

(ロ) $\gamma(p)=(\lambda(p), X(p))$ とかくとき

$$\mathcal{N}(\lambda(p), X(p))=0.$$

が成立する。

残された問題点

その1. 此の小論で述べた枝分かれは $\lambda > 0$ を増加させてゆく時，定常解の範囲では最初のものであるが，Hopf型の枝分かれ，即ち周期解への枝分かれをも考慮した範囲では最初のものかは明らかではない（その為もあって枝分かれ解の安定性の考察はしなかった）。

その2. 本稿でその存在を証明した枝分かれ解は簡単な考察で分かる様に対流型の流れである。即ち，円環が $2n_c$ 個の扇形領域に分かれ，各々の内部で独立した対流が起こる。これは我々の採用したモデルの実験結果（Gotoh〔5〕及びそこに挙げられている文献参照）による"蛇行する"流れと本質的に異なる。では此の蛇行する解をつかまえるにはどうすれば良いか？ 筆者の考えの一つは次の様である。

蛇行する流れは、鏡映変換に関して不変ではない。鏡映不変な我々の方程式が鏡映不変でない解を持つかも知れぬという事は symmetry breaking bifurcation という見方からは興味ある考えではあるが，もっと直接的に此の不変性を破る positive factor を考える可能性もある。その一つは状況を変えて方程式そのものの鏡映不変性を破って

しまう事である。筆者はその手段として次の２つを考えて見た。

(1) ２つの円筒の回転角速度を僅かに異なるものとすること。

(2) 回転座標系に於ける我々の方程式が鏡映不変となった理由は、(イ) ２つの円筒の角速度が等しい事，(ロ) コリオリ力が圧力項に組み入れられる事、の２点にある。従って一般の３次元流を考えれば方程式は鏡映不変ではない。

筆者は(1)の場合，角速度の差 (2)の場合，角速度そのもの，に関する perturbation として問題を扱って見たが現在の所不首尾に終っている。

References

[1] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford University Press 1961.

[2] ——————————, The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a radial temperature gradient, J. Rational Mech. Anal. 3-I, 1954, 181-207.

[3] Fujita, H. and Kato, T., On non-stationary Navier-Stokes system, Rendiconti Seminario Math. Univ. Padova 32, 243-260 (1962).

[4] ——————————, On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal. 16, 1964. 269-315.

[5] Gotoh, K., Theory of Stability of Flows (in Japanese), Sangyo Tosho, Tokyo 1976.

[6] Karlin, S., Total positivity and applications V.I. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1967.

[7] ——————, The existence of eigenvalues for integral operators Trans. Amer. Math. Soc. 113, 1-17(1964).

[8] Kirchgässner, K. and Kielhöfer, H., "Stability and bifurcation in fluid dynamics, "Rocky Mountain J. Math. 3(1973), 275-318.

[9] ——————————, Instability phenomena in fluid mechanics, numerical solution of partial differential equations, III, Academic Press Inc. New York, 1976, 349-368.

[10] ——————————, Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln fur bebieligen Spaltbreiten. Z.A.M.P. 12, 14-30(1961).

[11] Krein, M.G. and Rutman, M.A., Linear operators leaving a cone in a Banach space, Translations of the A.M.S., Series 1, 10, 1962, 199-325.

[12] Ladyzhenskaya, O. A., The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1963.

[13] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Fluid Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.

[14] Nirenberg, L., Topics in Nonlinear Functional Analysis, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Univ., 1973-1974.

[15] Rabinowitz, P.H. and Crandall, M.G., Bifurcation from simple eigenvalues, J. Funct. Anal. 8, 321-340(1971).

[16] Rabinowitz, P.H., Existence and nonuniqueness of rectangular solution of the Bénard problem, Arch. Rational Mech. Analy. 29(1968), 32-57.

[17] Sattinger, D.H., Group representation theory, bifurcation theory and pattern formation, (to appear).

[18] ——————, Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Note in Math. No.309, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1973.

[19] ——————, Transformation groups and bifurcation at multiple eigenvalues, Bull. Amer. Math. Soc. Vol.79 No.4. 1973, 709-711.

[20] ——————, The mathematical problem of hydrodynamic stability, J. Math. Mech. Vol.19 No.9(1970), 797-817.

[21] ——————, Group representation theory and branch point of nonlinear functional equations, (to appear).

[22] Schmeidler, W., Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Bd. 1., Berlin, 1950.

[23] Velte. W., Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, Arch. Rational Mech. Anal. 16(1964), 97-125.

[24] ——————, Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylorproblem, Arch. Ratinal Mech. Anal, 22(1966), 1-14.