数理解析研究所講究録
第300巻 1977年 1-25

特殊な半単純リー群のPlancherel公式

職業訓練大　佐野　茂

§1 序

半単純リー群に対するPlancherel公式を決定するという問題について考えてみる。まず一般の局所コンパクト群に対する次の定理が根拠になっている。

Gを局所コンパクト，ユニモジュラーで第2可算公理をみたすポストリミネールなType Iの群としよう。$\hat{G}$をGのユニタリ双対，すなわち，Gの既約ユニタリ表現の同値類から成る集合とする。このとき，

定理A. G上に与えられたHaar measure dgに対して，$\hat{G}$上のpositive measure $d\mu(\pi)$で

$$(1)\quad \int_G |f(g)|^2\,dg = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}\,(\pi(f)\pi(f)^*)\,d\mu(\pi) \qquad \forall f \in L^1(G)\cap L^2(G)$$

をみたすものが唯一つ存在する。

つぎに，Gをacceptableな半単純リー群とする．離散系列の表現も考えるので中心有限としよう．$\mathfrak{g}$をGに対応するリー環，$\mathfrak{h}_1, \cdots, \mathfrak{h}_n$を$G$の内部自己同型で共役とならない$\mathfrak{g}$の極大なCartan部分環の族とし，$H_1, \cdots, H_n$をそれぞれ対応する$G$のCartan部分群としよう．$H_j^0$を$H_j$の中心，$\bar{G}^j = G/H_j^0$，$d_j h$を$H_j$上のHaar measure，$d_j \bar{g}$を$\bar{G}^j$上のleft invariant measureとすると，適当な正数α_j $(1 \leq j \leq n)$が存在して

$$(2)\quad \int_G |f(g)|^2\, dg = \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j \int_{H_j} \left\{ \int_{\bar{G}^j} |f(ghg^{-1})|^2\, d_j \bar{g} \right\} |\Delta^j(h)|^2\, d_j h,$$

但し，$\bar{g} = gH_j \in \bar{G}^j$，$\Delta^j(h) = \xi_\rho(h) \prod_{\alpha > 0} (1 - \xi_\alpha(h^{-1}))$ （αは$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_j)$のルート，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha > 0} \alpha$）．さらに，$\tilde{H}_j = H_j \times \bar{G}^j$，$d_{\tilde{H}_j}(h, \bar{g}) = \alpha_j |\Delta^j(h)|^2\, d_j \bar{g}\, d_j h$とおくと，

$$(2) = \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{\tilde{H}_j} |f(ghg^{-1})|^2\, d_{\tilde{H}_j}(h, \bar{g}).$$

一方，$\hat{H}_j$をCartan部分群H_jに対応する表現主系列（コンパクトCartan部分群に対しては離散系列を考え，一般の主系列についてはHarish-Chandra〔7〕を参照，具体的構成についてはR. Lipsman〔1〕を参照，大体cuspidal parabolic部分群のLanglands分解に対応して連続系列と離散系列とを組み合わせたものだが，正確な定式化をしてglobalな指標式を得るのは問題となる．）$\hat{G}$をPlancherel

公式に出てくる表現とすると,

(3) $$\int_{\hat{G}} tr(\pi(f)\pi(f)^*)\,d\mu(\pi) = \sum_j \int_{\hat{H}_j} tr(\pi(f)\pi(f)^*)\,d\mu_j(\pi)\text{、}$$

可換群に対するPontrjaginの双対性,コンパクト群に対する淡中の双対性,さらに一般の局所コンパクト群に対しては辰馬の双対性が知られている.($G \simeq \hat{\hat{G}}$ 位相群として同型)ここでは内部構造の双対性に着目してみよう.

1°) G'をGの正則な元からなる集合,$H_j' = G' \cap H_j$とすると,

$$G' = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{x \in G} xH_j'x^{-1} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{x \in G} xH_jx^{-1} \subset G,$$

$G' \subset G$は稠密な開部分集合で,補集合$G - G'$はHaar measure 0.

これに対して,

$\bigcup_{j=1}^{n} \hat{H}_j \subset \hat{G}$は開部分集合で,$\hat{G} - \bigcup_{j=1} \hat{H}_j$は measure 0.

2°) (2)式は,Weylの積分公式と呼ばれ(H_j上の measure $|\Delta_j(h)|^2 dh_j(h)$は具体的にJacobianから与えられる)体系全体の中にあって,指標公式,temperedな不変固有超関数の特徴付け等大切な役割を任なってきた、(3)式の measure $d\mu_j(\pi)$を決定する事が大きな問題とされてきたが,$\hat{G}$, $\hat{H}_j$から具体的な意味付けが出来ないであろうか.さらに(3)式は$\hat{G}$上での理論の展開にあって大切な役割が期待できるのではないか.

3°) Weyl 群,Weyl 領域が(G, H_j)と$(\hat{G}, \hat{H}_j)$との上で同じ様に考えられる、離散系列についてはHarish-

Chandra[2], 一般の主系列については(7)を参照.

4°) $\hat{A}_j'$の表現の既約性はHarish-Chandra(7)参照. $\hat{A}_j'$の表現の指標において3°)での$(G, \hat{A}_j')$のWeyl領域から壁への極限を考える、どのWeyl領域から近づくか問題だが; Fourier解析の様に和の半分を考えることにより不変固有超関数が得られるどの様な表現の指標となるかは興味深い(離散系列についてはG. Zuckermanを参照) $\mathfrak{h}_1, \cdots, \mathfrak{h}_n$間においてHirai, T.[4]によりorderの関係が入れられた、さらにglobalに$H_1, \cdots, H_n$間においては連結成分も含めてorderの関係が与えられた.(正確には共役な類に対してである) $\hat{A}_1', \cdots, \hat{A}_n'$に対しても先の壁の所に対応する不変固有超関数を考察することによりorderの概念を導入でき, $H_1, \cdots, H_n$に与えたorderの関係を保つ様にできると思う、又この壁に対応する不変固有超関数を考える方法は平井先生から教えていただいたのですが, Plancherel公式を求める時も大切な概念となりそうです.

5°) 退化系列の表現はR. Lipsmanに一つの定式化の試みがある、Cartan部分群のmeasure 0に対応して構成されるが退化系列は$\hat{G}$上でmeasure 0になる.

以下Plancherel公式を求める. すなわち(3)式の$m_{\mathcal{H}}(\pi)$の決定について考える. Harish-Chandraの一連の研究ではK-spherical関数に分解するという方法でやっているがここでは主系列の表現の

指標を与え，対応するRadon変換の境界値を調べ，Fourier，Laplace変換を用いる方法で求める．連続系列の指標は知られているが，離散系列についてはHarish-Chandra(2)，Hirai,T(7)等の一連の研究で明らかにされた．又他の主系列については一般に求まっていない点が問題だがHirai,T.(4)が大きな役割を荷ないそうである．又Cartan部分群間のorderの関係が複雑な半単純リー群に対し統一的にRadon変換の関係付けが得られるかも不安だが，この点はSp(2,IR)等の場合にうまくいくことが平井先生の共同研究を通して明らかにされてきたので心配ないと思う．G=Sp(p,q)の場合について考えてみるが，SL(n,IR)，SU(p,q)と比べるとWeyl群の構造が複雑な点が問題である．B.D.Roman(1)，Hirai,T(3)を参考にしたい．特にHirai,T(3)で大局的な見通しが与えられている．このやり方で一般の半単純リー群に対してHarish-Chandraの結果(7)を包括し，より具体的なものが得られると思う．

§2．主系列表現の指標．

p，qを$p \geqq q \geqq 1$をみたす整数で，$n=p+q$とする．群Sp(p,q)は，

$$Sp(p,q)=\{ g \in GL(2n,\mathbb{C}) ; {}^t g J_1 g = J_1 ,\ g^* J_2 g = J_2 \}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad 1_n : n\text{次単位行列}, \quad g^* = {}^t\bar{g},$$

で定義される半単純リー群、$G=Sp(p,q)$ とおく、

(2.1) $H_k=H_k^+H_k^-$ $(k=0,\cdots,q)$ を次の様に定義される G の Cartan 部分群とする．

(4) H_k^+: $d(e^{i\varphi_1},\cdots,e^{i\varphi_{p-k}},e^{i\theta_k},\cdots,e^{i\theta_1},e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_k},e^{i\psi_{q-k}},\cdots,e^{i\psi_1},$
$e^{-i\varphi_1},\cdots,e^{-i\varphi_{p-k}},e^{-i\theta_k},\cdots,e^{-i\theta_1},e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_k},e^{-i\psi_{q-k}},\cdots,e^{-i\psi_1})$,

(5) H_k^-:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1_{p-k} & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \mathrm{ch}\,t_k & & & & & \mathrm{sh}\,t_k & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & \iddots & & & & & & & & & & \\
 & & & \mathrm{ch}\,t_1 & \mathrm{sh}\,t_1 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & \mathrm{sh}\,t_1 & \mathrm{ch}\,t_1 & & & & & & & & & & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & \mathrm{sh}\,t_k & & & & & \mathrm{ch}\,t_k & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1_{q-k} & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & 1_{p-k} & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \mathrm{ch}\,t_k & & & & & -\mathrm{sh}\,t_k & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & & \iddots & & \\
 & & & & & & & & & & & \mathrm{ch}\,t_1 & -\mathrm{sh}\,t_1 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & -\mathrm{sh}\,t_1 & \mathrm{ch}\,t_1 & & & \\
 & & & & & & & & & & \iddots & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & -\mathrm{sh}\,t_k & & & & & \mathrm{ch}\,t_k & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 1_{q-k}
\end{array}\right)$$

但し、$\varphi_j,\theta_l,\psi_k,t_j\in\mathbb{R}$，$i=\sqrt{-1}$，$d(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ は対角成分が $a_1,\cdots,a_n$ の対角行列、行列空白部分は 0 とする．

Cartan 部分群 $H_0,H_1,\cdots,H_q$ は G の内部自己同型で共役とならない最大の族となる、

(2.2) $h\in H_k$ を(4),(5)で与えられる行列の積とする、その固有値は
$e^{i\varphi_1},\cdots,e^{i\varphi_{p-k}},e^{z_k},\cdots,e^{z_1},e^{z_{-1}},\cdots,e^{z_{-k}},e^{i\psi_{q-k}},\cdots,e^{i\psi_1},e^{-i\varphi_1},\cdots,e^{-i\varphi_{p-k}},e^{\bar z_k},\cdots,e^{\bar z_1},$
$e^{\bar z_{-1}},\cdots,e^{\bar z_{-k}},e^{-i\psi_{q-k}},\cdots,e^{-i\psi_1}$，$(z_j=t_j+i\theta_j,\ z_{-j}=-t_j+i\theta)$ となる．h の座標として，$(\Phi_1,\cdots,\Phi_{p-k},z_1,\cdots,z_k,\Psi_1,\cdots,\Psi_{q-k},z_{-1},\cdots,z_{-k})$，

但し，$\Phi_j=i\varphi_j$ $(1\leqq j\leqq p-k)$，$\Psi_j=i\psi_j$ $(1\leqq j\leqq q-k)$

$z_j=t_j+\Theta_j$，$z_{-j}=-t_j+\Theta_j$，$\Theta_j=i\theta_j$ $(1\leqq j\leqq k)$，をとり．簡単

に，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と表わすことにする．正のルート系 P を

$$P = \{ \, e^{x_i - x_j} \quad 1 \leqq i < j \leqq n, \quad e^{x_i + x_j} \quad 1 \leqq i \leqq j \leqq n \, \},$$

で与えるものとする．P_-, S_I, S_R をそれぞれ正のコンパクト，singular imaginary，real ルートからなる集合とすると

$$\begin{aligned} P_- = \{ \; & e(i\varphi_j - i\varphi_l), \quad e(i\varphi_j + i\varphi_l) \quad 1 \leqq j < l \leqq p-k \\ & e(2i\varphi_j) \quad 1 \leqq j \leqq p-k \\ & e(i\psi_j - i\psi_l), \quad e(i\psi_j + i\psi_l) \quad 1 \leqq j < l \leqq q-k \\ & e(2i\psi_j) \quad 1 \leqq j \leqq q-k \\ & e(2i\theta_j) \quad 1 \leqq j \leqq k \; \}, \end{aligned}$$

$$S_I = \{ \; e(i\varphi_j - i\psi_l), \quad e(i\varphi_j + i\psi_l) \quad 1 \leqq j \leqq p-k, \ 1 \leqq l \leqq q-k \; \},$$

$$S_R = \{ \; e(2it_j) \quad 1 \leqq j \leqq k \; \},$$

となる．他の正のルートは complex ルートになる．($\exp(a)$ を $e(a)$ とした)

$h \in H_k$ の座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ が与えられているとき，

$$\begin{aligned} \Delta^k(h) &= \prod_{1 \leqq j < l \leqq n} (e^{x_j} - e^{x_l}) \prod_{1 \leqq j < l \leqq n} (1 - e^{-(x_j + x_l)}) \prod_{1 \leqq j \leqq n} (e^{x_j} - e^{-x_j}) \\ &= \prod_{1 \leqq j < l \leqq n} (e^{(x_j - x_l)/2} - e^{-(x_j - x_l)/2}) (e^{(x_j + x_l)/2} - e^{-(x_j + x_l)/2}) \cdot \\ &\quad \prod_{1 \leqq j \leqq n} (e^{x_j} - e^{-x_j}) \end{aligned}$$

$$\Delta_R^k(h) = \prod_{1 \leqq j \leqq k} (1 - e^{-2t_j})$$

$$\varepsilon_R^k(h) = \operatorname{sgn}(\Delta_R^k(h))$$

とする．

$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $X = (X_1, \cdots, X_n)$ とする.

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \quad \frac{\partial}{\partial \Psi_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \psi_j}, \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{-j}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial t_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\right)$$

で与える. また n 変数の多項式

$$L(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \prod_{1 \leq j < l \leq n} (y_j - y_l) \prod_{1 \leq j < l \leq n} (y_j + y_l) \prod_{j=1,\cdots,n} 2y_j$$

において,

$$L(X) = \prod_{1 \leq j < l \leq n} (X_j - X_l) \prod_{1 \leq j < l \leq n} (X_j + X_l) \prod_{j=1,\cdots,n} 2X_j$$

とおく. さらに

$$H_k' = \{ h \in H_k : \Delta^k(h) \neq 0 \}, \quad H_k'(R) = \{ h \in H_k ; \Delta_R^k(h) \neq 0 \}$$

とする.

(2.4) (G, H_k) の Weyl group を W_k とする. すなわち, G の内部自己同型で H_k を不変にするもの. W_k は次の変換 (i), …, (vii) により生成される.

(9)
- (i) $\Phi_1, \cdots, \Phi_{p-k}$ permutation
- (ii) $\Psi_1, \cdots, \Psi_{q-k}$ permutation
- (iii) $\Phi_j \leftrightarrow -\Phi_j$ transformation
- (iv) $\Psi_l \leftrightarrow -\Psi_l$ transformation
- (v) $(z_1, z_{-1}), \cdots, (z_k, z_{-k})$ permutation
- (vi) $z_j \leftrightarrow z_{-j}$, i.e. $t_j \leftrightarrow -t_j$ transformation
- (vii) $z_j \leftrightarrow -z_{-j}$ i.e. $\theta_j \leftrightarrow -\theta_j$ transformation.

$w \in W_k$ に対し, $\varepsilon(w)$, $\varepsilon'(w)$ を次の様に定義する.

$$\begin{cases} \varepsilon_R^k(wh)\Delta^k(wh) = \varepsilon(w)\,\varepsilon_R^k(h)\,\Delta^k(h), & h \in H_k', \\ \varepsilon_R^k(wh) = \varepsilon'(w)\,\varepsilon_R^k(h). \end{cases}$$

H^k 上の関数 $f(h)$, $g(h)$ が, $f(wh)=\varepsilon(w)f(h)$, $g(wh)=\varepsilon'(w)g(h)$ を満足するとき,

(10)

W_k	$f(h)$	$g(h)$
(i)	skew-symmetric	symmetric
(ii)	skew-symmetric	symmetric
(iii)	odd	even
(iv)	odd	even
(v)	symmetric	symmetric
(vi)	even	odd
(vii)	odd	even

となる、

(2.5) $\hat{A}_0$ を決定する、これは離散系列である. G' を G の正則な元からなる集合とする. π を G 上の指標とすると, 不変固有超関数となり, G 上局所可積分関数, G' では解析関数である、$K^k(h)=\varepsilon_R^k(h)\Delta^k(h)\pi(h)$ $(h\in H_k)$ とおくと, $H_k(R)$ 上の解析関数に拡張でき, π は $K^k(h)$ $(0\leqq k\leqq q)$ で決定される、(Hirai, [4] 参照)

以下, 離散系列, すなわち, 2乗可積分な既約ユニタリ表現の指標を述べる、$c_1\geqq c_2\geqq\cdots\geqq c_n\geqq 0$ をみたす整数からなる行を $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. $I_n=\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ の I_n における補集合を J とする、$i_1<i_2<\cdots<i_p$, $j_1<j_2<\cdots<j_q$ としておこう. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$ をそれぞれ I, J の k-行とする. α, β の成分からなる集合をそれぞれ $\bar{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$, $\bar{\beta}=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$ とする.

$$\varepsilon_I=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p & j_1 & j_2 & \cdots & j_q\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\alpha,\beta,I,J)=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{p-k} & i_{p-k+1} & i_{p-k+2} & \cdots & i_p \\ i_1' & i_2' & \cdots & i_{p-k}' & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix}$$
$$\times\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_{q-k} & j_{q-k+1} & j_{q-k+2} & \cdots & j_q \\ j_1' & j_2' & \cdots & j_{q-k}' & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix}$$

但し，$i_1', i_2', \ldots, i_{p-k}' \in I-\bar{\alpha}$，$j_1', j_2', \ldots, j_{q-k}' \in J-\bar{\beta}$ で，$i_1'<i_2'<\cdots<i_{p-k}'$，$j_1'<j_2'<\cdots<j_{q-k}'$ をみたすものとする．任意の互いに違なる I_n の元 a, b に対し，$z=t+i\theta\in\mathbb{C}$ の関数を

(11) $$\xi(z;c;a,b)=\operatorname{sgn}(a-b)\{e(-|c_a-c_b||t|+(c_a+c_b)i\theta)-e(-|c_a-c_b||t|-(c_a+c_b)i\theta)\}$$
$$+e(-(c_a+c_b)|t|+(c_a-c_b)i\theta)-e(-(c_a+c_b)|t|-(c_a-c_b)i\theta)$$
$$=\operatorname{sgn}(a-b)\{e(-|c_a-c_b||t|+(c_a+c_b)i\theta)-e(-|c_a-c_b||t|-(c_a+c_b)i\theta)$$
$$-e(-(c_a+c_b)|t|+|c_a-c_b|i\theta)+e(-(c_a+c_b)|t|-|c_a-c_b|i\theta)\}$$

で定ぎする．$\xi(z;c;a,b)=-\xi(z;c;b,a)$ で

$$\xi(z;c;a,b)=\begin{cases} -\{e(c_a z-c_b\bar{z})-e(c_a\bar{z}-c_b z)-e(c_a z+c_b\bar{z}) \\ \quad +e(c_a\bar{z}+c_b z)\} & a<b,\ t<0 \\ e(-c_a\bar{z}+c_b z)-e(-c_a z+c_b\bar{z})-e(c_a\bar{z}+c_b z) \\ \quad +e(c_a z+c_b\bar{z}) & a>b,\ t<0 \end{cases}$$

となる．$M=\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ を I_n の部分集合で，$m_1<m_2<\cdots<m_r$ としよう．$y_1, y_2, \ldots, y_r\in\mathbb{C}$ の関数を

(12) $$D(y_1,y_2,\ldots,y_r:c:M)=|y_1^a, y_2^a, \ldots, y_r^a|_{a=a_1,\ldots,a_r}$$

で定義する．但し，$a_j=c_{m_j}$ $(1\leqq j\leqq r)$ で，右辺は j 番目の列が $y_1^{a_j}, y_2^{a_j}, \ldots, y_r^{a_j}$ $(1\leqq j\leqq r)$ で与えられる $r\times r$-行列とする．さらに $A=\{1,-1\}$，$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_r)\in A^r$，$\operatorname{sgn}\varepsilon=\prod_{i=1}^{r}\operatorname{sgn}\varepsilon_i$ に対し，

(13) $$\tilde{D}(y_1,y_2,\ldots,y_r:c:M)=\sum_{\varepsilon\in A^r}\operatorname{sgn}\varepsilon\,|y_1^{\varepsilon_1 a}, y_2^{\varepsilon_2 a}, \ldots, y_r^{\varepsilon_r a}|_{a=a_1,\ldots,a_r}$$

と定義する．以上の定義を用いて，$h\in H_k'(R)$ $(0\leqq k\leqq q)$ に対し，

(14) $$K^k_{I,c}(h) = \varepsilon_I \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon(\alpha,\beta,I,J)\, \tilde{D}(e^{\Phi_1}, e^{\Phi_2}, \cdots, e^{\Phi_{p-k}} : c ; I-\alpha) \times \tilde{D}(e^{\Psi_1}, e^{\Psi_2}, \cdots, e^{\Psi_{q-k}} ; c ; J-\beta) \times \prod_{j=1}^{k} \xi(z_j : c ; \alpha_j, \beta_j)$$

とする．但し α,β はそれぞれ I, J の元から成る k-行全体に関する和で，Φ_j, Ψ_ℓ, z_j は h の成分を表わす．さらに

(15) $$\pi_{I,c}(h) = (\varepsilon^k_R(h)\Delta^k(h))^{-1} K^k_{I,c}(h) \qquad (h \in H'_k)$$

とおくと，$\pi_{I,c}$ は G 上の不変固有超関数を与える．$c_1 > c_2 > \cdots > c_n > 0$ のとき 2 乗可積分表現の指標となる．逆に任意な G の既約な 2 乗可積分表現の指標はある $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > 0$ に対する $\pi_{I,c}$ で与えられる．Harish-Chandra [2] の結果を用いて，global な指標公式を求めるというのは大切な問題だったが，Hirai [7][8] により，一般の半単純リー群に対して具体的に求まった．$c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots \geqq c_n \geqq 0$ のとき，

(16) $$K^k_c = \sum_I K^k_{I,c}, \quad \pi_c = \sum_I \pi_{I,c}$$

，I は I_n の p 個の元の組に関する和，とおく．位数 n の対称群 S_n，$A = \{\pm 1\}$ に対し，

$$\sigma \in S_n, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in A^n, \quad \varepsilon\sigma c = (\varepsilon_1 c_{\sigma(1)}, \cdots, \varepsilon_n c_{\sigma(n)})$$

とし，

(17) $$K^k_{\varepsilon\sigma c} = \operatorname{sgn}\varepsilon \operatorname{sgn}\sigma K^k_c, \quad \pi_{\varepsilon\sigma c} = \operatorname{sgn}\varepsilon \operatorname{sgn}\sigma\, \pi_c$$

で定義する．$L(c) = 0$ なら，$K^k_c = 0$，$\pi_c = 0$ である．任意の c に対して，$h \in H'_k(R)$，

(18) $$\gamma^k_{I,c}(h) = \sum_{\varepsilon \in A^p} \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\zeta \in A^q} \sum_{\tau \in S_q} \Big[\prod_{j=1}^{p-k} e(\varepsilon_j a_{\sigma(j)}, \Phi_j) \prod_{\ell=1}^{q-k} e(\zeta_\ell b_{\tau(\ell)}, \Psi_\ell) \times \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sgn} t_j \; e\{ -|\varepsilon_{p-k+j} a_{\sigma(p-k+j)} - \zeta_{q-k+j} b_{\tau(q-k+j)}|\,|t_j| + (\varepsilon_{p-k+j} a_{\sigma(p-k+j)} + \zeta_{q-k+j} b_{\tau(q-k+j)})\Theta_j \} \Big].$$

但し，$a_\ell = c_{i_\ell}$ $(1 \leqq \ell \leqq p)$，$b_\ell = b_{j_\ell}$ $(1 \leqq \ell \leqq q)$．

(19) $\quad \zeta_c^k(h) = \sum_I \zeta_{I,c}^k$

とする．$h \in H_k'(\mathbb{R})$，

(20) $$\delta^k(h;\tau,c) = \prod_{j=1}^{p-k} e(c_j \Phi_j) \prod_{\ell=1}^{q-k} e(c_{p+\ell}\Psi_\ell) \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sgn}(t_j)\, e\{-|c_{p-k+j} - c_{n-k+j}|\,|t_j| + (c_{p-k+j} + c_{n-k+j})\theta_j\}$$

とおくと，

$$\zeta_c^k(h) = \sum_{\varepsilon \in A^n} \sum_{\tau \in S_n} \delta^k(h;\varepsilon\tau c) \qquad \varepsilon\tau c = (\varepsilon_1 c_{\tau(1)}, \varepsilon_2 c_{\tau(2)}, \cdots, \varepsilon_n c_{\tau(n)})$$

が成立．

補題 2.1. $c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots \geqq c_n \geqq 0$ をみたす c と I に対し，

$$L\zeta_{I,c}^k = L(c)\, K_{I,c}^k \qquad (0 \leqq k \leqq q),$$

又，任意の c に対し，

$$L\zeta_c^k = L(c)\, K_c^k \qquad (0 \leqq k \leqq q),$$

が成立つ．

(2.6) $\hat{H}_q'$ を決定する．これは連続主系列である．$c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots \geqq c_n \geqq 0$ を満たす．整数の行を $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$．$m_1, m_2, \cdots, m_q$ を整数，$ip_1, ip_2, \cdots, ip_q$ $(i = \sqrt{-1},\ p_j \in \mathbb{R})$ を純虚数とする．

$$d_j = \tfrac{1}{2}(m_j + ip_j),\ d_{-j} = \tfrac{1}{2}(m_j - ip_j) \qquad (1 \leqq j \leqq q)$$

$$d = (d_1, d_2, \cdots, d_q, d_{-1}, d_{-2}, \cdots, d_{-q}), \quad \chi = (c, d),$$

とおく．G 上の不変固有超関数 π_χ を次の様に与える．

(21) $\quad K_\chi^k(h) = \varepsilon_R^k(h)\, \Delta^k(h)\, \pi_\chi(h), \quad h \in H_k$

とおく. ここで

(Q2) $$K_\chi^k(h)=0 \qquad 0\leqq k\leqq q-1$$

$$K_\chi^k(h)=(-1)^{q(q+1)/2}\sum_{\varepsilon\in A^{p-q}} \operatorname{sgn}\varepsilon \left| e(\varepsilon_1 c\Phi_1)\ e(\varepsilon_2 c\Phi_2)\cdots e(\varepsilon_{p-q} c\Phi_{p-q})\right|_{c=c_1,\cdots,c_{p-q}}$$

$$\times\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\varepsilon,\zeta\in A^q} \operatorname{sgn}\varepsilon\ e(\varepsilon_1 m_1\Theta_{\sigma(1)}+i\zeta_1 p_1 t_{\sigma(1)})$$

$$\cdots$$

$$e(\varepsilon_q m_q\Theta_{\sigma(q)}+i\zeta_q p_2 t_{\sigma(q)})$$

又

(Q3) $$\xi_R^q(h)\Delta^q(h)=(-1)^{q(q+1)/2}\prod_{j=1}^{p-q}(e^{\Phi_j}-e^{-\Phi_j})\prod_{j=1}^{q}(e^{\Theta_j}-e^{-\Theta_j})\prod_{j=1}^{q}|e^{z_j}-e^{-z_j}|^2$$

$$\prod_{1\leqq j<l\leqq p-q}(e^{(\Phi_j-\Phi_l)/2}-e^{-(\Phi_j-\Phi_l)/2})\prod_{1\leqq j<l\leqq p-q}(e^{(\Phi_j+\Phi_l)/2}-e^{-(\Phi_j+\Phi_l)/2})$$

$$\prod_{1\leqq j\leqq q}|e^{t_j}-e^{-t_j}|$$

$$\prod_{1\leqq j<l\leqq n,\ p-q<l}|e^{(x_j-x_l)/2}-e^{-(x_j-x_l)/2}|\prod_{1\leqq j<l\leqq n,\ p-q<l}|e^{(x_j+x_l)/2}-e^{-(x_j+x_l)/2}|$$

但し, $(x_j,x_l)=(z_j',z_j)$ は除く.

で与えられる.

π_χが既約ユニタリ表現の指標であることを示す. Gの部分群

(Q4)

$$Q_1:\begin{pmatrix}\begin{matrix}\alpha&\\&1_q\end{matrix}&&\beta&\\&1_q&&\\-\bar\beta&&\begin{matrix}\bar\alpha&\\&1_q\end{matrix}&\\&&&1_q\end{pmatrix}\qquad {}^t\alpha\bar\alpha+{}^t\bar\beta\beta=1_{p-q},\quad {}^t\bar\alpha\beta={}^t\beta\bar\alpha$$

$$Q_2:\begin{pmatrix}\begin{matrix}1_{p-q}&\\&\beta\end{matrix}&&\alpha&\\&\beta'&&-\alpha\\-\bar\alpha&&\bar\beta&\\&\bar\alpha&&\bar\beta'\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{l}\alpha=D(\alpha_1,\cdots,\alpha_q),\quad |\alpha_j|=1\\ \left\{\begin{array}{l}\beta=D(\beta_1,\cdots,\beta_q)\\ \beta'=D(\beta_q,\cdots,\beta_1)\end{array}\right.\quad |\beta_j|=1\end{array}$$

で与えると、直積 Q_1Q_2 は $K=Sp(p)\times Sp(q)$ のコンパクト部分群となる. $R=Q_1Q_2H_q$ は H_q の G における中心化群である. Mを

Rの有限次元既約ユニタリ表現でその指標は

(2.5) $\omega_{c,d}(h)$

$$= \frac{\sum_{\varepsilon \in A^{p-q}} \operatorname{sgn}\varepsilon \left| e(\varepsilon_1 c \Phi_1) \cdots e(\varepsilon_{p-q} c \Phi_{p-q}) \right|_{c=c_1,\cdots,c_{p-q}} \sum_{\zeta \in A^q} \operatorname{sgn}\zeta \, e(\zeta_1 m_1 \Theta_1 + \cdots + \zeta_q m_q \Theta_q) \prod_{j=1}^{q} e(i\rho_j t_j)}{\prod_{1 \leqq j < l \leqq p-q} (e^{(\Phi_j - \Phi_l)/2} - e^{-(\Phi_j - \Phi_l)/2})(e^{(\Phi_j + \Phi_l)/2} - e^{-(\Phi_j + \Phi_l)/2}) \prod_{1 \leqq j \leqq p-q} (e^{\Phi_j} - e^{-\Phi_j}) \prod_{1 \leqq j \leqq q} (e^{\Theta_j} - e^{-\Theta_j})},$$

で与えられているものとする．$\mathfrak{g}$をGのリー環，$\mathfrak{h}_q$をH_qに対応する部分環とする．これはCartan分解$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$，

$$\mathfrak{k} = \{ X \in \mathfrak{g} \,;\, {}^t\bar{X} = -X \}, \quad \mathfrak{p} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & B & 0 & C \\ {}^tB & 0 & {}^tC & 0 \\ \hline 0 & \bar{C} & 0 & -\bar{B} \\ {}^t\bar{C} & 0 & -{}^tB & 0 \end{array} \right) ; B, C \in M(p, q \,; \mathbf{C}) \right\},$$

に対応するCartan involutionに関して不変である．$\mathfrak{g}$のIwasawa分解を$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$とし，$\mathfrak{n}$に対応する$G$の部分群を$N$とする．

RNはGのParabolic部分群となる．MをRN上の表現に$M(rn) = M(r)$，$rn \in RN$で拡張する．

(2.6) $$\pi^M = \operatorname*{Ind}_{RN \uparrow G} M$$

とすると，その指標はπ_χとなる．(Hirai, P (1))．$c_1 > c_2 > \cdots > c_{p-q} > 0$，$\prod_{1 \leqq i < j \leqq q} (\rho_i - \rho_j) \prod_{1 \leqq i \leqq j \leqq q} (\rho_i + \rho_j) \neq 0$，$\prod_{1 \leqq j \leqq q} m_j \neq 0$に対して$\pi^M$は既約ユニタリ表現となり，他の場合には既約ユニタリ表現の有限和となる．

(F. BruhatのR.I.G.参照) $\sigma \in S_{p-q}$，$\varepsilon \in A^{p-q}$に対し，

(2.7) $K^k_{\varepsilon\sigma c, d} = \operatorname{sgn}\varepsilon \operatorname{sgn}\sigma \, K^k_{c,d}$，$\pi_{\varepsilon\sigma c, d} = \operatorname{sgn}\varepsilon \operatorname{sgn}\sigma \, \pi_{c,d}$

とおく．$\prod_{1 \leqq j < l \leqq p-q} (c_j - c_l) \prod_{1 \leqq j \leqq l \leqq p-q} (c_j + c_l) = 0$ ならば $K^k_{c,d} = 0$，$\pi_{c,d} = 0$となる．

任意の整数から成る行 $c=(c_1, c_2, \cdots, c_{p-q})$，と先の $d=(d_1, d_2, \cdots, d_q, d_{-1}, d_{-2}, \cdots, d_{-q})$ に対し，$R \in H_q$，

(2.8) $$\begin{aligned} \delta^q(R;x) &= \delta^q(R;c,d) \\ &= \prod_{j=1}^{p-q} e(c_j \Xi_j) \prod_{j=1}^{q} \{e(d_j z_j + d_{-j} z_{-j}) - e(d_{-j} z_j + d_j z_{-j})\} \\ &= \prod_{j=1}^{p-q} e(c_j \Xi_j) \prod_{j=1}^{q} e(m_j \theta_j) \{e(ip_j t_j) - e(-ip_j t_j)\}, \end{aligned}$$

又，

(2.9) $$\begin{aligned} \eta_x^q(R) &= \eta_{c,d}^q(R) \\ &= \sum_{\varepsilon \in A^{p-q}} \sum_{\sigma \in S_{p-q}} \sum_{\zeta \in A^q} \sum_{\tau \in S_q} \operatorname{sgn} \zeta\, \delta^q(R; \varepsilon\sigma c : \zeta\tau d) \\ &= \sum_{\varepsilon \in A^{p-q}} \sum_{\sigma \in S_{p-q}} \sum_{\zeta \in A^q} \sum_{\tau \in S_q} \delta^q(R; \varepsilon\sigma c ; \zeta\tau m, \tau p), \end{aligned}$$

但し，$\varepsilon\sigma c = (\varepsilon_1 c_{\sigma(1)}, \varepsilon_2 c_{\sigma(2)}, \cdots, \varepsilon_{p-q} c_{\sigma(p-q)})$，

$\zeta\tau d = (\zeta_1 d_{\tau(1)}, \zeta_2 d_{\tau(2)}, \cdots, \zeta_q d_{\tau(q)}, \zeta_1 d_{-\tau(1)}, \zeta_2 d_{-\tau(2)}, \cdots, \zeta_q d_{-\tau(q)})$，

と定義する．

補題2.2.

$$L\, \eta_x^q(R) = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} L(x)\, K_x^q(R) \quad , R \in H_q,$$

但し，$L(x) = L(c_1, c_2, \cdots, c_{p-q}, d_1, d_2, \cdots, d_q, d_{-1}, d_{-2}, \cdots, d_{-q})$．

(2.7) $\hat{H}'_r$ $(1 \leqq r \leqq q-1)$ を決定する．$c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots \geqq c_{n-2r} \geqq 0$ をみたす整数の行を $c=(c_1, c_2, \cdots, c_{n-2r})$，$I_{n-2r} = \{1, 2, \cdots, n-2r\}$ の $p-r$ コの元からなる I_{n-2r} の部分集合を I とする．$m_1, m_2, \cdots, m_r$ を整数，$ip_1, ip_2, \cdots, ip_r$．$(i=\sqrt{-1}, p_j \in \mathbb{R})$ を純虚数とする．

$$d_j = \frac{1}{2}(m_j + ip_j), \quad d_{-j} = \frac{1}{2}(m_j - ip_j),$$

$$d=(d_1, d_2, \cdots, d_r, d_{-1}, d_{-2}, \cdots, d_{-r}), \quad \chi=(c, d)$$

とおく．G上の不変固有超関数$\pi_{I,\chi}$を次の様に与える．

(30) $$K^k_{I,\chi}(h) = \varepsilon^k_R(h)\, \Delta^k(h)\, \pi_{I,\chi}(h) \qquad (h \in H_k')$$

とする．ここで，

(31) $$K^k_{I,\chi}(h) = 0 \qquad (0 \leqq k < r)$$

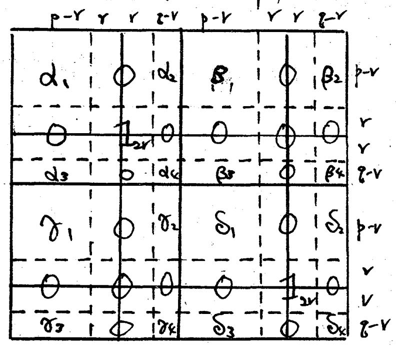
$$K^k_{I,\chi}(h) = (-1)^{(q+r)r} \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(r) \\ \sigma(r+1)<\cdots<\sigma(k)}} K^r_d(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(r)}, z_{-\sigma(1)}, \cdots, z_{-\sigma(r)})$$

$$\times K^{p-r}_{I,c}(\Phi_1, \cdots, \Phi_{p-k}, z_{\sigma(r+1)}, \cdots, z_{\sigma(k)}, \Psi_1, \cdots, \Psi_{q-k}, z_{-\sigma(r+1)}, \cdots, z_{-\sigma(k)}).$$

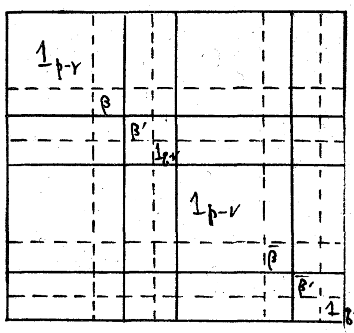
但し，K^r_dは$Sp(r,r)$の$\hat{H}_r'$，$K^{p-r}_{I,c}$は$Sp(p-r, q-r)$の$\hat{H}_0'$で与えられるものとする．$\pi_{I,\chi}$が実際既約ユニタリ表現の指標であることを示す．Gの部分群，

(32)

Q_1:



Q_2:



$\alpha = D(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$

$\left\{ \begin{array}{l} \beta = D(\beta_1, \cdots, \beta_r) \\ \beta' = D(\beta_r, \cdots, \beta_1) \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} |\alpha_j| = 1 \\ |\beta_j| = 1 \end{array} \right.$

空白は0．

Q_1は群$Sp(p-r, q-r)$と同型，とする．$R = Q_1 Q_2 H_r'$はH_r'のGにおける中心化群，MをRの次の指標で与えられる表現とする．

(33) $$\omega_d(z_1, \cdots, z_r, z_{-1}, \cdots, z_{-r}) \times \pi_{I,c}(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_{p-k}, z_{r+1}, \cdots, z_k, \Psi_1, \cdots, \Psi_{q-k}, z_{-(r+1)}, \cdots, z_{-k}),$$

但し，ω_dは(25)で与えたもの，$h \in H_k'$，$(r \leqq k \leqq q)$，他の時は0．

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_r \cap \mathfrak{g})$の正のルートに対するルートベクトルにより張

られる $\mathfrak{g}$ の部分環に対応する G の部分群を N とする。(ここで，(6) で与えた正のルート の制限ルート と必ずしもなっていなくてよい。) RN の表現に先と同様にする誘導表現

(34) $$\operatorname*{Ind}_{RN\uparrow G} M$$

の指標は $\pi_{I,\chi}$ で与えられる。$c_1>c_2>\cdots>c_{n-2r}>0$, $\prod_{1\leq i<j\leq r}(p_i-p_j)\prod_{1\leq i<j\leq r}(p_i+p_j)\neq 0$, $\prod_{j=1}^{r} m_j\neq 0$ のとき $\pi_{I,\chi}$ は既約ユニタリ表現の指標となる。他の場合は，既約ユニタリ表現の有限和となる。(Harish-Chandra[7] Hirai,T[1]) $\chi=(c,d)$ に対して，

(35) $$\pi_\chi=\pi_{c,d}=\sum_I \pi_{I,\chi}\quad ,\quad K_\chi^k=K_{c,d}^k=\sum_I K_{I,c,d}^k$$

$$\pi_{\varepsilon\sigma c,d}=\operatorname{sgn}\varepsilon\operatorname{sgn}\sigma\,\pi_{c,d}\quad ,\quad K_{\varepsilon\sigma c,d}^k=\operatorname{sgn}\varepsilon\operatorname{sgn}\sigma\,K_{c,d}^k\quad(\varepsilon\in A^{n-2r},\sigma\in S_{n-2r})$$

とおく。但し，I は I_{n-2r} の $p-r$ コの元から成る行全体にわたる和。

任意の $\chi=(c,d)$ に対して，

(36) $$\begin{aligned}\delta^k(h;\chi)&=\delta^k(h;c,d)\\ &=\prod_{j=1}^{p-k}e(c_j\Phi_j)\prod_{l=1}^{q-k}e(c_{p-r+l}\Phi_l)\prod_{j=1}^{r}e(m_j\Theta_j)\{e(ip_jt_j)-e(-ip_jt_j)\}\\ &\quad\prod_{j=1}^{b-r}\operatorname{sgn}(t_{j+r})\,e\{-|c_{p-b+j}-c_{n-r-b+j}||t_j|+(c_{p-b+j}+c_{n-r-b+j})\Theta_{j+r}\}\end{aligned}$$

(37) $$\eta_\chi^k(h)=\eta_{(c,d)}^k(h)=\sum_{\varepsilon\in A^{n-2r}}\sum_{\mathfrak{z}\in A^r}\sum_{\tau\in S_{n-2r}}\sum_{\substack{\sigma\in S_k\\ \sigma(r+1)<\sigma(r+2)<\cdots<\sigma(k)}}\delta^k(\sigma h;\varepsilon\tau c;\mathfrak{z}d)$$

但し，$\sigma\in S_k$, σh は z-part のみを，$z=(z_1,\cdots,z_k,z_{-1},\cdots,z_{-k})$ から $\sigma z=(z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)},z_{-\sigma(1)},\cdots,z_{-\sigma(k)})$ とする変換とする。

補題 2.3. $L(\alpha)=L(c_1,c_2,\cdots,c_{p-r},d_1,\cdots,d_r,c_{p-r+1},\cdots,c_{n-2r},d_{-1},\cdots,d_{-r})$

とすると，　$L_\chi^k = (-1)^{gr+\frac{1}{2}r(r-1)} L(\chi) K_\chi^k$ が成立．

以上の結果をまとめて次の定理を得る．

定理1. $0 \leqq r \leqq q$ とする．$c_1 > c_2 > \cdots > c_{n-2r} > 0$, $\prod_{1\leqq i<j\leqq r}(f_i - f_j) \prod_{1\leqq i\leqq j\leqq r}(f_i + f_j) \neq 0$, $\prod_j m_j \neq 0$ と I とに対して (15),(21),(30) で与えた $\pi_{I,c,d}$ は既約ユニタリ表現の指標となる．$c_1 > c_2 > \cdots > c_{n-2r} > 0$, $f_1 > f_2 > \cdots > f_r > 0$, $m_j > 0$ ($j = 1,\cdots,r$) なら互いに同値にならない．$\chi = (c, d)$ に対し，$^I L(\chi) = \prod_{1\leqq i<j\leqq n-2r}(c_i - c_j) \prod_{1\leqq i\leqq j\leqq n-2r}(c_i + c_j) \prod_{1\leqq j\leqq r} m_j$, $^R L(\chi) = \prod_{1\leqq i<j\leqq r}(f_i - f_j) \prod_{1\leqq i\leqq j\leqq r}(f_i + f_j)$ とおく．$^I L(\chi) = 0$ のとき $\pi_{I,\chi} = 0$, $^R L(\chi) = 0$ のとき，既約ユニタリ表現の有限和の指標となる．$r = 0$ のときが2乗可積分の表現の指標に対応する．

§3. G上の不変固有超関数の性質

dg をG上与えられた Haar measure．H_k 上の Haar measure を

$$d_k h = d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_{p-k} d\psi_1 d\psi_2 \cdots d\psi_{q-k} dt_1 dt_2 \cdots dt_k d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_k,$$

とする．$\varphi_j, \psi_l, t_j, \theta_j$ は $h \in H_k$ の座標成分である．$d_k\bar{g}$ を $\bar{G}^j = G/H_j$ の左不変 measure とする．正の定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$ が存在して，G上可積分な関数 $f(g)$ に対し，

$$(38) \qquad \int_G f(g)\, dg = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \int_{H_j} \left\{ \int_{\bar{G}^j} f(g h g^{-1})\, d_j\bar{g} \right\} |\Delta^j(h)|^2\, d_j h$$

が成立つ．$f \in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$(39) \qquad K_f^j(h) = \varepsilon_R^j(h)\, \mathrm{conj}(\Delta^j(h)) \int_{\bar{G}^j} f(g h g^{-1})\, d_j\bar{g} \qquad (h \in H_j')$$

とおくと，

(40) $$\int_G f(g)\,dg = \sum_{j=0}^{q} \alpha_j \int_{H_j} K_f^j(h)\, \varepsilon_R^j(h)\, \Delta^j(h)\, d_j h \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

となる、

(41) $$H_k'(I) = \{ h \in H_k ;\ \prod_{j=1}^{p-k} \prod_{l=1}^{q-k} (e^{\Xi_j - \Xi_l} - 1)(e^{\Xi_j + \Xi_l} - 1) \neq 0 \}$$

とおく。

補題3.1. K_f^j ($f \in C_c^\infty(G)$, $0 \leqq j \leqq q$) は次の性質をもつ。

(i) H_k' 上の関数 $K_f^j(h)$ は $H_k(I)$ 上の無限回微分可能関数に拡張でき，この拡張した関数を $H_k(I)$ の各連結成分に制限した関数はその成分の閉包上の無限回微分可能関数となる。

(ii) $K_f^k(\omega h) = \varepsilon(\omega) \cdot K_f^k(h)$ $\qquad (\omega \in W_k,\ h \in H_k'(I))$。

閉包の境界上の微分は極限で与えておくものとする。

(Harish-Chandra の I.E.G, Hirai, T. (4))

π を G 上の不変固有超関数とし，

(42) $$K^j(h) = \varepsilon_R^j(h) \Delta^j(h)\, \pi(h), \quad \xi^j(h) = L\, K^j(h) \qquad (h \in H_j'),$$

とおく。特に $\pi = \pi_\chi$ のときは $\xi^j(h) = \pm L(\alpha)\, \xi_\chi^j$ である。

補題3.2. $K^j(h)$ ($h \in H_j'$) は次の性質をもつ。

(i) $K^j(h)$ は $H_j(R)$ 上の解析関数に拡張できる。この拡張した関数を $H_j(R)$ の各連結成分に制限した関数は $h \in H_j'(R)$ の座標 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の多項式と exponential 関数との積で表わされる。$\xi^j(h)$, $\eta^j(h)$ も同様の性質をもつ。

(ii) $K^j(\omega h) = \varepsilon(\omega) K^j(h)$, $\xi^j(\omega h) = \varepsilon'(\omega)\xi^j(h)$, $\eta^j(\omega h) = \varepsilon(\omega)\eta^j(h)$, $(\omega \in W_j,\ h \in H_j(R))$ (Hirai, 甲(4))

$c = (c_1, c_2, \cdots, c_{n-2r})$, $d = (d_1, d_2, \cdots, d_r, d_{-1}, d_{-2}, \cdots, d_{-r})$ に対する $\chi = (c, d)$ を r 型とする。

定理2. G 上の不変固有超関数 π に対して,

$$(43)\qquad a_\pi \int_G f(g)\pi(g)\,dg = \sum_{j=0}^{g} \alpha_j \int_{H_j} L K_f^j(h)\, L K^j(h)\, d_j h$$

が成立. 但し, $L^2 K^j = a_\pi K^j$ $(0 \leqq j \leqq g)$. 特に, $\chi = (c, d)$ が r 型 $(0 \leqq r \leqq g)$ のとき

$$(44)\qquad \varepsilon_r L(\chi) \int_G f(g)\pi_\chi(g)\,dg = \sum_{j=0}^{g} \alpha_j \int_{H_j} L K_f^j(h)\, \eta_\chi^j(h)\, d_j h$$

但し, $\varepsilon_r = (-1)^{gr + r(r-1)/2}$.

この定理は K_f^j と K^j の $H_j(I)$, $H_j(R)$ での境界値を調べて, 部分積分をくり返し用いることにより得られる. Harish-Chandra (2), B. D. Roman (1), Hirai, 甲(3) 参照.

§4. Plancherel の定理.

$f \in C_0^\infty(G)$ に対して,

$$(45)\qquad \begin{aligned} F_f^j(h) &= \alpha_j L K_f^j(h) \qquad h \in H_j(I) \\ A_f^r(\chi) &= \int_G f(g)\pi_\chi(g)\,dg \qquad (\chi = (c, d),\ \text{type } r) \end{aligned}$$

とおく.

定理2より,

$$(46)\quad \varepsilon_r L(x) A_f^r(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \int_{H_j} F_f^j(h)\, \chi^j(h)\, d_j h$$

$$= \sum_{j=r}^{\ell} \int_{H_j} F_f^j(h)\, \chi^j(h)\, d_j h \qquad (\chi^0 = \cdots = \chi^{r-1} = 0).$$

補題4.1. F_f^j ($f \in C_0^\infty(G)$, $0 \leqq j \leqq \ell$) は次の性質をもつ.

(i) $F_f^j(h)$ は $H_j(I) \subset H_j$ の相対コンパクト部分集合の外で0で, H_j 全体で定義される連続関数に拡張される.

(ii) $F_f^j(wh) = \varepsilon(w) F_f^j(h)$ (補題3.1 (2) と L の性質より)

(iii) $F_f^j(h)$ の $H_j(I)$ の各連結成分への制限はその連結成分の閉包上の無限回微分可能関数となる.

補題4.2. 正数 γ_0 が存在して,

$$(47)\quad F_f^0(e) = \gamma_0 f(e) \qquad f \in C_0^\infty(G)$$

が成立.

証明) $\overline{\Delta(h)} = \Delta(h)$, $\frac{1}{2}(\dim G/K - \operatorname{rank} G + \operatorname{rank} K) = 2p\ell$ より, K_f に対し Harish-Chandra (1) と同様にして得る. 終

補題4.3. $x = (c, d)$, type r に対して,

$$\sum_{c_1, \cdots, c_{n-2r}} \sum_{m_1, \cdots, m_r} L(x) A_f^r(x)$$

は絶対一様収束する. 但し, $-\infty \leqq c_1, \cdots, c_{n-2r}, m_1, \cdots, m_r \leqq +\infty$ にわたる和.

$\mathbb{Z}$を整数全体の集合，$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$とする。

補題4.4. Fを$\mathbb{C}^*$上のコンパクト台をもつ連続微分可能関数とする。

(48) $$\check{F}(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} F(e^{z})\,\mathrm{sgn}\,t\;e^{\{-|a-b||t|+(a+b)i\theta\}}\,dt\,d\theta \quad (a,b\in\mathbb{Z})$$

$$\hat{F}(m,\rho)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} F(e^{z})\,e^{i\rho t}\,e^{im\theta}\,dt\,d\theta \quad (m\in\mathbb{Z},\ \rho\in\mathbb{R})$$

但し，$z=t+i\theta$，$i=\sqrt{-1}$，とおくと，

(i) $\check{F}(a,b)=\check{F}(b,a)$

(ii) $F(e^{z})$がtに関して奇関数のとき，

$$\sum_{a=-\infty}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}\check{F}(a,b)=\pi\int_{-\infty}^{\infty}F(e^{t})\coth(t/2)\,dt+\pi\int_{-\infty}^{\infty}F(e^{t})\tanh(t/2)\,dt$$

$$=-\frac{i}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}(m,\rho)\coth(\pi\rho)\,d\rho$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}(m,\rho)\,\mathrm{cosech}(\pi\rho)\,d\rho \ 、$$

$\mathbb{Z}_0=2\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}_1=2\mathbb{Z}-1$，とおくと，

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}}\sum_{b\in\mathbb{Z}}\check{F}(a,b)=-\frac{i}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}_0}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}(m,\rho)\coth(\pi\rho/2)\,d\rho$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}_1}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{F}(m,\rho)\tanh(\pi\rho/2)\,d\rho,$$

とまとめられる．ここで和は極限で意味付けるものとする．

注意．この関係式は $Sp(p,q)$, $SU(p,q)$では同じものになる．$SL(n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$は別の式で与えられる．$Sp(n,\mathbb{R})$では両方の関係式が必要となる．

$0 \leqq k \leqq q$, $\chi=(c,d)$ type r, $f \in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$(49) \quad \hat{F}_f^k(\chi : r) = \int_{H_k} F_f^k(h)\, \delta^k(h:\chi)\, dh$$

と定義する． $e_0(t) = (i/2)\coth(\pi t/2)$ $e_1(t) = (i/2)\tanh(\pi t/2)$ とし，

$$(50) \quad b_r^k = \frac{1}{2^r} \sum_{j_1,\cdots,j_r=0,1} \sum_{c_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{c_{n-2r}\in\mathbb{Z}} \sum_{m_1\in\mathbb{Z}_{j_1}} \cdots \sum_{m_r\in\mathbb{Z}_{j_r}} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_f^k(\chi : r)\, e_{j_1}(t_1)\, e_{j_2}(t_2) \cdots e_{j_r}(t_r)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_r$$

とおく．

補題 4.5 (i) $0 \leqq k \leqq q$ に対して，$b_0^k = b_1^k = \cdots = b_k^k$ が成立．

(ii) $\forall f \in C_0^\infty(G)$ に対して，$b_0^0 = (2\pi)^n F_f^0(e) = (2\pi)^n \alpha_0 \gamma_0 f(e)$ が成立．

また，

$$(51) \quad a^r = \frac{1}{2^r} \sum_{j_1,\cdots,j_r=0,1} \sum_{c_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{c_{n-2r}\in\mathbb{Z}} \sum_{m_1\in\mathbb{Z}_{j_1}} \cdots \sum_{m_r\in\mathbb{Z}_{j_r}} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} L(\chi)\, A_f^r(\chi) \prod_{\ell=1}^{r} e_{j_\ell}(t_\ell)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_r$$

とおく．

補題4.6. $\varepsilon_r a^r = \alpha_r^r b_r^r + \alpha_{r+1}^r b_r^{r+1} + \cdots + \alpha_{q-1}^r b_r^{q-1} + \alpha_q^r b_r^q$ 但し、

$\varepsilon_r = (-1)^{pr + r(r-1)/2}$, $\alpha_p^r = 2^{n-r}(n-2r)!\, k! \,/ (k-r)!$ が成立。

さらに

$$(52)\quad A_f^r(x) = \sum_I S_p(\Pi_{I,\chi}^r(f)), \quad \Pi_{I,\chi}^r(f) = \int_G \Pi_{I,\chi}^r(g) f(g)\, dg,$$

と定義する。以上の補題を用いて次の定理を得る。

定理3. $f_1, f_2 \in C_0^\infty(G)$, $f = f_1 * f_2$ に対し、

$$(53)\quad \gamma f(e) = \sum_{0 \leq r \leq q} \frac{1}{2^{2r} r!} \sum_{j_1, \cdots, j_r = 0,1} \sum_{c_1 > c_2 > \cdots > c_{n-2r} > 0} \sum_{\substack{m_s \in Z_{j_s} \\ (s=1,\cdots,r)}} \int_{\rho \in \mathbb{R}^r} \Big\{ \sum_I S_p(\Pi_{I,\chi}^r(f)) \Big\} \big| L(x, e_{j_1}(\rho_1) e_{j_2}(\rho_2) \cdots e_{j_r}(\rho_r)) \big| d\rho,$$

$$= \sum_{0 \leq r \leq q} \sum_{j_1, \cdots, j_r = 0,1} \sum_{c_1 > c_2 > \cdots > c_{n-2r} > 0} \sum_{\substack{m_s \in Z_{j_s}^+ \\ (s=1,\cdots,r)}} \int_{\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_r > 0} \Big\{ \sum_I S_p(\Pi_{I,\chi}^r(f)) \Big\} \big| L(x, e_{j_1}(\rho_1) e_{j_2}(\rho_2) \cdots e_{j_r}(\rho_r)) \big| d\rho$$

但し、$Z_{j_s}^+ = Z_{j_s} \cap Z^+$, $Z^+ = \{ n \in Z,\ n > 0 \}$, $\gamma = (2\pi)^n \alpha_0 \gamma_0$, が成立する。

文 献

Harish-Chandra:(1)Two theorems on semi-simple Lie groups,Ann.of Math. vol.83(1966),pp.74-128.
(2)Discrete series for semi-simple Lie groups I,II,Acta Math.vol.113 (1965),pp.241-318.,vol.116(1966),pp.1-111.
(3)Harmonic analysis on semisimple Lie groups,Bull.A.M.S.78(197o), 529-551.
(4)On the theory of the Eisenstein integral,in Lecture Notes in Math. vol.266,pp.123-149,Springer-Verlag,1971.
(5)Harmonic analysis on real reductive groups I,J.Funct.Anal.19(1975) 1o4-2o4.
(6)Harmonic analysis on real reductive groups II,Inventiones math.vol 36,(1976),1-55.
(7)Harmonic analysis on real reductive groups III,Annals of Math.vol. 1o4(1976),117-2o1.

Hirai,T.:(1)The characters of some induced representations of semi-simple Lie groups,J.Math.Kyoto Univ.vol.8(1968),pp.313-363.
(2)Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups I,Japan J.Math.39(197o),1-68.
(3)The Plancherel formula for SU(p,q),J.Math.Soc.Japan.vol.22(197o), pp.134-179.
(4)Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups II.Japan.J.Math.New Series 2,(1976),pp.27-89.
(5)Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups III.Japan.J.Math.New Series 2,(1976),pp.269-341.
(6)Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups IV.preprint.
(7)The characters of the discrete series for semisimple Lie groups. preprint.

Lipsman,R.:(1)On the characters and equivalence of continuous series representations,J.Math.Soc.Japan.vol.23(1971),pp.452-48o.

Midorikawa, H.:(1)On the explicit formula of characters in the discrete series.preprint.

Romm,B.D.:(1)Analogue to the Plancherel formula for the real unimodular group of the n th order ,Amer.Math.Soc.Translations(2),vol.58(1966), pp.155-215.

Sugiura,M.:(1)Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras,J.Math.Soc.Japan,vol.11(1959) ,pp.374-434.

Takahashi,R.:(1)Sur les fonctions sphériques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique,Jap.J.Math.vol.31(1961),pp.55-9o.

Warner,G.:(1)Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I,II,Springer-Verlag,New York,1972.

Zuckerman,G.:Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups.preprint.