数理解析研究所講究録
第301巻 1977年 50-56



# P. Erdős の一予想をめぐる数値実験

岡山大 理　頼永正孝
岡山大 理　内山三郎

## 1. Erdős の予想

P. Erdős はいろいろなところで次の予想を述べている（[1, 2, 3]）： $b \geqq 2$ はあたえられた整数として，自然数 $n$ に対し $n - b^k$ が素数となる $k$（$1 \leqq k < (\log n)/\log b$）の個数を $f(n)$ で表すとき

(1)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{\log n} = 0$$

が成立つ． (1)は多分真であろうが，Erdős のいうように，これを証明することはかなり難しいものと思われる．個々の $n$ に対する $f(n)$ の値について，

定数 $c = c(b) > 0$ が存在して

(2)
$$f(n) > c \log\log n$$

が無限個の $n$ に対して成立つ

ことと，

$b$ と互に素な整数からなる無限等差数列が存在し，
この数列に属するすべての $n$ に対して

$$f(n) = 0$$

が成立つ
ことが知られているにすぎない（cf. [1, 2]）.

さて，$n - b^k$ が $1 \leqq k < (\log n)/\log b$ をみたすすべての整数 $k$ に対して素数であるとき，自然数 $n$ は性質 $P(1, b)$ をもつ，ということにしよう．もし (1) が真ならば，任意の $b \geqq 2$ に対して，性質 $P(1, b)$ をもつ $n$ の個数は有限でなければならない．とくに $b = 2$ のとき次の 7 個の整数

4, 7, 15, 21, 45, 75, 105

は性質 $P(1, 2)$ をもつが，Erdős はこれらの他に性質 $P(1,2)$ をもつ自然数は存在しないであろうと予想する．そして彼は，実際に素数表を用いて，区間 $105 < n \leqq 203775$ $(= 3\cdot 5^2 \cdot 11\cdot 13\cdot 19)$ には性質 $P(1,2)$ をもつ $n$ が存在しないことを見ている (cf. [1]). W.E.Mientka and R.C.Weitzenkamp [4] は計算機 IBM 7040 を使用して Erdős のこの結果を延長し，

$$105 < n \leqq 18734724677955$$

$$(= 3\cdot5\cdot11^2\cdot13\cdot17\cdot19\cdot29^2\cdot37\cdot79 > 2^{44})$$

の範囲にそのような整数の存在しないことを検証した．

われわれはこの数値実験を延長し，これまでに

$$105 < n \leqq 1522468173786049338698885$$

$$(= 3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot19\cdot29\cdot37\cdot53\cdot59\cdot61\cdot67\cdot38916793 > 2^{77})$$

の区間に性質 $P(1, 2)$ をもつ整数 $n$ の存在しないことをたしかめた． 使用した計算機は HITAC 20 である．

Mientka-Weitzenkamp [4] は，IBM 7040 を用いて，区間 $3 \leqq b \leqq 13$ 内の各 $b$ についても，性質 $P(1, b)$ をもつ自然数 $n \leqq 20000$ の個数をもとめているが，彼らのあたえた数値には誤りがあるように思われる．Mientka-Weitzenkamp によるこの数値と，われわれが HITAC 20 を用いてした実験による数値とを下に掲げる．

No. of numbers $n \leq 20000$ with $P(1, b)$

| b | M-W's | ours | difference |
|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 7 | 2 |
| 3 | 23 | 20 | 3 |
| 4 | 81 | 77 | 4 |
| 5 | 63 | 58 | 5 |
| 6 | 240 | 234 | 6 |
| 7 | 159 | 152 | 7 |
| 8 | 110 | 102 | 8 |
| 9 | 280 | 251 | 29 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 383 | 373 | 10 |
| 11 | 265 | 254 | 11 |
| 12 | 351 | 339 | 12 |
| 13 | 385 | 372 | 13 |

われわれは更に $2 \leqq b \leqq 21$ なる各 $b$ について性質 $P(1,b)$ をもつ正整数 $n \leqq 2^m E4$ $(m = 0(1)10)$ の個数を数えた．次の表は得られた結果の一部を示すものである．

No. of numbers $n \leqq x$ with $P(1, b)$

| b | x = 32E4 | x = 1024E4 | largest n found |
|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 7 | 105 |
| 3 | 20 | 20 | 1330 |
| 4 | 92 | 100 | 5833497 |
| 5 | 61 | 66 | 7726572 |
| 6 | 349 | 411 | 9620063 |
| 7 | 199 | 247 | 9487050 |
| 8 | 153 | 210 | 8531205 |
| 9 | 534 | 1117 | 10166362 |
| 10 | 746 | 1177 | 9981153 |
| 11 | 639 | 1581 | 10219608 |
| 12 | 525 | 853 | 10203655 |
| 13 | 751 | 1511 | 10177200 |
| 14 | 921 | 1651 | 10238703 |
| 15 | 2080 | 5972 | 10239754 |
| 16 | 1790 | 5929 | 10239467 |
| 17 | 474 | 773 | 10120650 |
| 18 | 1086 | 2473 | 10228645 |
| 19 | 1580 | 4016 | 10230452 |
| 20 | 1472 | 4933 | 10233093 |
| 21 | 3717 | 14395 | 10237082 |

猶，R. C. Vaughan [5] は $1 \leqq k \leqq (\log n)/\log 2$ なるどの整数 $k$ に対しても $n-2^k$ が素数であるような自然数 $n \leqq N$ の個数 $E_2(N)$ の評価式

$$E_2(N) < N \exp\left(-\frac{c(\log N)\log\log\log N}{\log\log N}\right) \qquad (c>0 \text{ 定数})$$

をあたえている。

## 2. 問題の一般化

われわれは問題を次のように一般化する。整数 $a, b$ は $1 \leqq a < b$ をみたすものとする。$1 \leqq k < (\log n)/\log(b/a)$ なるすべての整数 $k$ に対して $a^k n - b^k$ が素数であるとき，自然数 $n$ は性質 $P(a, b)$ をもつ，ということにする。どんな整数の組 $(a, b)$ $(1 \leqq a < b)$ に対しても性質 $P(a, b)$ をもつ自然数は高々有限個しか存在しないのではないか？ G.C.D. $(a, b) > 1$ なる $(a, b)$ についてはこれは明かであるから G.C.D. $(a, b) = 1$ なるものだけを考えればよい。

われわれは $1 \leqq a < b \leqq 21$, G.C.D. $(a, b) = 1$ をみたす整数の組 $(a, b)$ （のいくつか）についてこの問題を考察し実験を試みた。次に得られた結果の一部を示す。

No. of numbers $n \leqq$ 5E12 with P(a, b)

| a, b | number of n | n found |
|---|---|---|
| 7, 10 | 1 | 3 |
| 7, 9 | 1 | 2 |
| 4, 5 | 1 | 2 |
| 5, 6 | none | — |
| 6, 7 | 1 | 2 |
| 7, 8 | none | — |
| 8, 9 | none | — |

( $b/a$ ($>1$) の値が十分小ならば $n$ に対する限界は殆ど無制限に上げられる！)

No. of numbers $n \leqq x$ with P(a, b)

| a, b | x = 2E4 | x = 512E4 | largest n found |
|---|---|---|---|
| 2, 3 | 5 | 5 | 8 |
| 2, 5 | 34 | 34 | 507 |
| 2, 7 | 46 | 48 | 3305430 |
| 2, 9 | 87 | 99 | 1594135 |
| 2, 11 | 113 | 163 | 4373430 |
| 2, 13 | 135 | 196 | 4534467 |
| 2, 15 | 404 | 1036 | 5104333 |
| 2, 17 | 393 | 751 | 4946795 |
| 2, 19 | 187 | 476 | 5119215 |
| 2, 21 | 460 | 1026 | 5074165 |
| 3, 4 | 3 | 3 | 5 |
| 3, 5 | 4 | 4 | 24 |
| 3, 7 | 15 | 15 | 352 |
| 3, 8 | 12 | 12 | 497 |
| 3, 10 | 42 | 42 | 4409 |
| 3, 11 | 25 | 25 | 2160 |
| 3, 13 | 76 | 83 | 537808 |
| 3, 14 | 63 | 87 | 4696235 |
| 3, 16 | 45 | 47 | 202545 |

（附記） $1 \leqq a < b$, G.C.D. $(a, b) = 1$ とする．自然数 $n$ に対して $a^k n - b^k$ が素数となる整数 $k$ $(1 \leqq k < (\log n)/\log(b/a))$ の個数をふたたび $f(n)$ で表すとき，(1) の成立つことが予想される．いまのところ，われわれに証明できることは，(2) すなわち

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{\log\log n} \geqq c$$

なる定数 $c = c(a, b) > 0$ の存在，および $ab$ と互に素な整数からなる密度正 (positive density) の集合があってこれに属する各 $n$ に対して $f(n) = 0$ が成立つこと，だけである．証明は Erdős [1] における論法による．

## 文　献


[1] P. Erdös: On integers of the form $2^k + p$ and some related problems. Summa Brasil. Math. 2 (1950), 113-123.

[2] ————: Quelques problèmes de la théorie des nombres. Monographies de l'Enseignement Mathématique No. 6, Genève (non-dated). Esp. Problème 54, pp. 121-122.

[3] ————: Résultats et problèmes en théorie des nombres. Séminaire Delange-Pisot-Poitou (14e année: 1972/73). Secrétariat Mathématique, Paris (1973). MR 53(1977), #243.

[4] W. E. Mientka and R. C. Weitzenkamp: On f-plentiful numbers. J. Combinatorial Theory 7 (1969), 374-377.

[5] R. C. Vaughan: Some applications of Montgomery's sieve. J. Number Theory 5 (1973), 64-79. Esp. formula (1.5), p. 65.