数理解析研究所講究録
第 301 巻 1977 年 63-67

$\mathrm{li}\,2$ の計算について

防衛大　伊関　昌
岡山大　鹿野　健

いわゆる積分対数（logarithmic integral）

(1) $$\mathrm{li}\,x = P\int_0^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x>0)$$

は素数定理

(2) $$\pi(x) \sim \mathrm{li}\,x \qquad (x\to+\infty)$$

(3) $$\sim \frac{x}{\log x} \qquad (x\to+\infty)$$

に現われるので解析数論においては『おなじみの』積分であるが，素数定理は普通は(2)の形よりも（主値積分を避けて）

(4) $$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad (x\to+\infty)$$

と書かれる。初等函数 $x/\log x$ を使った分り易い形の(3)よりも，(2)あるいは(4)の形の方が本質的であることは，例えば Riemann zeta 函数に対するいわゆる Riemann 予想が

(5) $$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \qquad (\forall \epsilon > 0)$$

と同等である（von Koch），という事実からも明かである。

さて，多くの解析数論の本では，この $li\,x$ と $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ との『違い』

(6) $$li\,2 = \int_0^2 \frac{dt}{\log t}$$

について，この値が 1.04…（あるいは 1.045…）である，と書いてありながら，その計算法あるいは数表等について言及していない事を，講演者の一人（鹿野）は前から気にしていた。専門書ならばともかく，入門的な教科書ならば当然 $li\,2$ の値の根拠ぐらいは述べて当然と思われるのに，気が付いて種々の本を探しても，『どこにも』載っていないのである！

$li\,2$ の値が詳しく分らないと困る，という訳では決して無いが，$li\,2 > 1$ という事は，素数定理との関係で言えば素数1個分を数え落すことを意味するともなり，少々はおもしろそうである。実際にやってみると，この

(7) $$li\,2 > 1$$

の『証明』は見掛け程は容易でないらしいと気付いた次第。

$$li\, 2 = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^{2} \right) \frac{dt}{\log t}$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\log(1-x)} + \frac{1}{\log(1+x)} \right\} dx$$

となるので，

(8) $$f(x) \equiv \frac{1}{\log(1-x)} + \frac{1}{\log(1+x)}$$

と置くと，実は［0，1］で $f(x)$ は連続で，$x=0$ のとき最小値 1 を取ることが分り，従って $li\, 2 > 1$ となる。

しかし，この方法では $li\, 2 = 1.045\cdots$ は出て来ない。一般に $li\, x$ （$x > 1$）の近似値を求めるために，いわゆる積分指数（exponential integral）$Ei\, x$ と関連させて，

(9) $$li\, x = -P\int_{-\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = Ei(\log x)$$

を利用すると，$x > 1$ のとき，

(10) $$li\, x = \log\log x + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n!\, n}$$

を得る。従って，特に $x = 2$ のときは，

(11) $$li\, 2 = \log\log 2 + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{n!\, n}$$

（γ は Euler の定数）

となるので，$\log\log 2 = -0.36674\cdots$，$\gamma = 0.57722\cdots$

(6位以下を四捨五入)より，(11) の右辺の級数を $n=4$ 程度まで加えれば，

$$li\,2 = 1.045\cdots$$

を得る。

公式(10)は，伊関氏から鹿野へ教えられたものであったが，その後，これは Bessel によるものであることも分った。この公式の利点は右辺の級数の収束が早い点であるが，一方欠点(?)は第1項の $\log\log x$ の項である。$\log\log$ の数表でもあれば一番手っ取り早いが，そのような数表はあるのか？また，まだ現物は見ていないが，積分対数の数表として(恐らく唯一のもの？)，ロシア語の本ではあるが，Карпов — Разумовский (Acad. Sci. Moscow, 1956) によるものがあることもわかった。

[編集者注]　$\mathrm{li}\,x$ の数値計算には，$\mathrm{Ei}(\log x)$ に直して (10) を利用するのがもっとも簡便らしい．Euler定数

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060 \cdots$$

の値を既知とすれば，電卓でも容易に求められる．また $\mathrm{li}\,x = 0$ である x を求めるのには，この導函数が初等函数であることを利用して，Newton法によれば，やはり容易である．十進十桁以下の精度でよければ，いまでは $\log\log x$ の値は数表をさがすよりも，電卓の log（正しくは ln）のキーを2度押すほうが早くて確実になった．

$\mathrm{li}\,2$ を (8) の数値積分によって求めることは，区間 $[0,1]$ の両端に特異点があるため，普通の積分公式を機械的にあてはめてもよい値はえられない．しかしその種の函数のために考えられた「森の二重指数公式」（たとえば講究録 No.172, p.94など）によると，非常によい結果がえられる（TOSBAC-3400 の倍長演算で，少くとも18桁正しい値がでている）．ただし (8) の函数値計算において，たとえば $x < 10^{-4}$ といった0にごく近い所では，(8) のままでなく，その Maclaurin 展開式

$$1 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{403}{720}x^4 + \cdots$$

による，といった配慮は不可欠である．