

Burgers 乱流の多重尺度キュムラント展開

相模 工大 水島 二郎
京大・理 巽 友正

§1. Introduction

我々は、先に、多重尺度キュムラント展開を、Navier-Stokes 方程式に従う三次元等方性乱流に適用し、Kolmogorov 理論と良く一致する $-5/3$ 乗エネルギー・スペクトルを得ただけでなく、エネルギー減衰則をはじめ、skewness、粘性消散長さをはじめ、種々の統計量についても実験と良く合う結果を得た。

この多重尺度キュムラント展開は、次々節で述べられるように、各次のキュムラントの大きさ、その長さのスケール、時間のスケールについて簡単な、物理的意味の明らかな仮定を置くだけで、エネルギー・スペクトルについて閉じた方程式系が得られるという特長をもつ。それらの仮定が正しいかどうかという判定は、直接、実験により証明されるのを待

つ二つとも一つの方法であるが、もう一つの方法は、この仮定により得られる結果の妥当性による判定である。

今回は、多重尺度キュムラント展開を Burgers 乱流に適用し、得られた結果を、Burgers 方程式の厳密解の漸近形から導かれる結果と比較しながら Burgers 乱流の諸性質を調べた。また、それらの結果を三次元等方性乱流の性質と比較しながら検討した。

§2. Formulation

座標 x 、時刻 t における速度を $u(x, t)$ とすると Burgers 方程式は

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

と書ける。 $u(x, t)$ の Fourier 変換を $v(k, t)$ とすると、 $v(k, t)$ に対する方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) v(k, t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} k' v(k', t) v(k-k', t) dk' \quad (2.2)$$

となる。ここで、複素変数関数 $\mathcal{Z}(k)$ を導入すると、 $v(k, t)$ に対する特性汎関数 $\Phi[\mathcal{Z}(k), t]$ は次のように定義できる。

$$\Phi[\mathcal{Z}(k), t] = \langle \exp[i(\mathcal{Z}, v)] \rangle, \quad (2.3)$$

たえし、

$$(z, v) = \int_{-\infty}^{\infty} z(k) v^*(k, t) dk \quad (2.4)$$

であり、 $\langle \quad \rangle$ は確率平均を表わす。すると、特性汎関数に対する方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \int_{-\infty}^{\infty} k^2 z(k) \frac{\partial \Phi}{\partial z(k) dk} dk \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k z(k+k') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z(k) dk \partial z(k') dk'} dk dk' \end{aligned} \quad (2.5)$$

と書ける。各次のキュムラント C_n を次の展開の係数として定義する。

$$\begin{aligned} \Phi[z(k), t] = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_1, \dots, k_n, t) \right. \\ \left. \times z(k_1) \cdots z(k_n) dk_1 \cdots dk_n \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

キュムラント C_n と速度積の平均との間に次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \langle v(k, t) v(k', t) \rangle &= C_2^*(k, k', t), \quad *: \text{complex conjugate} \\ \langle v(k, t) v(k', t) v(k'', t) \rangle &= C_3^*(k, k', k'', t), \\ \langle v(k, t) v(k', t) v(k'', t) v(k''', t) \rangle &= C_4^*(k, k', k'', k''', t) \\ &+ C_2^*(k, k', t) C_2^*(k'', k''', t) + C_2^*(k, k'', t) C_2^*(k', k''', t) \\ &+ C_2^*(k, k''', t) C_2^*(k', k'', t). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$C_n(k_1, \dots, k_n)$ は因数 $\delta(k_1 + \dots + k_n)$ を含んでいるので、 C_2, C_3, C_4 は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} C_2(k, k', t) &= E(k, t) \delta(k+k'), \\ C_3(k, k', k'', t) &= -i F(k, k', t) \delta(k+k'+k''), \\ C_4(k, k', k'', k''', t) &= G(k, k', k'', t) \delta(k+k'+k''+k'''). \end{aligned} \right\} (2.8)$$

また、 $E(k, t)$ と $\langle u(x, t) u(x+r, t) \rangle$ の間には、

$$\langle u(x, t) u(x+r, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E(k, t) e^{ikr} dk \quad (2.9)$$

の関係がある。 $r=0$ のときには、

$$\frac{1}{2} \langle u(x, t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E(k, t) dk \equiv \mathcal{E}(t) \quad (2.10)$$

となる。 $E(k, t)$ はエネルギー・スペクトル密度とよばれ、その積分 $\mathcal{E}(t)$ は単位質量当りのエネルギーを表わす。

§3. 多重尺度キュムラント展開

キュムラント C_2 と C_3 に対する方程式は象徴的に書くと、次のように書ける。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) C_2 = k \int C_3 dh, \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) C_3 = k \int C_4 dh + k C_2 C_2. \quad (3.2)$$

ここで、波数の多重尺度 k_n と時間の多重尺度 t_n を

$$k_n = \nu^{n/2} k \quad (n=1, 2, \dots), \quad (3.3)$$

$$t_n = \nu^{-n} t \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

で定義し、時間微分は $\partial/\partial t = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{-n} \partial/\partial t_n$ で表わされるとする。さらに、キュムラント C_2, C_3 および C_4 は波数 k_n と時間 t_n の次の関数であると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} C_2(k, t) &= C_2(k_1; t_0), \\ C_3(k, t) &= C_3(k_1, k_2; t_0, t_1), \\ C_4(k, t) &= C_4(k_1, k_2, k_3; t_0, t_1, t_2). \end{aligned} \right\} (3.5)$$

また、 C_2, C_3 および C_4 は次のように展開できるとする。

$$\left. \begin{aligned} C_2(k_1; t_0) &= \nu^{1/2} [C_2^0 + \nu C_2^1 + \dots], \\ C_3(k_1, k_2; t_0, t_1) &= \nu^{3/2} [C_3^0 + \nu C_3^1 + \dots], \\ C_4(k_1, k_2, k_3; t_0, t_1, t_2) &= \nu^3 [C_4^0 + \nu C_4^1 + \dots]. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

縮退したキュムラント

$$\int C_n dh \equiv \tilde{C}_n \quad n \geq 3 \quad (3.7)$$

は C_{n-1} と同じ波数 k_n と時間 t_n を変数として持つものとする。よして、その大きさは C_n と C_{n-1} の中間の大きさであるとする。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}_3(k_1; t_0) &= \nu [C_3^0 + \nu C_3^1 + \dots], \\ \tilde{C}_4(k_1, k_2; t_0, t_1) &= \nu^2 [C_4^0 + \nu C_4^1 + \dots]. \end{aligned} \right\} (3.8)$$

時間微分の展開 $\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{-n} \frac{\partial}{\partial t} \nu^n$ と (3.5) ~ (3.8) を方程式 (3.1), (3.2) に代入し, $\nu^{1/2}$ の order までとると, 次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + k_1^2\right) C_2^0(k_1; t_0) = k_1 \int C_3^0(k_1, k_2; t_0, t_1) dh, \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + k_2^2\right) C_3^0(k_1, k_2; t_0, t_1) = k_1 C_2^0(k_1; t_0) C_2^0(k_1; t_0). \quad (3.10)$$

(3.10) の右辺は t_1 に無関係なので t_1 で積分でき,

$$\begin{aligned} C_3^0 &= \frac{1 - \exp(-k_2^2 t_1)}{k_2^2} k_1 C_2^0(k_1; t_0) C_2^0(k_1; t_0) \\ &= \frac{1 - \exp(-k_1^2 t_0)}{k_2^2} k_1 C_2^0(k_1; t_0) C_2^0(k_1; t_0) \quad (3.11) \end{aligned}$$

となる。ただし, 初期条件

$$C_3^0(t=0) = 0$$

を用いた。(3.11) と (3.9) から C_2^0 に対する方程式が得られる。象徴的な記述をやめ, さらに C_2^0 を $E(k, t)$ に置きかえて得られる方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k, t) &= T(k, t) \\ T(k, t) &= -\frac{k}{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp[-2\nu(k^2 + k'^2 + kk')t]}{k^2 + k'^2 + kk'} \\ &\times \left\{ (k+k')E(k, t)E(k', t) - kE(k', t)E(k+k', t) \right. \\ &\left. - k'E(k, t)E(k+k', t) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

§4. 数値計算

次の無次元変数

$$s = k/k_0, \quad \tau = k_0^{3/2} E_0^{1/2} t, \quad \phi = E/E_0, \quad R = E_0^{1/2} / (\nu k_0^{1/2})$$

を導入すると、§3で得られたスペクトル方程式は (4.1)

$$\frac{\partial \phi(s, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{R} 2s^2 \phi(s, \tau) = -\frac{R}{2} s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp[-2(s^2 s'^2 + s s') \frac{\tau}{R}]}{s^2 + s'^2 + s s'}$$

$$\times \{ (s+s') \phi(s, \tau) \phi(s', \tau) - s \phi(s', \tau) \phi(s+s', \tau) - s' \phi(s, \tau) \phi(s+s', \tau) \} \equiv \psi(s, \tau) \quad (4.2)$$

と書ける。数値計算の便宜のため、さらに、次の変数変換を行なう。

$$\left. \begin{aligned} s &= ab^n, \quad ds = ab^n \ln b \, dn, \quad \tau = \tau, \\ \phi(s, \tau) &= \Phi(n, \tau), \quad \psi(s, \tau) = \Psi(n, \tau). \end{aligned} \right\} (4.3)$$

数値計算においては、積分区間を $[0, 2N]$ ($ab^N = 1$) で打ち切り、さらにこの区間を $[0, ab]$ と $[ab, 2N]$ に分け、前者は二次曲線で近似したのち積分し、後者では Simpson の公式を用いる。時間微分は前進差分で置きかえる。こうして得られる $\Phi(n, \tau)$ に対する差分方程式は、次のようになる。

$$\frac{\Phi(n, \tau + \Delta \tau) - \Phi(n, \tau)}{\Delta \tau} + \frac{2}{R} a^2 b^{2n-2} \Phi(n, \tau) = -\frac{R}{2} ab^{n-1} \sum_{n'=2}^{N'} C_0 E_2(n') \frac{1 - \exp[-\frac{2}{R} (b^{2n-2} + b^{2n'-2} + b^{n-1+n'-1}) \tau]}{a^2 (b^{2n-2} + b^{2n'-2} + b^{n-1+n'-1})}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ (ab^{n-1} + ab^{n'-1}) \Phi(n, t) \Phi(n', t) - ab^{n-1} \Phi(n', t) \Phi(n_n^+, t) \right. \\
& \left. - ab^{n'-1} \Phi(n, t) \Phi(n_n^+, t) \right\} ab^{n-1} \ln b \\
& - \frac{R}{2} ab^{n-1} \sum_{n'=2}^{N'} \text{COE}_2(n') \frac{1 - \exp\left[-\frac{2}{R} a^2 (b^{2n-2} + b^{2n'-2} - b^{n-1+n'-1}) t\right]}{a^2 (b^{2n-2} + b^{2n'-2} - b^{n-1+n'-1})} \\
& \times \left\{ (ab^{n-1} - ab^{n'-1}) \Phi(n, t) \Phi(n', t) - ab^{n-1} \Phi(n, t) \Phi(n_n^-, t) \right. \\
& \left. + ab^{n'-1} \Phi(n, t) \Phi(n_n^-, t) \right\} ab^{n-1} \ln b. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

二二二,

$$N' = \ln(2I/a) / \ln b,$$

$$n_{n'}^{\pm} = \frac{\ln |b^{n-1} \pm b^{n'-1}|}{\ln b} + 1,$$

$$\text{COE}_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{\ln b} \frac{1}{1-b} \left(-\frac{1}{b} + \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}b^2\right), & n=1 \\ \frac{1}{\ln b} \frac{1}{1-b} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}b\right) + \frac{1}{3}, & n=2 \\ \frac{1}{6} \frac{1}{\ln b} \frac{1}{b^2(1-b)} + \frac{4}{3}, & n=3 \\ \frac{2}{3}, & n=4, 6, 8, \dots \\ \frac{4}{3}, & n=5, 7, 9, \dots \end{cases}$$

である。(4.4)の差分方程式を次の2つの初期条件の下に解いた。

$$\text{CASE I} \quad E(k, 0) = E_0 \exp(-(k/k_0)^2), \quad (4.5)$$

$$\text{CASE II} \quad E(k, 0) = E_0 (k/k_0)^2 \exp(-(k/k_0)^2). \quad (4.6)$$

Reynolds 数と parameter は, CASE I, CASE II 共に、
Table 1 に示す値を用いた。

table 1

Reynolds 数 R	a	b	N	Δt
5	0.1	1.2	30	0.02
10	0.1	1.2	32	0.02
20	0.1	1.2	34	0.02
50	0.1	1.2	36	0.02
100	0.1	1.2	38	0.02
200	0.1	1.2	40	0.02

そこで、次の量

$$J \equiv \int_0^{\infty} \langle u(x, t) u(x+r, t) \rangle dr = E(0, t)$$

を定義しておく。 J は時間に関して定数であり、CASE I
において、つねに $J \neq 0$ 、CASE II においてつねに $J = 0$ で
あることが容易にわかる。

§5. Burgers 方程式の散密解の漸近形

代表速度および長さを u_0 , l_0 とし、 $R = \frac{u_0 l_0}{\nu}$ とおくと
Burgers 方程式 (2.1) は次のように書ける。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

$1 \ll t \ll R$ における方程式 (5.1) の厳密解の漸近形は、領域 $(\xi_{i-1} + \xi_i)/2 < x < (\xi_i + \xi_{i+1})/2$ において

$$u(x, t) = \frac{1}{t} \left[x - \frac{1}{2} (\eta_i + \eta_{i+1}) - \frac{1}{2t} (\eta_{i+1} - \eta_i) \tanh \left[\frac{R}{4t} (\eta_{i+1} - \eta_i) (x - \xi_i) \right] \right] \quad (5.2)$$

となる。ここで、fig. 1 に示されるように、 ξ_i はショックの位置、 η_i は速度がゼロとなる点の座標であり、これらの値は $u(x, t)$ の初期条件により決定される。

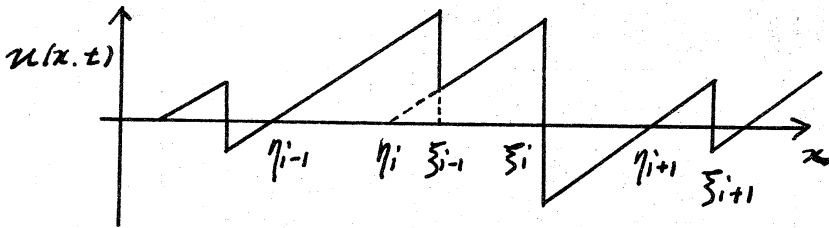


figure 1

Tatsumi & Kida (1972) はこれらのショックの統計を取り扱うことにより、Burgers 乱流の性質を調べている。

彼らに従って、 $\mu_i = \eta_{i+1} - \eta_i$ の分布を $f(\mu, t)$ 、 $\lambda_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ の分布を $g(\lambda, t)$ とおく。ショックの衝突により時間と共に変化する代表長さを $l(t)$ とし、次式で表わされる $f(\mu, t)$ 、 $g(\lambda, t)$ の相似解を決定する。

$$\left. \begin{aligned} f(\mu, t) &= \frac{1}{l(t)} f\left(\frac{\mu}{l(t)}\right), \\ g(\lambda, t) &= \frac{1}{l(t)} g\left(\frac{\lambda}{l(t)}\right). \end{aligned} \right\} (5.3)$$

$l(t)$ は

$$l(t) = l_0 (t/t_0)^\alpha \quad (5.4)$$

の形の解をもち、 α の値が次のように定まる。(J=0 のとき、
エントロピー最大の仮定を用いる。)

$$\left. \begin{aligned} J \neq 0 \text{ のとき} & \quad \alpha = \frac{2}{3}, \\ J = 0 \text{ のとき} & \quad \alpha = \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} (5.5)$$

§6. 数値計算の結果とその検討

(1) エネルギー・スペクトル

(4.4) 式を数値計算した結果得られたエネルギー・スペクトルのうち、代表的なものとして $R=200$ の場合を、CASE I, CASE II それぞれについて figure 2, 3 に示した。図では両対数軸を採用している。また、高波数におけるエネルギー・スペクトルの形を調べるために、片対数軸の図を figure 4 で示す。CASE II の場合もスペクトルは高波数では CASE I と同じ形をしているので省略する。

これらの図から明らかのようにエネルギー・スペクトルは3つの領域に分けられる。

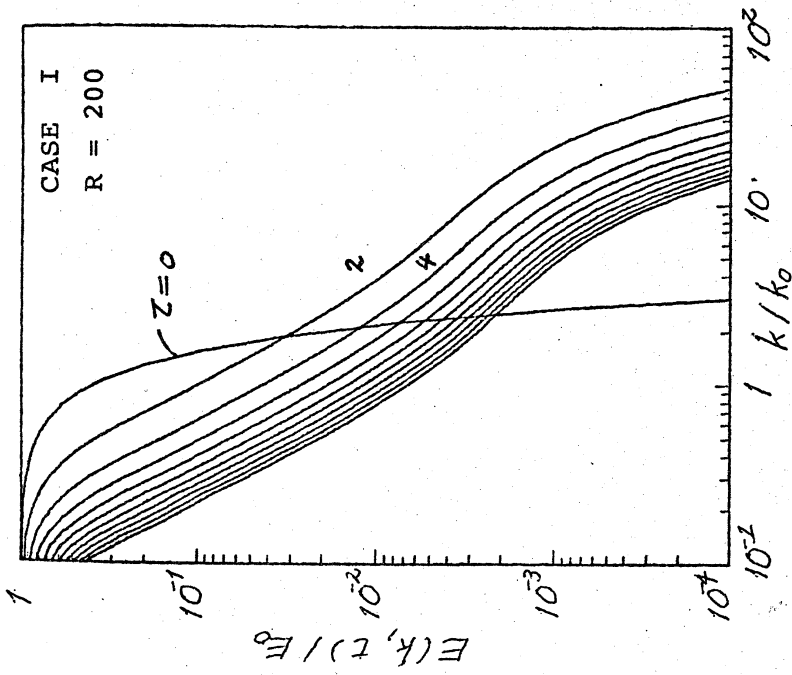


figure 2 energy spectrum, $z = z''$
 $z = k_0^{3/2} E_0^{1/2} t z''^{2/3}$.

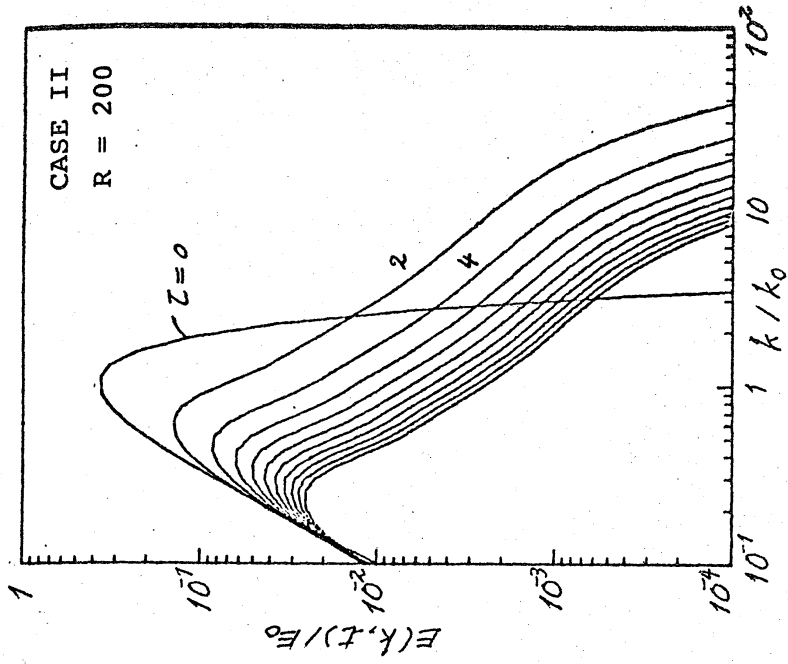


figure 3 energy spectrum, $z = z''$
 $z = k_0^{3/2} E_0^{1/2} t z''^{2/3}$.

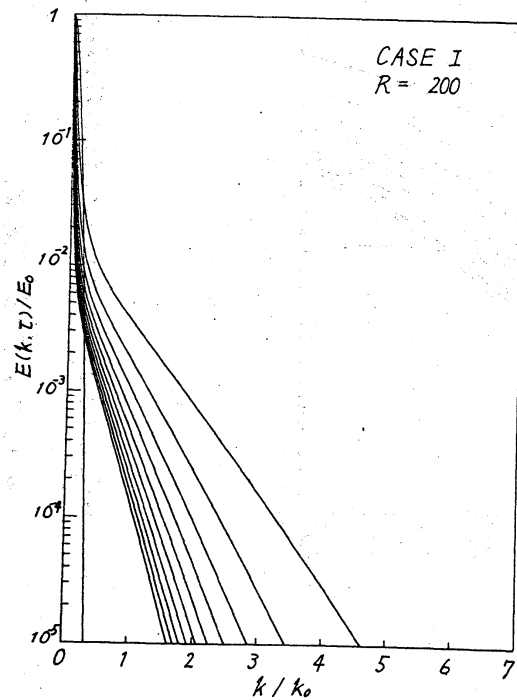


figure 4 energy spectrum, $z = z''$
 $z = k_0^{3/2} E_0^{1/2} t z''$ である。

① energy containing 領域 $E(k, t) \propto k^{-2}$, (6.1)

② k^{-1} 領域 $E(k, t) \propto k^{-1}$, (6.2)

③ 粘性領域 $\ln E(k, t) \propto -k$. (6.3)

領域①の k^{-2} スペクトルは厳密解の漸近形を用いて次のように導くことができる。(5.2)の $u(x, t)$ を用いて速度相関を計算し、 $-L_1 = (-\xi_i + \xi_{i-1})/2$, $L_2 = (\xi_{i+1} - \xi_i)/2$, $V = \eta_{i+1} - \eta_i$, $x - \xi_i = X$ とおき、さらに Fourier 変換するとにより、次のエネルギー・スペクトルを得る。

$$E(k, t) = \frac{1}{L_2 + L_1} \frac{\pi}{R^2} \operatorname{cosech}^2 \frac{2\pi t}{RV} k \quad (6.4)$$

$k \ll \frac{RV}{2\pi t}$ のとき (6.4) はさらに

$$E(k, t) = \frac{1}{L_2 + L_1} \frac{V^2}{4\pi t^2} k^{-2} \quad (6.5)$$

と表わされる。これは (6.1) と一致している。他の研究者の結果もいずれも k^{-2} スペクトルが現われることを示している。たとえば、Jeng et al. (1966) の数値実験、

Meecham & Siegel (1964) の Wiener-Hermite 展開および Hosokawa & Yamamoto の Monte Carlo 法いずれの結果も k^{-2} スペクトルすなわち (6.1) のスペクトルを導いている。

①の領域の k^{-1} スペクトルは (3.12) の方程式の $t \gg 1$, $R \gg 1$, $k \gg O\left(\frac{R}{t}\right)$ での漸近解に一致している。②の領域の $\exp(-\alpha k)$ のスペクトルは、厳密解の漸近形から導いた結果 (6.4) で $k \gg \frac{RV}{2\pi t}$ の極限として

$$E(k, t) = \frac{1}{L_2 + L_1} \frac{4\pi}{R^2} e^{-\frac{4\pi t k}{VR}} \quad (6.6)$$

のように求まる。

figure 2~4 を見るとわかるようにエネルギー・スペクトルは相似形をしている。エネルギー・スペクトルの形をさらによくわたくし調べるために、①、②、③それぞれの領域

で $E(k, t)$ は $E(k, t) = E_S f(k/k_S)$ の形の相似形を
 していろいろ仮定し、 k_S, E_S のふるまいを調べた結果を、
 table 2 にまとめた。

table 2

Energy containing 領域

CASE I

$$k_S \propto t^{-0.660} R^0$$

$$E_S \propto t^0 R^0$$

CASE II

$$k_S \propto t^{-0.385} R^0$$

$$E_S \propto t^{-0.729} R^0$$

 k^{-1} 領域

CASE I

$$k_S \propto t^{-0.400} R^{0.721}$$

$$E_S \propto t^{-0.503} R^{-1.19}$$

CASE II

$$k_S \propto t^{-0.511} R^{0.697}$$

$$E_S \propto t^{-0.554} R^{-0.857}$$

粘性領域

CASE I

$$E(k, t) = a e^{-ct^{0.41} R^{-0.77} k}$$

$$a = 3.01 \times 10^{-3}$$

$$c = 33.6$$

CASE II

$$E(k, t) = a e^{-ct^{0.52} R^{-0.78} k}$$

$$a = 2.02 \times 10^{-3}$$

$$c = 39.4$$

Table 2 の粘性領域における結果と (6.6) で示される結果
 すなわち $E(k, t) = a \exp(-ct^{1.0} R^{1.0} k)$ を比べると、
 (6.6) では k の前の係数が $t^{1.0}$ であるのに対し、table 2

の粘性領域では $t^{0.41}$ (CASE I), $t^{0.52}$ (CASE II) となっている。しかし、これらの相違は、 $\epsilon(t)$ が $\epsilon(t) \sim \epsilon_0 t^\alpha$ であることを考慮に入れるとずいぶん小さくなる。すなわち、(6.6) はこのことを考慮すると、 $t^{1.0}$ が CASE I のときで $t^{0.33}$, CASE II のときで $t^{0.5}$ に訂正されなければならないことがわかる。このように訂正しても、CASE I の場合にはまだ多少の差はあるが、CASE II の場合にはほぼ完全に一致する。

三次元の等方性乱流においては $-5/3$ 乗スペクトルが現われたのに対して、Burgers 乱流においては、はっきりとした $-5/3$ 乗法則が見られず、代わりに -2 乗スペクトルが見られた。粘性領域においては、三次元の等方性乱流では、 $\exp(-\alpha k^{1.5})$ であつたのに対し、Burgers 乱流では、 $\exp(-\alpha k)$ となり明確な相違が見られる。

(2) エネルギー減衰則

数値計算から得られたエネルギー減衰則は、figure 5.6 からわかるように、

$$\text{CASE I} \quad \epsilon(t)/\epsilon_0 = 1.07 t^{-0.665} \quad (6.7)$$

$$\text{CASE II} \quad \epsilon(t)/\epsilon_0 = 0.925 t^{-1.13} \quad (6.8)$$

である。また、table 2 で示されている相似則を用いた

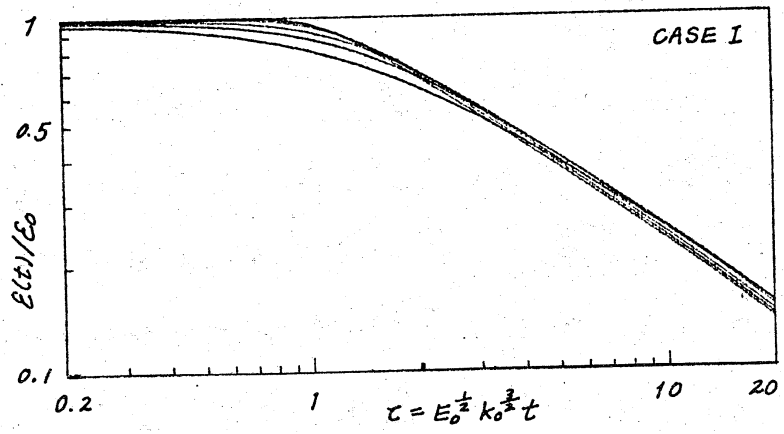


figure 5. Energy decay. CASE I.

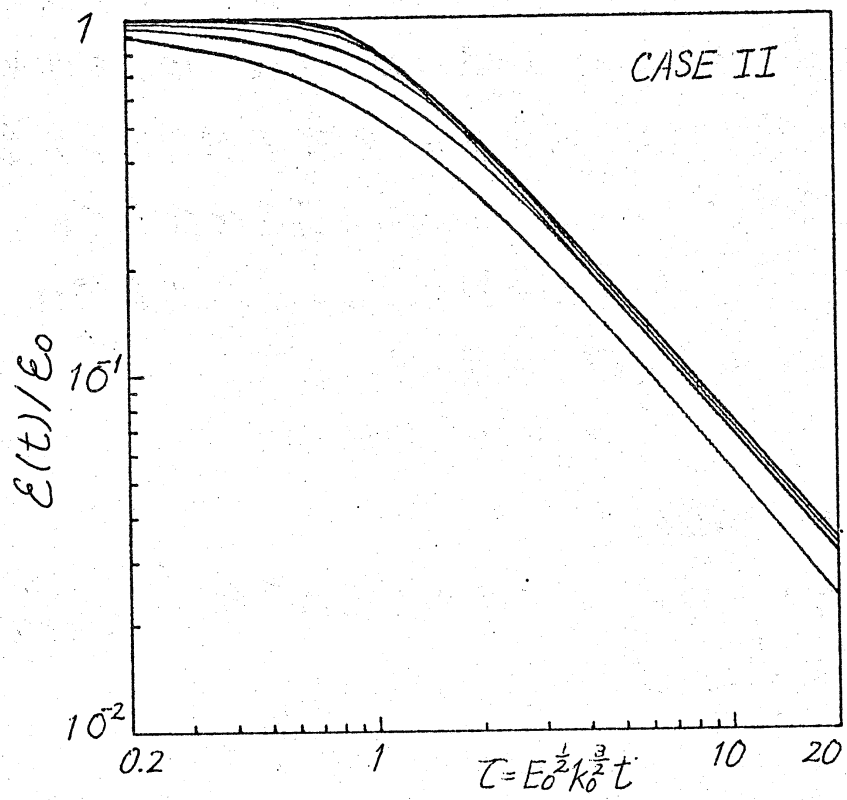


figure 6. Energy decay. CASE II

結果は、

$$\text{CASE I} \quad E(t)/E_0 \propto t^{-0.666}, \quad (6.9)$$

$$\text{CASE II} \quad E(t)/E_0 \propto t^{-1.11} \quad (6.10)$$

とせり、直接に数値計算から得られた結果と consistent である。一方、Tatsumi & Kida のシュレックの統計理論による結果は $R \rightarrow \infty$ で $E(t) = \frac{l_0^2}{4(1-\alpha)t_0^{2\alpha}} t^{2(\alpha-1)}$ であり、

$$J \neq 0 \text{ (CASE I に対す)} \quad E(t) \propto t^{-2/3}, \quad (6.11)$$

$$J = 0 \text{ (CASE II に対す)} \quad E(t) \propto t^{-1} \quad (6.12)$$

とせり、(6.7) は (6.11) と良く一致しているが、(6.8) は (6.12) と多少のギャップが見られる。

これらの結果を他の研究と比べてみよう。Crow & Canavan (1970) の数値実験は CASE II に対おしており、 $R \rightarrow \infty$ で $E(t) \propto t^{-1}$ 、Walton (1970) の CASE II に対おした数値実験は $E(t) \propto t^{-1.25}$ を示し、また、彼の Kraichnan 理論を用いた数値計算では、 $E(t) \propto t^{-1.32}$ を示している。さらに、Yamamoto & Hosokawa (1976) は $E(k, 0) = C_n k^n \exp(-k^2/4)$, $C_n = 1/\{\Gamma[(n+1)/2] 2^{n+1}\}$ の初期条件の下に、いろいろな n の値に対して Monte Carlo 法で数値計算し、 $n=0$ ($J \neq 0$, CASE I) のとき $E(t) \propto t^{-0.73}$, $n=2$ ($J=0$, CASE II) のとき

$\varepsilon(t) \propto t^{-1.7}$ (ただし、これらのべきは彼らの図から、我々が独自に測った。) であることを示している。さらに、彼らは $n \rightarrow \infty$ で $\varepsilon(t) \propto t^{-2}$ となるだろうという推測を述べている。我々の計算は $n=0$ と $n=2$ 以外はないので、この推測を確かめることはできないが、これを確かめることは今後の計算に待たねばならない。

(3) skewness

速度微分の分布の skewness S_0 は次式で定義される。

$$S_0 \equiv - \frac{\langle (\partial u / \partial x)^3 \rangle}{\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle^{3/2}} \quad (6.13)$$

この S_0 はエネルギー・スペクトル $E(k, t)$ とエネルギー伝達関数 $T(k, t)$ を用いて次のように表わすことができる。

$$S_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 T(k, t) dk}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} k^2 E(k, t) dk \right]^{3/2}} \quad (6.14)$$

数値計算では $E(k, t)$, $T(k, t)$ を計算しているので、(6.14) を用いて S_0 を求めることができる。 S_0 の時間による変化を figure 7.8 に示した。この S_0 の漸近的なふるまいを調べると、 $t \gg 1$ で次の形をしていることがわかる。

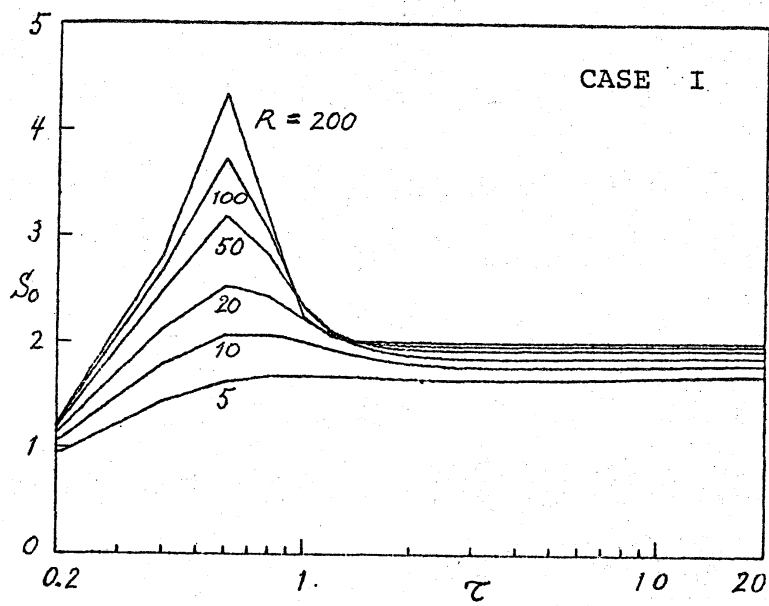


figure 7. skewness. CASE I.

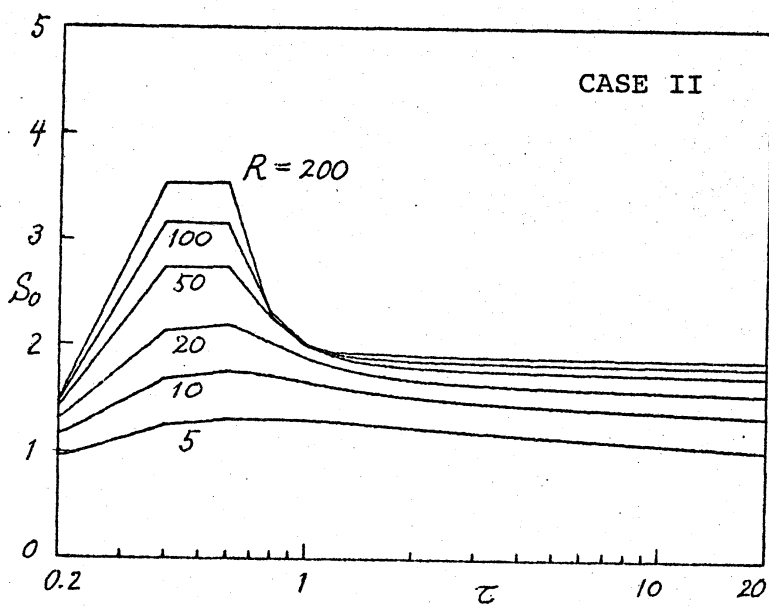


figure 8. skewness. CASE II.

$$\text{CASE I } S_0 \propto t^0 R^0 \sim 2.0, \quad (6.15)$$

$$\text{CASE II } S_0 \propto t^0 R^0 \sim 1.9. \quad (6.16)$$

三次元の等方性乱流の場合は、 S_0 が0.7程度の値であったの
に比較すると、Burgers乱流では、その3倍近くにもなっ
ており、Burgers乱流においては、ショックの存在により縦方
向の縮みが著しく大きいことを示している。

一方、 S_0 の値は厳密解の漸近形を用いて評価するこ
とができる。厳密解の漸近形から $\frac{\partial u}{\partial x}$ を求めると、

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx -\frac{RV^2}{8t^2} \cosh^{-2} \left\{ \frac{RV}{4t} (x - \xi_i) \right\} \quad (6.17)$$

と書ける。確率平均を区間 L での空間平均におきかえ、
この区間にあるショックの数を $N(t)$ とし、 $L \rightarrow \infty$ の極限を
考えると、

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{N(t)} \left(\frac{RV^2}{8t^2} \right)^2 \int_{\xi_i - \varepsilon}^{\xi_i + \varepsilon} \cosh^{-4} \left\{ \frac{RV}{4t} (x - \xi_i) \right\} dx \\ &= \frac{R^2 l(t)^2}{12t^3} \end{aligned}$$

となり、同様に、 $\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\rangle$ についても次式のよ
うに求まる。

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\rangle = -\frac{R^2 l(t)^4}{120t^5}.$$

これらを用いて、 S_0 を求めれば、次式のようになる。

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{R^2 l(t)}{t^{\frac{1}{2}}}$$

ここで、

$$\text{CASE I} \quad l(t) \propto t^{\frac{2}{3}},$$

$$\text{CASE II} \quad l(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$$

であったとを考へ合わせると、 S_0 は次のようになる。

$$\text{CASE I} \quad S_0 \propto t^{\frac{1}{6}}, \quad (6.18)$$

$$\text{CASE II} \quad S_0 = \text{const. in time.} \quad (6.19)$$

(6.19) は (6.16) と一致しているが、(6.18) は (6.15) とわずかに異なっている。

参考のために、同様な取り扱いで flatness factor F_0 も計算でき、

$$F_0 \equiv \frac{\langle (\frac{\partial u}{\partial x})^4 \rangle}{\langle (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \rangle^2} = \frac{9}{70} \frac{R l(t)^2}{t} = \begin{cases} t^{\frac{1}{3}} & \text{CASE I} \\ \text{const. in time} & \text{CASE II} \end{cases}$$

となる = とをつけ加えておく。

(4) 粘性消散長さ

粘性消散長さ λ は、次式で定義され、乱流の速度場における粘性の働く代表的な長さのスケールを定める。

$$\lambda^2 \equiv \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle}. \quad (6.20)$$

(6.20) は $E(k, t)$ を用いて書き表わすことができる。また $\varepsilon(t)$ を用いても表わせる。

$$\lambda^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E(k, t) dk}{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 E(k, t) dk} = -2\nu \frac{\varepsilon(t)}{d\varepsilon(t)/dt}. \quad (6.21)$$

数値計算では $E(k, t)$ を用いて λ の値を求めた。結果は figure 9, 10 で示されている。その漸近的なふるまいは $t \gg 1$ で

$$\text{CASE I} \quad \lambda = 1.92 \frac{1}{k_0} R^{-0.505} t^{0.463}, \quad (6.22)$$

$$\text{CASE II} \quad \lambda = 1.31 \frac{1}{k_0} R^{-0.498} t^{0.499} \quad (6.23)$$

となる。 $\varepsilon(t)$ の減衰則を用いて λ を求めると

$$\text{CASE I} \quad \lambda = 1.73 \frac{1}{k_0} R^{-1/2} t^{1/2}, \quad (6.24)$$

$$\text{CASE II} \quad \lambda = 1.33 \frac{1}{k_0} R^{-1/2} t^{1/2} \quad (6.25)$$

となり、 $E(k, t)$ から求めた結果と consistent である。

一方、ショウワの統計の結果を用いても、 λ を計算することはできる。 $\varepsilon(t) = \frac{l_0^2}{4(1-\alpha)t_0^{2\alpha}} t^{2(\alpha-1)}$ を (6.21) に代入し、

$$\lambda = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1/2} R^{-1/2} t^{1/2} l_0, \quad (6.26)$$

(ε の式、 ν については $R = \frac{l_0^2}{\nu t_0}$ とおいた。) となることがわかる。

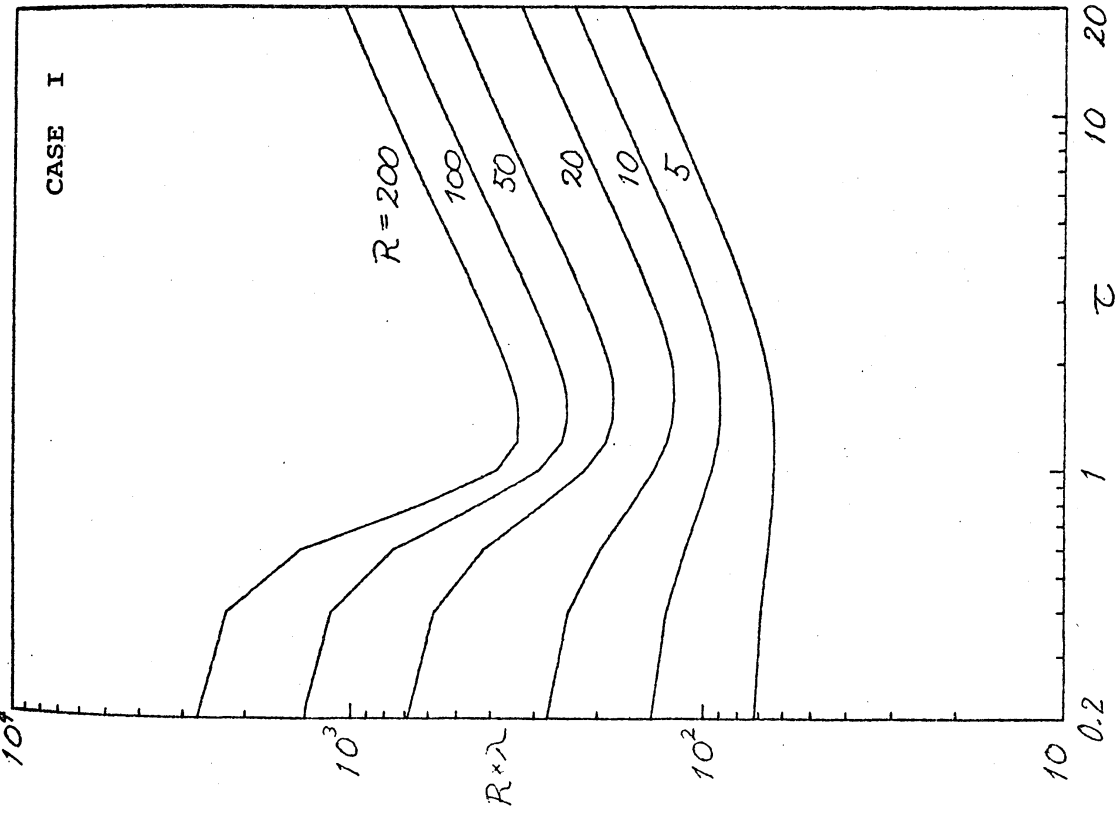


figure 9. 粘性消散長さ

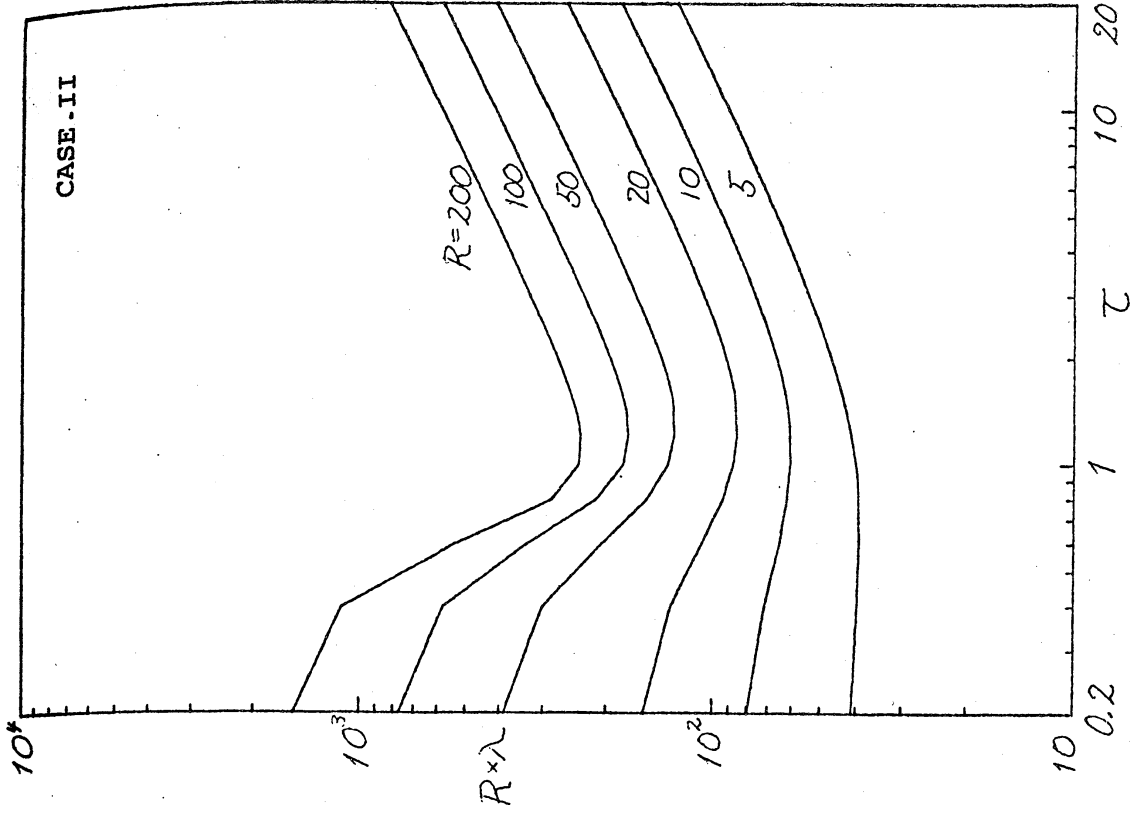


figure 10 粘性消散長さ

これより,

$$J \neq 0 \text{ (CASE I に対処)} \quad \lambda = 1.73 R^{-1/2} t^{1/2} l_0, \quad (6.27)$$

$$J = 0 \text{ (CASE II に対処)} \quad \lambda = 1.41 R^{-1/2} t^{1/2} l_0 \quad (6.28)$$

であることがわかる。(6.27), (6.28) の結果は (6.22), (6.23) と良く一致している。

(5) 粘性消散長さをを用いた Reynolds 数

(4.1) で定義した Reynolds 数は, 初期条件の形に依存して決まる Reynolds 数であり, 必ずしも乱流場の性質を適切に表わしていない。そこで, 初期条件の違いによらない Reynolds 数として, 粘性消散長さ λ と平均 2 乗速度の平方根 $\langle u^2 \rangle^{1/2}$ で決まる Reynolds 数 R_λ が考えられる。

$$\begin{aligned} R_\lambda &= \frac{\langle u^2 \rangle^{1/2} \lambda}{\nu} = \frac{1}{\nu} \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E(k, t) dk}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} k^2 E(k, t) dk \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.29)$$

$E(k, t)$ を用いて数値計算で求めた R_λ のふるまいは,

figure 11, 12 で示す。 R_λ は $t \gg 1$ で次の形をしている。

$$\text{CASE I} \quad R_\lambda = 3.02 R^{0.49} t^{0.081}, \quad (6.30)$$

$$\text{CASE II} \quad R_\lambda = 1.28 R^{0.49} t^{-0.069}. \quad (6.31)$$

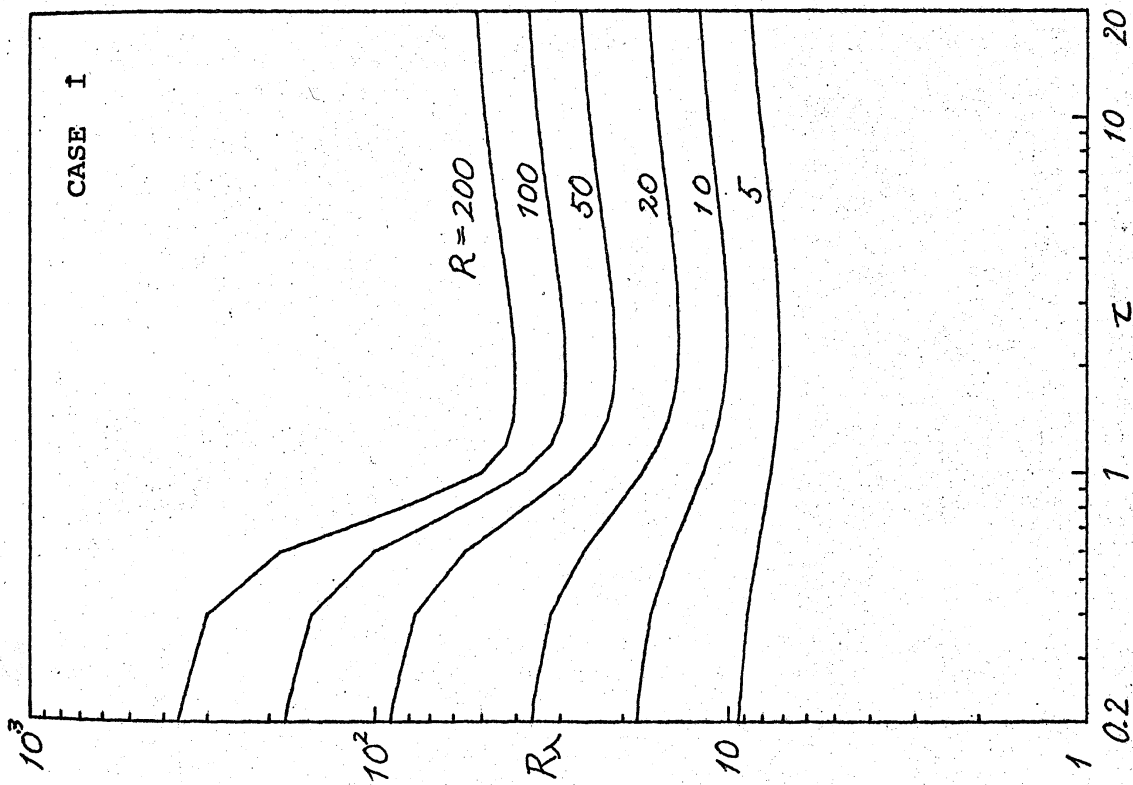


figure 11. $R\lambda$

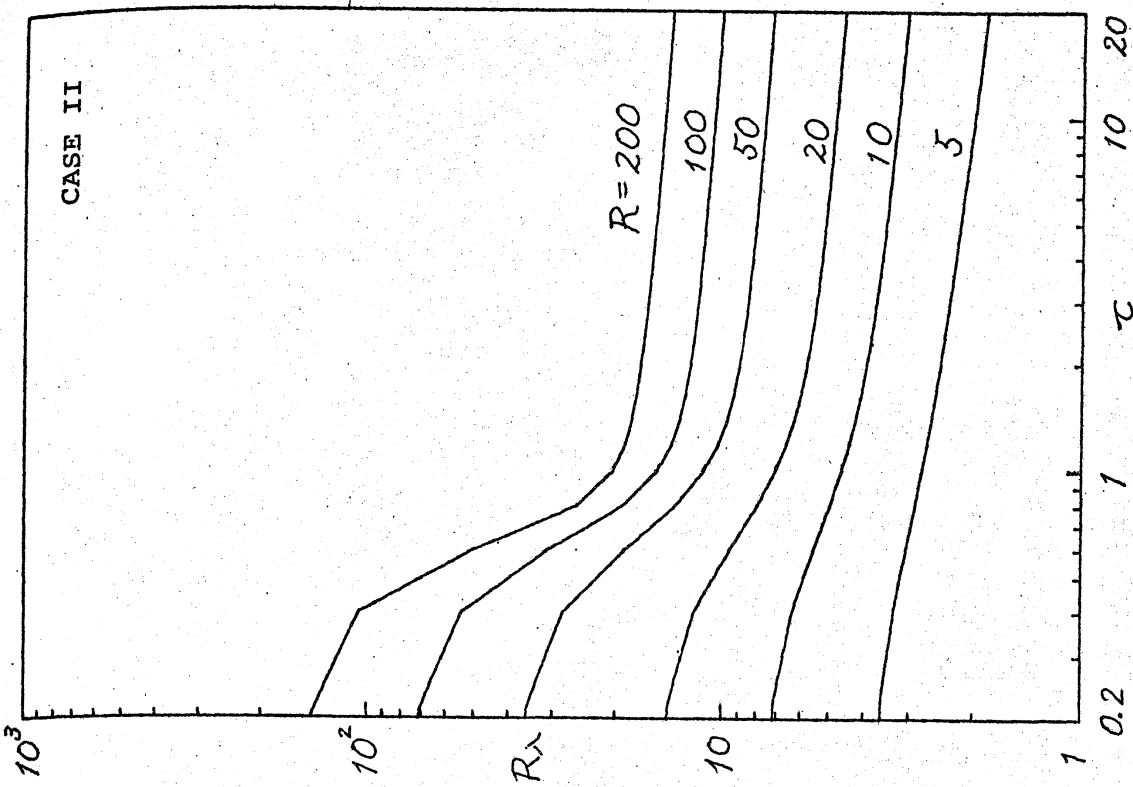


figure 12. $R\lambda$

先に求めた λ , $\varepsilon(t)$ の結果を用いて計算すると,

$$\text{CASE I} \quad R\lambda = 2.64 R^{0.495} t^{0.130}, \quad (6.32)$$

$$\text{CASE II} \quad R\lambda = 1.19 R^{0.502} t^{-0.066} \quad (6.33)$$

となる。また、ショックの統計の結果を用いると

$$\text{CASE I} \quad R\lambda = 2.12 R^{1/2} t^{1/6}, \quad (6.34)$$

$$\text{CASE II} \quad R\lambda = 1.41 R^{1/2} t^0 \quad (6.35)$$

となり、いずれも互いに良く一致している。

§ 7. Discussion

多重尺度キュムラント展開を Burgers 乱流に適用し、種々の統計量を数値計算で求めた結果を示し、これらの結果を Burgers 方程式の厳密解の漸近形とショックの統計から得られる結果と比較し、両者が良く一致していることを明らかにした。Burgers 方程式の厳密解の漸近形が $R \rightarrow \infty$ で正しい解であり、この漸近解から求めた結果と多重尺度キュムラント展開から求めた結果が良く一致したという事実は、多重尺度キュムラント展開が、非常に大きい Reynolds 数においても良い結果を与えることを示している。数値計算の結果は他の研究者の数値実験および理論とも良く一致している。この計算により Burgers 乱流と三次元等方性乱流との相違も明らかになった。

references

- 1) T. Tatsumi, S. Kida & J. Mizushima J. F. M. ν
投稿中
- 2) T. Tatsumi & S. Kida (1972) J. F. M. 55, 659
- 3) D. T. Jeng, R. Foerster, S. Haaland
& W. C. Meecham (1966) Physics of Fluids 9, 2114
- 4) W. C. Meecham & A. Siegel (1964)
Physics of Fluids 7, 1178
- 5) I. Hosokawa & K. Yamamoto (1970)
Physics of Fluids 13, 1683
- 6) S. C. Crow & G. H. Canavan (1970)
J. F. M. 41, 387
- 7) J. J. Walton (1970) Physics of Fluids 13, 1634
- 8) K. Yamamoto & I. Hosokawa (1976)
Physics of Fluids 19, 1423