数理解析研究所講究録
第 300 巻 1977 年 26-35

実半単純Lie群の表現と指標について

早大 理工　　清水義之

中心有限の連結実半単純Lie群Gの極大コンパクト群をKとする。GのK有限Banach表現に対しては指標を定義することができる。この指標と表現の関係，および指標の構造について整理しておく。

まず，基本的概念の定義から始める。Kの既約表現の同値類全体を$\hat{K}$とし，$\delta\in K$に対し，$\chi_\delta = \deg\delta\cdot \mathrm{tr}\,\delta$とする。

$$C_*^\infty(G)_K = \sum_{(\delta,\tau)\in\hat{K}} \bar{\chi}_\delta * C_c^\infty(G) * \bar{\chi}_\tau \quad とし, \quad C_*^\infty(G) = \sum_K C_*^\infty(G)_K$$

とする。$\sum$は代数和を表わし，KはGの極大コンパクト群全体を走る。GのK−有限なBanach表現$\sqcup$（即ち，$\mathrm{rank}(\sqcup(\chi_\delta)) < +\infty \ \forall\, \delta\in\hat{K}$）に対し

$$T_\sqcup(f) = \mathrm{tr}\,\sqcup(f) \qquad f\in C_*^\infty(G)$$

として，$T_\sqcup : C_*^\infty(G)\to\mathbb{C}$ を$\sqcup$の<u>指標</u>という。$C_c^\infty(G)$上の帰納極限で定義した位相に関し，$C_*^\infty(G)$は稠密であるから，$T_\sqcup$が$C_c^\infty(G)$の位相で連続であれば，G上のG−不変な超

関数を定義する。

さて、U, V を G の Banach 表現とするとき、互に同値であることを、$U \simeq V$ と表わし、さらに、U, V がユニタリ表現であって、互にユニタリ同値であることを $U \underset{u}{\simeq} V$ と表わす。もう一つの同値関係を定義するために、G 上の台コンパクトな Radon 測度全体のなす線型環 $M_c(G)$ を考える。$\mu \in M_c(G)$ に対し、$U(\mu) = \int_G U(x)\,d\mu(x)$ とすると、$U(\mu)$ は $M_c(G)$ の表現となる。U, V を G の Banach 表現とし、その表現空間を E, F とする。$T: E \to F$ なる閉線型写像で次の性質をもつものが存在するとき、U は V に N-関係にあるということにする。即ち、$U(M_c(G))$, $V(M_c(G))$-不変な E, F の稠密な線型部分空間 $\tilde{E}, \tilde{F}$ が存在し、T は $\tilde{E} \to \tilde{F}$ なる全単射を定義し、$V(\mu)Ta = TU(\mu)a \quad \forall \mu \in M_c(G)$ $\forall a \in \tilde{E}$。U が V に N-関係にあることを $U \underset{N}{\simeq} V$ と表わす。G の Banach 表現の間で $U \underset{N}{\simeq} V$ なる関係は、一般に同値関係であるかどうか判らないが、K-有限の表現の間では同値関係である。U, V がユニタリ表現のとき、$U \underset{u}{\simeq} V$ と $U \underset{N}{\simeq} V$ とは同値である。

Banach 表現 U が、不変な閉部分空間が自明なものしかもたないとき、既約表現であるというが、以下に述べる既約性の概念と区別するため TI 表現であるということにする。

$\mathfrak{U}$をGのBanach表現，Eをその表現空間とする。E上の有界線型作用素全体のなす線型環を$\mathcal{B}(E)$とする。任意の$S\in\mathcal{B}(E)$，と任意の$a_1,\dots,a_m\in E$と任意の$\varepsilon>0$に対し，$\|(\mathfrak{U}(\mu)-S)a_i\|<\varepsilon$　$(1\le i\le m)$なる$\mu\in M_c(G)$が存在するとき，$\mathfrak{U}$はTCI－表現（位相完全既約表現）と呼ぶ。$\mathfrak{U}(G)$がTIであることと$\mathfrak{U}(M_c(G))$がTIであることは同値であり，TCIならTIである。又，ユニタリ表現およびK-有限~~表現~~なBanach表現に対してはTIとTCIは同値な概念であることはすぐ判る。

$\mathfrak{g}$をGのリー環とし，$\mathfrak{G}$を$\mathfrak{g}$の複素化$\mathfrak{g}_c$の普遍展開環，$\mathfrak{Z}$をその中心とする。$\mathfrak{U}$をE上のGのBanach表現とし，$a\in E$，$x\in G$に対し，$\tilde{a}(x)=\mathfrak{U}(x)a$と定義する。$\tilde{a}$はE-値の連続関数である。$E_\infty$に従って，$a\in E$で，$\tilde{a}$が$G\to E$なる$C^\infty$関数となるもの全体とする。$X\in\mathfrak{g}$，$a\in E_\infty$に対し，$\mathfrak{U}(X)=\frac{d}{dt}\mathfrak{U}(\exp tX)a|_{t=0}$とすると，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$は$\mathfrak{g}$の$E_\infty$上の表現となり，従って，$\mathfrak{G}$の表現を定義する。この表現を$\mathfrak{U}_\infty$と表わす。Banach表現$\mathfrak{U}$が，$\mathfrak{U}_\infty(Z)a=\kappa_{\mathfrak{U}}(Z)a$　$({}^\forall Z\in\mathfrak{Z},\ {}^\forall a\in E_\infty,\ \kappa_{\mathfrak{U}}(Z)\in\mathbb{C})$となるとき，quasi-simpleといい，$\kappa_{\mathfrak{U}}$を$\mathfrak{U}$のinfinitesimal character（無限小指標）という。

定理1. GのBanach表現$\mathfrak{U}$において，$\mathfrak{U}$がTCIである

ことと、$\mathfrak{U}$ が TI でかつ quasi-simple であることは同値である。このとき、$\mathfrak{U}$ は K-有限。

K-有限でない、TI 表現が存在するか否かは判っていないようである。上の定理の系として、G の TI-ユニタリ表現は quasi-simple であることが判る。

以下で、先ず TCI-Banach 表現の N-同値類が、指標により分類できる様子を述べる。そのために若干準備が必要である。$\mathbb{C}$ 上の線型環（associative algebra）A の Banach 空間上の表現 $\mathfrak{U}$ に対し TI および TCI なる概念が定義される。このとき、$\mathfrak{U}$ を A の TCI-Banach 表現とし、I を A の両側イデアルで、$I \not\subset \mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}$ とすると、$\mathfrak{U}|I$ は、I の TCI となることに注意する。また、A の Banach 表現 $\mathfrak{U}$, V に対し、$\mathfrak{U} \simeq V$、および $\mathfrak{U} \underset{N}{\sim} V$ も前と同様にして定義する。

さて、A の Banach 表現 $\mathfrak{U}$ に対し、$\mathrm{rank}\,\mathfrak{U}(x) < +\infty$ なる $x \in A$ の全体を $I(\mathfrak{U})$ とすると、$I(\mathfrak{U})$ は A の両側イデアルである。E_0 を $\mathfrak{U}(x)f$ ($f \in E$, $x \in I(\mathfrak{U})$) で生成される E の部分空間とし、E_0^* を ${}^t\mathfrak{U}(x)\varphi$ ($\varphi \in E^*$, $x \in I(\mathfrak{U})$) で生成される E^* の部分空間とする。但し、E^* は E の双対空間を表わし、${}^t\mathfrak{U}(x)$ は $\mathfrak{U}(x)$ の転置作用素を表わす。若し、E_0, E_0^* が E および E^* で稠密であるとき、$\mathfrak{U}$ は FDS であると呼ぶことにする。例えば、有限次元表現は FDS である。

又$\sqcup$をGのK-有限なBanach表現とすると，$\sqcup(M_c(G))$はFDSである。FDS表現の間では，$\sqcup \underset{N}{\approx} V$は同値関係であり，T1であればTC1である。（TC1ならT1は常に成る。）

定理2．$\sqcup, V$を線型環AのT1-Banach表現かつF.D.Sとする。$\sqcup \underset{N}{\approx} V$なる必要十分条件は$\mathrm{Ker}\,\sqcup = \mathrm{Ker}\,V$である。

この定理の系として，GのTC1-Banach表現$\sqcup, V$において，$\sqcup \underset{N}{\approx} V$である必要十分条件は$\mathrm{Ker}\,\sqcup = \mathrm{Ker}\,V$（$M_c(G)$の表現として）であることが得られる。

さて，G上の台コンパクトな連続関数の全体を$C_c(G)$とする。$C_c(G)$は$M_c(G)$の両側イデアルであることに注意する。$\delta \in \hat{K}$に対し，$C_{c,\delta}(G) = \{ f \in C_c(G) \mid f = \bar{\chi}_\delta * f * \bar{\chi}_\delta \}$とすると，$C_{c,\delta}(G)$は$C_c(G)$の通常の位相に関して閉部分空間である。今，$\sqcup$をGのBanach表現，Eをその表現空間とし，$P_\sqcup(\delta) \overset{\mathrm{def}}{=} \sqcup(\bar{\chi}_\delta)$，$E(\delta) = P_\sqcup(\delta)$とする。$f \in C_c(G)$に対し，$P_\sqcup(\delta)\sqcup(f)P_\sqcup(\delta) = \sqcup(\bar{\chi}_\delta * f * \bar{\chi}_\delta)$であるから，$E(\delta)$は$\sqcup(C_{c,\delta}(G))$-不変な部分空間である。そこで，$f \in C_{c,\delta}(G)$に対し，$\sqcup_\delta(f) \overset{\mathrm{def}}{=} \sqcup(f)|E(\delta)$と定義する。

補題1．$\sqcup$をGのTC1-表現とすると，任意の$\delta \in \hat{K}$に対し，$\sqcup_\delta$は$C_{c,\delta}(G)$のTC1-表現となる。

補題2．$\sqcup, V$をGのTC1-表現とし，その表現空間をE

，Fとする。$\delta\in\hat{K}$を，$[\mathfrak{U}|K:\delta]\geq 1$ かつ $[V|K:\delta]\geq 1$ なるものとする。$\mathfrak{U}\underset{N}{\simeq}V$なる必要十分条件は$\mathfrak{U}_\delta$と$V_\delta$は純代数的に同値である。

この補題を証明しておこう。定理1から，GのTCI-Banach表現はK-有限である。従って，$E(\delta)$，$F(\delta)$はともに有限次元である。このとき，$\mathfrak{U}_\delta\underset{alg}{\simeq}V_\delta$ と $\mathfrak{U}_\delta\underset{N}{\simeq}V_\delta$は同値であることに注意する。そこで，定理2を用いると，$\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}=\mathrm{Ker}\,V$である必十条件は $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}_\delta=\mathrm{Ker}\,V_\delta$ であることを示せばよい。$\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}_\delta=\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}\cap C_{c,\delta}(G)$に注意すると，

$$\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}=\{f\in C_c(G)\mid \bar{\chi}_\delta*g*f*h*\bar{\chi}_\delta\in\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}_\delta\quad\forall g,h\in C_c(G)\}$$

を示せばよい。この右辺の集合をIとすると，$\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}\subseteq I$は明らか。逆に，$f\in I$とする。即ち，$\bar{\chi}_\delta*g*f*h*\bar{\chi}_\delta\in\mathrm{Ker}\,\mathfrak{U}\cap C_{c,\delta}(G)$ ($\forall g,h\in C_c(G)$)。したがって，$P_{\mathfrak{U}}(\delta)\mathfrak{U}(g)\mathfrak{U}(f)\mathfrak{U}(h)P_{\mathfrak{U}}(\delta)=0$ ($g,h\in C_c(G)$)。$a\in E(\delta)=P_{\mathfrak{U}}(\delta)E$として，$b=\mathfrak{U}(f)\mathfrak{U}(h)a$とおく。$\tilde{E}=Cl\{\mathfrak{U}(g)b\mid g\in C_c(G)\}$は$\mathfrak{U}(G)$-不変な閉部分空間である。実際，$x\in G$として$\mathfrak{U}(x)\mathfrak{U}(g)b=\mathfrak{U}(\delta_x*g)b$。しかも，$\delta_x*g\in C_c(G)$であるから，$\mathfrak{U}(x)\mathfrak{U}(g)b$は$\{\mathfrak{U}(g)b\mid g\in C_c(G)\}$に属す。($Cl\{\cdots\}$は$E$の閉包を表わし，$\delta_x$は$\{x\}$に台をもつDirac測度を表わす。$\mathfrak{U}$はTIであるから，$\tilde{E}=0$又は$\tilde{E}=E$。$\tilde{E}=E$とすると，$P_{\mathfrak{U}}(\delta)\mathfrak{U}(g)b=0$であるから，$P_{\mathfrak{U}}(\delta)=0$。こ

れは $[U_{|K}:\delta]\geq 1$ に反する。したがって，$\hat{E}=(0)$。即ち $a=0$。ゆえに，$U(f)U(h)a=0$ $(\forall a\in E(\sigma)\ \forall h\in C_c(G))$ ところで，U は TCI ゆえ $U(f)=0$ ∴ $f\in \mathrm{Ker}\,U$。即ち，$\mathrm{Ker}\,U=I$ である。

定理3. $U^1,\cdots,U^r$ を G の TCI-Banach 表現とする。$U^i\not\cong U^j$ $(i\neq j)$ であれば，$T_{U^1},\cdots,T_{U^r}$ は線型独立。

証明. $\sum c_iT_{U^i}=0$ $(c_i\in\mathbb{C})$ とする。$c_1\neq 0$ とし，$\delta\in\hat{K}$ を $[U^1{}_{|K}:\delta]\geq 1$ なるものとして，$[U^i{}_{|K}:\delta]\geq 1$ $(1\leq i\leq s)$，$[U^j{}_{|K}:\delta]=0$ $(s+1\leq j\leq r)$ とする。任意の $f\in C_{c,\delta}(G)(\subset C_c(G))$ に対し，$0=c_1T_{U^1}(f)+\cdots+c_rT_{U^r}(f)$ $=c_1T_{U^1}(f)+\cdots+c_sT_{U^s}(f)=\sum_{i=1}^{s}c_i\,\mathrm{tr}(U^i_\delta(f))$。ところで，$U^i_\delta$ $(1\leq i\leq s)$ は $C_{c,\delta}(G)$ の有限次元の既約表現で，$U^i_\delta\not\cong U^j_\delta$ $(i\neq j\ (1\leq i,j\leq s))$ であるから，$\mathrm{tr}\,U^i_\delta(\cdot)$ $(1\leq i\leq s)$ は線型独立。したがって，$c_1=\cdots=c_s=0$。これは矛盾。したがって，$T_{U^1},\cdots,T_{U^r}$ は線型独立である。

系1. U, V を G の TCI-Banach 表現とするとき，$U\cong V$ である必要十分条件は $T_U=T_V$，即ちそれぞれの指標が一致することである。

系2. U, V を G の TI-ユニタリ表現とするとき，$U\cong V$ となる必要十分条件は $T_U=T_V$ である。

以上によって，G の TCI-Banach表現は指標で完全に分類

することができることが判った。次に，一般のK-有限なBanach表現に対して指標によっていかなる情報が得られるかについて述べる。そのために，Banach表現に対し，Jordan-Hölder列なるものを定義する。

定義. $\mathfrak{U}$をGのBanach表現とし，Eをその表現空間とする。Eの閉部分空間の族$\mathcal{E}$が，次の条件0)~4)を満足するとき，$\mathcal{E}$を<u>$\mathfrak{U}$のJordan-Hölder列</u>という。

0) $\mathcal{E}=\{E_\alpha \mid \alpha\in A\}$として，$E_\alpha$ $(\alpha\in A)$は$\mathfrak{U}(M_c(G))$-不変.

1) $\{0\}$, $E\in\mathcal{E}$

2) 任意の$\alpha,\beta\in A$に対し，$E_\alpha\subset E_\beta$又は$E_\beta\subset E_\alpha$.

3) Aの任意の部分集合A'に対し，$\bigcap_{\alpha\in A'}E_\alpha\in\mathcal{E}$かつ$Cl(\bigcup_{\alpha\in A'}\mathfrak{U}_\alpha)\in\mathcal{E}$.

4) 0)~3)を満足する極大なもの.

注意. 上の条件で，0)~3)を満足する族を$\mathfrak{U}$の<u>分解列</u>ということがある。

さて，GのBanach表現$\mathfrak{U}$は常にJordan-Hölder列をもつことはすぐ判る。$\mathfrak{U}$のJordan-Hölder列$\mathcal{E}=\{\mathfrak{U}_\alpha \mid \alpha\in A\}$において，$E_\alpha\subsetneq E_\beta$で，$E_\alpha\subsetneq E_\gamma\subsetneq E_\beta$なる$E_\gamma\in\mathcal{E}$が存在しないとき，$E_\alpha$と$E_\beta$は<u>隣り合う</u>ということにする。例えば，$\dim(E_\beta/E_\alpha)=1$のとき，あるいはE_β/E_αが$T1$のとき

E_α と E_β は隣り合う。この二つの場合はとくに強い意味で隣り合うということにする。$\sqcup$ の Jordan-Hölder 列 $\mathcal{E}=\{E_\alpha \mid \alpha\in A\}$ において，$E_\alpha \subsetneq E_\beta$ なる任意の $\alpha, \beta\in A$ に対し，$E_\alpha \subset E_{\alpha'} \subsetneq E_{\beta'} \subset E_\beta$ なる $\alpha', \beta'\in A$ で，$E_{\alpha'}$ と $E_{\beta'}$ は隣り合うものが存在するとき，$\mathcal{E}$ は離散という。

$\hat{G}$ によって，G の TCI-Banach 表現の N-同値類全体を表わし，G の TCI-Banach 表現 $\sqcup$ に対し，$\sqcup$ が属す同値類を $\hat{\sqcup}$ と表わすことにすると以下の命題が成立つ。

命題1. $\sqcup$ を G の K-有限 Banach 表現とし，$\mathcal{E}=\{E_\alpha \mid \alpha\in A\}$ を $\sqcup$ の Jordan-Hölder 列とすると：i) $\mathcal{E}$ は離散で，ii) $\hat{V}\in\hat{G}$ に対し，$m(\mathcal{E}:\hat{V})=\mathrm{Card}\{(\alpha,\beta)\in A\times A \mid E_\beta/E_\alpha :$ TI and $(E_\beta/E_\alpha)\in\hat{V}\}$ とする。$V\in\hat{V}\in\hat{G}$ とし，$\delta\in\hat{K}$ を $[V|K:\delta]\geq 1$ なるものとすると，$m(\mathcal{E},\hat{V})=[\sqcup_\delta : V_\delta]$。とくに，$m(\mathcal{E}:\hat{V})<\infty$ でその値(=濃度)は $\mathcal{E}$ の選び方によらない。

以上の命題によって，G の K-有限 Banach 表現 $\sqcup$ および G の TCI-Banach 表現 V に対して，$m(\sqcup : V)\overset{\text{def}}{=} m(\mathcal{E}:\hat{V})$ と定義し，$\sqcup$ における V の重複度と呼ぶことにする。

定理4. $\sqcup, \sqcup'$ を G の K-有限~~表~~Banach表現とする。その指標 $T_{\sqcup}, T_{\sqcup'}$ が一致する必要十分条件は，$m(\sqcup:\hat{V})=m(\sqcup':\hat{V})$ $({}^\forall \hat{V}\in\hat{G})$ である。

必要性のみを示す。$T_U = T_{U'}$ とすると，$tr(U_\delta(f)) = tr(U'_\delta(f))$ $(\forall f \in C_{c,\delta}(G))$. 即ち，$C_{c,\delta}(G)$ の有限次元表現 U_δ と U'_δ の指標が一致すること~~。~~ このことから，$[U_\delta : V_\delta] = [U'_\delta : V_\delta]$ $\forall \delta \in \hat{K}$．上の命題から．$m(U : \hat{V}) = m(U' : \hat{V})$ $(\forall \hat{V} \in \hat{G})$.

系1．U を G の TCI- Banach 表現とする。U' を G の K-有限 Banach 表現とするとき，$T_U = T_{U'}$ であれば，U' は TCI で．$U \underset{N}{\cong} U'$ である。

さらに，定理3の系1，系2がこの定理の系として導ける。

参考文献

Godement. R : A theory of spherical functions I, Trans. Amer Math. Soc., vol 73 (1952)

Harish-Chandra : Representations of semisimple Lie groups: I. II. III T. Amer M. S vol 75. vol 76 vol 76. (1953 1954 1954)

平井武 実半単純Lie群の表現の指標と不変固有超関数．数学．第23巻 (1971)

Warner. G : Harmonic analysis on semisimple Lie groups I. .