数理解析研究所講究録
第 299 巻 1977 年 1-7

ゲームの情報論的考察

九大 理　加納省吾
甲斐 裕

通常のゲームでは利得の最大化を目的としているが、碁や将棋のように相手の行動方針を推定することが最も重要な問題である場合が少くない。そこで、ここでは Rényi [1]、Korsh [3] を拡張してゲームを情報論的に定式化し、2つのパラメーター θ_1, θ_2 に関してどの様な時に最大情報量が得られるか幾つかの場合について調べた。

§1. 定義と定式化

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ： 確率空間.

(θ_1, θ_2) ： 確率ベクトル.

$$p_{kl} = P(\omega \in \Omega \mid (\theta_1(\omega), \theta_2(\omega)) = (u_k, v_l)),$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} p_{kl} = 1, \quad p_k \equiv \sum_{l=1}^{n} p_{kl}, \quad q_l \equiv \sum_{k=1}^{m} p_{kl}.$$

$\{\xi_t \equiv ((X_1, Y_1), \cdots, (X_t, Y_t))\}_{t=1,2,\cdots}$ ：確率ベクトルの列.

$$\varphi_{kl}^{(t)}(z^{(t)}) \equiv P'(\xi_t(\omega) \leqq z^{(t)} \mid (\theta_1, \theta_2) = (u_k, v_l)),$$

但し、 $\theta_i \equiv \theta_i(\omega)$, $i=1,2$, $z^{(t)} \equiv (z_1, z_2, \cdots, z_t) \equiv ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_t, y_t)) \in Z^t \equiv R^{2t}$ 。 又,

$$\varphi_k^{(t)}(z^{(t)}) \equiv P'(\xi_t(\omega) \leqq z^{(t)} \mid \theta_1 = u_k) = \frac{\sum_{l=1}^{n} p_{kl}\varphi_{kl}^{(t)}(z^{(t)})}{p_k}.$$

定理1、各 $k, l, t \geqq 1$ と全ての $z^{(t)} \in Z^t$ に対して

$$\varphi_{kl}^{(t)}(z^{(t)}) > 0$$

であれば、次を満す定数 $c > 0$ が存在する。

$$E[H(\theta_1 | \xi_t)] \leqq c \sum_{h=1}^{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} \sum_{l,l'=1}^{n} \sqrt{p_{hl}p_{kl'}} \int_{Z^t} \left\{ \varphi_{hl}^{(t)}(z^{(t)}) \varphi_{kl'}^{(t)}(z^{(t)}) \right\}^{\frac{1}{2}} dz^{(t)}.$$

$E[H(\theta_1|\xi_t)]$ は ξ_t に関する θ_1 の条件付エントロピーの期待値、又、 $\xi_t \equiv \xi_t(\omega)$ 。上式は θ_2 についても同様に成立する。

証明、

$$H(\theta_1|\xi_t) = \sum_{k=1}^{m} P(\theta_1 = u_k | \xi_t) \log \frac{1}{P(\theta_1 = u_k | \xi_t)}$$

Bayes の定理より

$$P(\theta_1 = u_k | \xi_t) = \frac{p_k \varphi_k^{(t)}(\xi_t)}{\sum_{i=1}^{m} p_i \varphi_i^{(t)}(\xi_t)}$$

Rényi [2] と仮定より

$$H(\theta_1 | \xi_t) \leqq c \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} \sqrt{P(\theta_1 = u_k | \xi_t)}$$

となる定数 $c > 0$ が存在する。以上より，

$$E[H(\theta_1|\xi_t)\mid\theta_1=u_h]$$

$$=\frac{1}{p_h}\int_{Z^t} H(\theta_1|z^{(t)})\,p_h\varphi_h^{(t)}(z^{(t)})\,dz^{(t)}$$

$$\leqq C\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{m}\int_{Z^t}\left\{\frac{p_k\varphi_k^{(t)}(z^{(t)})}{\sum_{i=1}^{m}p_i\varphi_i^{(t)}(z^{(t)})}\right\}^{1/2}\varphi_h(z^{(t)})\,dz^{(t)}$$

$$\leqq C\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{m}\sqrt{\frac{p_k}{p_h}}\int_{Z^t}\left\{\varphi_h^{(t)}(z^{(t)})\varphi_k^{(t)}(z^{(t)})\right\}^{1/2}dz^{(t)}$$

$$=C\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{m}\frac{1}{p_h}\int_{Z^t}\left\{\left(\sum_{l=1}^{n}p_{hl}\varphi_{hl}^{(t)}(z^{(t)})\right)\left(\sum_{l=1}^{n}p_{kl}\varphi_{kl}^{(t)}(z^{(t)})\right)\right\}^{1/2}dz^{(t)}$$

$$\leqq C\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{m}\sum_{l,l'=1}^{n}\frac{\sqrt{p_{hl}p_{kl'}}}{p_h}\int_{Z^t}\left\{\varphi_{hl}^{(t)}(z^{(t)})\varphi_{kl'}^{(t)}(z^{(t)})\right\}^{1/2}dz^{(t)}$$

故に

$$E[H(\theta_1|\xi_t)]$$

$$=\sum_{h=1}^{m}p_h\,E[H(\theta_1|\xi_t)\mid\theta_1=u_h]$$

$$\leqq C\sum_{h=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{m}\sum_{l,l'=1}^{n}\sqrt{p_{hl}p_{kl'}}\int_{Z^t}\left\{\varphi_{hl}^{(t)}(z^{(t)})\varphi_{kl'}^{(t)}(z^{(t)})\right\}^{1/2}dz^{(t)}$$

q. e. d.

§2. 独立な場合.

$I_t' \equiv H(\theta_1)-E[H(\theta_1|\xi_t)]$; ξ_t に含まれる θ_1 に関する情報量,

定理2．　$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots$，が互に独立で

$$P'\left((X_t, Y_t) \leqq z_t \mid \theta_1 = u_k, \theta_2 = v_\ell \right) = f_{k\ell}^{(t)}(z_t) > 0 \quad , t=1,2,\cdots$$

とする。このとき全ての $h, k(\neq h), \ell, \ell'$ に対して

$$\prod_{t=1}^{\infty} \lambda_{hk\ell\ell'}^{(t)} = 0$$

であれば

$$\lim_{t \to \infty} I_t' = H(\theta_1) \quad .$$

但し，$\lambda_{hk\ell\ell'}^{(t)} \equiv \int_Z \left\{ f_{h\ell}^{(t)}(z) f_{k\ell'}^{(t)}(z) \right\}^{1/2} dz \quad , \quad Z \equiv R^2 \quad .$

証明　仮定と定理1より

$$E\left[H(\theta_1 \mid \xi_t) \right]$$

$$\leqq C \sum_{h=1}^{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} \sum_{\ell, \ell'=1}^{n} \sqrt{p_{h\ell} p_{k\ell'}} \int_{Z^t} \left\{ \varphi_{h\ell}^{(t)}(z^{(t)}) \varphi_{k\ell'}^{(t)}(z^{(t)}) \right\}^{1/2} dz^{(t)}$$

$$= C \sum_{h=1}^{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} \sum_{\ell\ell'=1}^{n} \sqrt{p_{h\ell} p_{k\ell'}} \prod_{\nu=1}^{t} \int_Z \left\{ f_{h\ell}^{(\nu)}(z) \cdot f_{k\ell'}^{(\nu)}(z) \right\}^{1/2} dz$$

q. e. d.

例．　$f_{k\ell}^{(t)}$ が2次元正規分布 $\{ m(k,\ell)_x, m(k,\ell)_y, \sigma_{tx}, \sigma_{ty}, \rho_t \}$，

$t=1,2,\cdots, \quad 1 \leqq k \leqq m, \quad 1 \leqq \ell \leqq n$ の場合．

$$\lambda_{hk\ell\ell'}^{(t)}$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{8(1-\rho_t^2)} \left\{ \left(\frac{a_{hk\ell\ell'}}{\sigma_{tx}} \right)^2 - \frac{2\rho_t}{\sigma_{tx}\sigma_{ty}} a_{hk\ell\ell'} b_{hk\ell\ell'} + \left(\frac{b_{hk\ell\ell'}}{\sigma_{ty}} \right)^2 \right\} \right]$$

ここで，

$$a_{hk\ell\ell'} \equiv m(h,\ell)_x - m(k,\ell')_x , \quad b_{hk\ell\ell'} \equiv m(h,\ell)_y - m(k,\ell')_y \quad .$$

(1). $a_{hkll'} \cdot b_{hkll'} \geqq 0$ の場合, $|\rho_\nu| \leqq 1$ より.

$$\left(\frac{a_{hkll'}}{\sigma_{tx}}\right)^2 - \frac{2\rho_t}{\sigma_{tx}\sigma_{ty}} a_{hkll'} b_{hkll'} + \left(\frac{b_{hkll'}}{\sigma_{ty}}\right)^2$$

$$\geqq \left(\frac{a_{hkll'}}{\sigma_{tx}} - \frac{b_{hkll'}}{\sigma_{ty}}\right)^2$$

よって $\lambda^{(t)}_{hkll'} \leqq \exp\left\{-\frac{1}{8(1-\rho_\nu^2)}\left(\frac{a_{hkll'}}{\sigma_{tx}} - \frac{b_{hkll'}}{\sigma_{ty}}\right)^2\right\}$

故に $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{1-\rho_t^2}\left(\frac{a_{hkll'}}{\sigma_{tx}} - \frac{b_{hkll'}}{\sigma_{ty}}\right)^2 = \infty$ であれば

$$\prod_{t=1}^{\infty} \lambda_{hkll'} = 0.$$

(2). $a_{hkll'} \cdot b_{hkll'} < 0$ の場合、同様にして

$$\lambda^{(t)}_{hkll'} \leqq \exp\left\{-\frac{1}{8(1-\rho_\nu^2)}\left(\frac{a_{hkll'}}{\sigma_{tx}} + \frac{b_{hkll'}}{\sigma_{ty}}\right)^2\right\}$$

となり、故に $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{1-\rho_t^2}\left(\frac{a_{hkll'}}{\sigma_{tx}} + \frac{b_{hkll'}}{\sigma_{ty}}\right)^2 = \infty$ であれば

$$\prod_{t=1}^{\infty} \lambda^{(t)}_{hkll'} = 0.$$

§3. マルコフ過程の場合.

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots$; マルコフ過程

$\Longleftrightarrow P(\xi_t \mid \theta_1 = u_k, \theta_2 = v_l)$

$$= P^{(1)}_{kl}(X_1, Y_1)\, P^{(2)}_{kl}(X_2, Y_2 \mid X_1, Y_1) \cdots P^{(t)}(X_t, Y_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}),$$

但し $P^{(t)}_{kl}(X_t, Y_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) \equiv P^{(t)}((X_t, Y_t) \mid (X_{t-1}, Y_{t-1}), \theta_1 = u_k, \theta_2 = v_l)$, $t = 1, 2, \cdots$.

又、$g_{kl}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}} \equiv \left(P_{kl}((X_t, Y_t) \leqq z_t \mid (X_{t-1}, Y_{t-1}) = z_{t-1}) \right)'$ とおくと、

$$\varphi_{kl}^{(t)}(z^{(t)}) = g_{kl}^{(1)}(z_1)\, g_{kl}^{2}(z_2)_{z_1} \cdots g_{kl}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}}$$

定理3、$\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots\}$ がマルコフ過程で、全ての $k, l, t \geqq 1$ と、$z^{(t)}$ に対して $\varphi_{kl}^{(t)}(z^{(t)}) > 0$ とする。このとき、各 h、$k(\neq h)$, l, l' に対して

$$\prod_{t=2}^{\infty} \delta_{hkll'}^{(t)} = 0$$

であれば

$$\lim_{t \to \infty} I_t' = H(\theta_1)$$

但し、$$\delta_{hkll'}^{(t)} \equiv \sup_{z_{t-1}} \int \left\{ g_{hl}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}}\, g_{kl'}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}} \right\}^{1/2} dz_t$$

証明、仮定と定理1より

$$E[H(\theta_1 \mid \xi_t)]$$

$$\leqq C \sum_h \sum_{k \neq h} \sum_{l l'} \sqrt{p_{hl} p_{kl'}} \int_{Z^t} \left\{ \left(g_{hl}^{(1)}(z_1) \cdots g_{hl}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}}\right) \cdot \left(g_{kl'}^{(1)}(z_1) \cdots g_{kl'}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}}\right) \right\}^{1/2} dz^{(t)}$$

$$\leqq C \sum_h \sum_{k \neq h} \sum_{l l'} \sqrt{p_{hl} p_{kl'}} \int_Z \left\{ g_{hl}^{(1)}(z_1)\, g_{kl'}^{(1)}(z_1) \right\}^{1/2} \int_Z \cdots \int_Z \left\{ g_{hl}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}}\, g_{kl'}^{(t)}(z_t)_{z_{t-1}} \right\} dz_t\, dz_{t-1} \cdots dz_1$$

$$\leqq C \sum_h \sum_{k \neq h} \sum_{l l'} \sqrt{p_{hl} p_{kl'}} \prod_{\nu=1}^{t} \delta_{hkll'}^{(\nu)} \qquad \text{q.e.d.}$$

〔注〕、定理2、定理3は θ_2 に関しても全く同様に成立する。

参考文献.

[1]. A. Rényi.: " On the amount of information concerning an unknown parameter in a sequence observation." Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. Vol. 9. 1964.

[2]. A. Rényi.: "On some basic problem of statistics from the point of view of information theory." Proc. of 5-th Berkley Symposium: Vol. 1, 1967.

[3]. J. F. Korsh. "On decisions and information concerning an unknown parameter." Information and Control, Vol. 16, 1970.