数理解析研究所講究録
第 298 巻 1977 年 57-66

二次元ジェット流の非線形理論

阪大 基礎工　藤本 悟
角谷 典彦

I、序

我々の課題は二次元ジェット流の準中立攪乱の非線形理論である。二次元ジェット流の線形安定論はCurle (1957), Tatsumi-Kakutani (1958), Gotoh-Nakata (1972) などによってなされている。そして，ほぼ同じ中立曲線が得られている。特にGotoh-Nakataの中立曲線はかなり信頼できるものであり，我々もまた精度をあげた数値計算により，それを確かめている。

二次元ジェット流の非線形理論はGotoh (1968) がReynolds数Rが充分大きい場合に，単色波攪乱の複素振幅Aを支配する方程式として，Landau-Stuart方程式を出している．我々の理論はこれを拡張し、準中立領域の全域で適用できるようにしようとするものである。この様な解析は、二次元Poiseuille流については Stewartson & Stuart (1971) が，また1974年には S.P. Lin

が一方が自由境界、他方が固定境界の流れについて解析している。そして Landau - Stuart 方程式を修正した形の方程式を得ている。ところが Stewartson & Stuart の方程式は，二次元平行流一般に拡張できる普遍なものであるけれども、適用できるのは臨界点回りに限られている。また、S. P. Lin の解析は準中立領域全体を含んでいるけれども，基礎方程式が特別な形をしており、固有値関係 $F(\alpha, R, C) = 0$ と各 order 毎の方程式の解析的に求まる場合である．ただし、α は波数，C は擾乱の複素位相速度を表わす．

我々の解析は，これらの拡張するとともに、モデルとして両端自由境界の二次元ジェット流を採用する．また、方法論としては多重尺度法（method of multiple scales）を使って systematic な解析をめざす．こうして計算した結果、擾乱を支配する方程式として Stewartson & Stuart，S. P. Lin の方程式を修正した形の方程式を得る．我々が得たこの方程式は 条件 $Im \frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha C) \ll Re \frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha C)$ を満たす限り、基本的に全ての準中立領域において成立する．しかも主流の形と境界条件を変えるだけで、二次元平行流のどんなモデルにも適用できる一般性をもっている．最後に我々は具体的に二次元ジェット流の臨界点付近における方程式の係数を数値計算し、決定しようとしたが，収束性が悪く

今のところ信頼できる値は得られていない。なお、このような方程式の解の性質については Hocking & Stewartson (1972), Hocking, Stewartson & Stuart (1972) がある程度の解析を行なっている。

II. 線形理論

今二次元問題を考えていることに注意して流れ関数ψを導入し、基礎式を無次元化して次の様に書く：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{R}\nabla^2\zeta \quad , \qquad (2.1)$$

ここで $\zeta = -\nabla^2\psi$ はz方向の渦度成分を表わす。また座標は噴出口を原点として流れの方向にx軸、垂直にy軸をとる。

これまでの解析に従って、xが充分大きいところでは二次元ジェット流の主流は平行流として次の様に近似できる；

$$U \equiv \operatorname{sech}^2 y \ . \qquad (2.2)$$

こうして、無限小撹乱$\hat{\phi}$を支配する方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\hat{\phi} - U''\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x} = \frac{1}{R}\nabla^4\hat{\phi} \ . \qquad (2.3)$$

また境界条件は、空間的に変動の大きい反対称撹乱の方がより不安定と考えられるのでそれを採用し、

$$y = 0 \quad \partial\hat{\Phi}/\partial y = \partial^3\hat{\Phi}/\partial y^3 = 0 ,$$
$$y \to \infty \quad \partial\hat{\Phi}/\partial y = \partial\hat{\Phi}/\partial x = 0 . \tag{2.4}$$

我々は、中立曲線上の任意の点を(α_0, R_0, C_0)とおき$(\alpha-\alpha_0)\sim O(\epsilon)$，$(R-R_0)\sim O(\epsilon^2)$の準中立領域での攪乱を考慮する。だから，攪乱の角速度$\omega(\alpha,R)$，固有関数$\phi(\alpha,R;y)$は次の様に展開できる。

$$\omega(\alpha,R)=\alpha_0 C_0+\omega^{(1)}(\alpha-\alpha_0)+\omega^{(2)}(\alpha-\alpha_0)^2+\cdots$$
$$\cdots+\omega^{(3)}(R-R_0)+\cdots . \tag{2.5}$$

$$\phi(\alpha,R;y)=\phi_{10}(y)+(\alpha-\alpha_0)\phi_{11}+(\alpha-\alpha_0)^2\phi_{12}+$$
$$\cdots+(R-R_0)\phi_{21}+\cdots . \tag{2.6}$$

こうして攪乱$\hat{\Phi}(\alpha,R;\tau,x,y)$は

$$\hat{\Phi}\sim\int_0^\infty\phi(\alpha,R;y)\exp[i(\alpha x-\omega(\alpha)t)]\,d\alpha$$
$$+\ C.C. . \tag{2.7}$$

(2.7)に(2.5)(2.6)を代入し、これを(2.1)に代入して積分の内を整理する。

$O(1)$；

$$(D^2-\alpha_0^2)^2\phi_{10}-i\alpha_0R_0\{(U-C_0)(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}-(D^2U)\phi_{10}\}=0. \tag{2.8}$$

今後、この左辺のOrr-Sommerfeld方程式の微分作用素をLとおく。また、ここで$D\equiv d/dy$.

$O(\alpha-\alpha_c)$；

$$L[\phi_{11}] = iR_0\{L_1[\phi_{10}] - \omega^{(1)}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}\}, \quad (2.10)$$

ただし、$L_1 \equiv (U - \frac{4i\alpha_0}{R_0})(D^2-\alpha_0^2) - 2\alpha_0^2(U-C_0) - D^2U$.

$O(\alpha-\alpha_0)^2$;

$$L[\phi_{12}] = iR_0\{f_1(y) - \omega^{(2)}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}\}, \quad (2.11)$$

ただし、$f_1(y) \equiv L_1[\phi_{11}] - \omega^{(1)}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{11}$
$-\alpha_0(3U-2\omega^{(1)}-C_0)\phi_{10} - \frac{2i}{R_0}(D^2-3\alpha_0^2)\phi_{10}$.

$O(R-R_0)$;

$$L[\phi_{21}] = L_2[\phi_{10}] - iR_0\omega^{(3)}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}, \quad (2.12)$$

ただし、$L_2 \equiv (D^2-\alpha_0^2)^2$.

(2.10), (2.11), (2.12) の両辺に、ϕ_{10}の随伴関数Φをかけてyについて0から∞まで積分する。こうして、左辺の積分は0となり、右辺より$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$が求まる。

$$\omega^{(1)} = \frac{\int_0^\infty \Phi L_1[\phi_{10}]dy}{\int_0^\infty \Phi(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}dy},$$

$$\omega^{(2)} = \frac{\int_0^\infty \Phi f_1(y)dy}{\int_0^\infty \Phi(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}dy},$$

$$\omega^{(3)} = -\frac{i}{R_0}\frac{\int_0^\infty \Phi L_2[\phi_{10}]dy}{\int_0^\infty \Phi(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}dy}. \quad (2.13)$$

Ⅲ. 非線形安定論

multiple scales 法を採用する.

$$\psi(x_0, x_1, \cdots, t_0, t_1 \cdots, y) = \sum_{n=0} \epsilon \psi^{(n)}(x_0, x_1 \cdots, t_0, t_1 \cdots, y), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{n=0} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial y_n}, \tag{3.2}$$

ただし, $x_n \equiv \epsilon^n x$, $t_n \equiv \epsilon^n t$, $\psi^{(0)} \equiv \int U dy$.

更に $\psi^{(n)}$ は非線形相互作用を考える際、$exp[i\alpha_0(x_0 - C_0 t_0)]$ の高調波で展開する.

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)} &= \varphi_1^{(1)} E + \varphi_{-1}^{(1)} E^{-1}, \\
\psi^{(2)} &= \varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} E + \varphi_{-1}^{(2)} E^{-1} + \varphi_2^{(2)} E^2 + \varphi_{-2}^{(2)} E^{-2} + \cdots, \\
\psi^{(3)} &= \varphi_0^{(3)} + \varphi_1^{(3)} E + \varphi_{-1}^{(3)} E^{-1} + \varphi_2^{(3)} E^2 + \varphi_{-2}^{(3)} E^{-2} \\
&\quad + \varphi_3^{(3)} E^3 + \varphi_{-3}^{(3)} E^{-3} + \cdots, \\
\psi^{(4)} &= \text{------},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし, $E^n \equiv exp[in\alpha_0(x_0 - C_0 t_0)]$,

$\varphi_n^{(m)} \equiv \varphi_n^{(m)}(x_1 \cdots, t_1 \cdots, y)$.

また、方程式中の R については、$O(1)$ の新しい量 $\overline{R} (\equiv \epsilon^{-2} \Delta R)$ を導入して $R \equiv R_0 + \epsilon^2 \overline{R}$ とする.

こうして基礎方程式(2.1)を書き直し、order 毎に整理する。ただし、境界条件はすべて(2.4)と等価である.

ϵE^1;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha_0^2\right)^2\varphi_1^{(1)}=i\alpha_0R_0\left\{(U-C_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha_0^2\right)\varphi_1^{(1)}-(D^2U)\varphi_1^{(1)}\right\},\qquad(3.4)$$

(3.4)の解は、yに関して線形の Orr-Sommerfeld 方程式と等価であることに注意すると、次の様に書くことができる。

$$\varphi_1^{(1)}=A_1(x_1,\cdots,t_1\cdots)\phi_{10}(y)\ .\qquad(3.5)$$

ϵ^2E^0;

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4}\varphi_0^{(2)}=i\alpha_0R_0|A_1|^2D^2\{\phi_{10}\cdot D\tilde{\phi}_{10}-\tilde{\phi}_{10}\cdot D\phi_{10}\}\ .\qquad(3.6)$$

(3.6)の解は変数分離形で次の様に書ける。

$$\varphi_0^{(2)}=|A_1|^2\phi_1(y)\ ,\qquad(3.7)$$

ただし、ϕ_1 は新しく定義した関数である。

ϵ^2E^1;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha_0^2\right)^2\varphi_1^{(2)}-i\alpha_0R_0\left\{(U-C_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha_0^2\right)\varphi_1^{(2)}-(D^2U)\varphi_1^{(2)}\right\}$$
$$=R_0\left\{(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10}\frac{\partial A_1}{\partial t_1}+L_1[\phi_{10}]\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right\}.\qquad(3.8)$$

(3.8)の両辺に随伴関数Φをかけて、yについて0から∞まで積分すると、左辺は0となり，右辺より

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1}+\omega^{(1)}\frac{\partial A_1}{\partial x_1}=0\ .\qquad(3.9)$$

$\omega^{(1)}$を実数部と虚数部に分けて $\omega^{(1)}=\omega_r^{(1)}+i\omega_i^{(1)}$ で表わす。今、$\omega_i^{(1)}\sim O(\epsilon)$ 程度に小さければ、複素振幅A_1は(3.9)より、$\omega_r^{(1)}$の群速度にのった系で程一定であること

がわかる。よって x_1, t_1 の代わりに $\omega_r^{(1)}$ で動く座標 ξ を採用する方が便利である。すなわち，

$$\xi \equiv x_1 - \omega_r^{(1)} t_1 \quad . \qquad (3.10)$$

ξ を使って（3.8）の右辺を書き直すと、その解は新しい関数 A_2 を導入して、同次解と非同次解を加えて，

$$\varphi_1^{(2)} = A_2(x_1,\cdots,t_1\cdots)\phi_{10} + i\frac{\partial A_1}{\partial \xi}\phi_{12} \quad . \qquad (3.10)$$

$\epsilon^2 E^2$;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\alpha_0^2\right)^2 \varphi_2^{(2)} - 2i\alpha_0 R_0\left\{(U-C_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\alpha_0^2\right)\varphi_2^{(2)} - (D^2U)\varphi_2^{(2)}\right\}$$
$$= i\alpha_0 R_0 A_1^2 D\{\phi_{10} D^2\phi_{10} - (D\phi_{10})^2\} \quad . \qquad (3.11)$$

（3.10）の同次解は

高調波共鳴をおこす特別な場合を除いてなく、数値計算でもないことが確かめられた。だから，$\varphi_2^{(2)}$ は新しい関数 ϕ_2 を使って、次の様に書ける。

$$\varphi_2^{(2)} = A_1^2\,\phi_2(y) \quad . \qquad (3.12)$$

$\epsilon^3 E^1$;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_0^2\right)^2 \varphi_1^{(3)} - i\alpha_0 R_0\left\{(U-C_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_0^2\right)\varphi_1^{(3)} - (D^2U)\varphi_1^{(3)}\right\}$$
$$= R_0\left\{\frac{\partial A_1}{\partial t_2}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}L_1[\phi_{10}]\right\}$$
$$+ R_0\frac{\partial A_1}{\partial \xi}\left\{\omega_r^{(1)}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10} - L_1[\phi_{10}]\right\} + R_0 i\frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2}f_1^*(y)$$
$$+ R_0 i\epsilon^{-1}\omega_i^{(1)}\frac{\partial A_1}{\partial \xi}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10} - \frac{\overline{R}}{R_0}A_1 L_2[\phi_{10}]$$
$$- i\alpha_0 R_0 A_1|A_1|^2 f_2(y) \quad , \qquad (3.13)$$

ただし、$f_2(y) \equiv \phi_2(D^2-\alpha_0^2)\tilde{\Phi}_{10} - 2D\tilde{\Phi}_{10}\cdot(D^2-4\alpha_0^2)\phi_2$
$- D\phi_1\cdot(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10} + 2\phi_2 D(D^2-\alpha_0^2)\tilde{\Phi}_{10}$
$- \tilde{\Phi}_{10} D(D^2-4\alpha_0^2)\phi_2 + \phi_{10} D^3\phi_1$,

$$f_1^*(y) \equiv f_1(y) + i\omega_i^{(1)}(D^2-\alpha_0^2)\phi_{10} .$$

(3.13)の両辺に随伴関数Φをかけて、yについて0から∞まで積分し、更に

$$\xi_2 \equiv x_2 - \omega_r^{(1)} t_2 , \quad \tau = t_2 ,$$

の変換をしてやると、左辺は0となり、右辺より次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} - i\bar{\omega}_i^{(1)}\frac{\partial A_1}{\partial \xi} - i\omega^{(2)}\frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} = i\frac{\bar{R}}{R_0}\omega^{(3)} A_1 + K A_1 |A_1|^2 . \tag{3.14}$$

この左辺第二項は我々の解析により、Stewartson & Stuart , S. P. Lin の方程式に新たに付け加わった項である。この項は、我々の理論が有効である範囲を臨界点付近から、他の準中立領域に拡張するために意味をもつ。

なお、臨界点付近で、この方程式の具体的な値を数値計算すること，そしてHocking-Stewartson & Stuart , Hocking-Stewartson に従って非線形安定性を議論することが我々の大きな目標の一つであった。このためにまず Gotoh & Nakata と基本的に同じ方法で、臨界点の精度の高い値をもとめる。結果は臨界点の波数α_c , Reynolds

数 R_c，位相速度 C_r はそれぞれ

$$\alpha_c = 0.174\ ,$$
$$R_c = 4.017\ ,$$
$$C_r = 0.0438\ . \qquad (3.15)$$

係数の計算は非常に収束が悪く，$\omega^{(2)}$，K の値は誤差が大きくて今の段階で正確な値は得られていない。あとの係数は

$$\omega_r^{(1)} = 0.107\ ,$$
$$\omega^{(3)} = 0.0013 + 0.0045\,i\ . \qquad (3.16)$$

Ⅳ．参考文献

Curle, N ; Proc. Roy. Soc. A. 238 (1957)

Gotoh, K ; J. Phy. Soc. Japan. 24 (1968)

Gotoh, K & Nakata; I ; J. Phy. Soc. Japan 32 (1972)

Hocking, L.M. & Stewartson, K.
; Proc. Roy. Soc. A. 326 (1972)

Hocking, L.M., Stewartson, K. & Stuart, J.T.
; J. Fluid Mech. 51 (1972)

Lin, S.P. ; J. Fluid Mech. 63 (1974)

Stewartson, K. & Stuart, J.T.
; J. Fluid Mech. 48 (1971)

Tatsumi, T & Kakutani, T ; J. Fluid Mech 4 (1958)