数理解析研究所講究録
第 301 巻 1977 年 68-79

整数論パズルについて

信州大　情報工学科　中村義作

はじめに　日本には，パズル愛好家が少なくとも6000人はいると推定され，その中に，自分でも問題を作る熱愛家が約200人(?)は含まれている．筆者もその1人であるが，出題の傾向を見ると，虫食い算，覆面算，魔法陣，相結陣などの整数に関するものが圧倒的に多い．これは，整数の持つ素朴な性質が誰にも容易に受け入れられ，若干の検討で，問題がつぎつぎ創作(!)されるためと思われる．

ところで，これらの熱愛家の数学的知識となると，ごく一部の専門家を除けば，極めて少ないようである．例えば，高木先生の「初等整数論講義」[1]を読破できる人は，せいぜい1～2%であろうし，一松・米田両先生の「整数のパズル」[2]を解き得る人も同程度と思われる．このため，2次体や有限体の知識を前提とする話は許されず，ましてやRiemannのζ関数やDirichletのL関数などは，パズルの文献には絶対

に出てこない．それでいて，素人にも出題の意向だけは容易に理解できる「Fermat の予想」，「Goldbach の予想」，「双子素数の予想」などは，パズル愛好家の間で恰好の研究材料とされている．数理パズルの専門雑誌の最新号(3)でも，「Fibonacci 素数の予想」が未解決問題として再提出されている．しかし，この辺の矛盾が素人の持つ独得のよさかも知れない．

整数の問題には，それがパズルなのか，整数論の問題なのか，判然としないものもある．というのは，その問題に学術的価値が認められれば整数論の問題となるし，出題に興味本位の要素があれば，パズルの問題ともみなされるからである．この観点からすると，整数論の初期の時代に驚異的業績を残したP. Fermatなどは，さしずめパズル界の大先輩ということになる（彼は，今日でいう地方議員であり，趣味として整数論を研究していたということである）．しかし，現在の一般的風潮としては，むずかしい数理を扱うものは，すべて整数論の問題としているようである．この点，整数論の優れた研究者であったC. G. Bachet(4)やE. Lucas(5)が立派なパズル書を著した昔は，よき時代であったかも知れない．

さて，興味本位の問題の中には，「これこそ完全に興味本位」といえる整数の問題がある．それは，昭和や西暦の年を

折り込んだ整数の問題を，パズル愛好家同志の間で，新年の年賀状として出題し合うものである．いつの頃からか，これを数芸年賀状と呼んでいるが，恐らく日本独得のものと思われる（ただし，西暦の年を折り込んだパズルの問題は外国にもある）．筆者も数年前からこの数芸年賀状を作り始め，多くの先輩や友人に送り続けている．そして，筆者のところへも，毎年，十数通の数芸年賀状が元旦に届けられている．しかし，筆者の知る範囲では，整数論の問題ともみなせる優れた問題は，残念ながら，少ないようである．P. Fermat や L. Euler の私信などには，当時の数学界の最先端の問題がいろいろと出題されていると聞くが，今日の整数論は素人には全く手の届かないものになってしまったのだろうか．それとも，筆者の知らない別の世界で，その種の優れたパズルの問題が出題されているのであろうか．なお，整数論のパズルとしては，学術的ではないが，比較的定評のある著書(6)も出版されていることを付記しておく．

筆者の数芸年賀状から　このような訳で，整数論の問題とはいえないまでも，まさしくパズルといえる整数の問題を，筆者の数芸年賀状の中から紹介し，読者諸賢のご笑覧に供することとする．ただし，解法は初等的なので，ごく概略を述

べるにとどめる.[7]

昭和48年(1973年) a～gを

$$0<a<b<c<d<e<f<g$$

のような整数として，次の6個の式を同時に満足するようにして下さい．ただし，( )の中も，それぞれ適当な整数とします．

$$1973=(\ )^2+(\ )^2$$

$$1973=a^2+(\ )^2+(\ )^2$$

$$1973=a^2+b^2+(\ )^2+(\ )^2$$

$$1973=a^2+b^2+c^2+(\ )^2+(\ )^2$$

$$1973=a^2+b^2+c^2+d^2+(\ )^2+(\ )^2$$

$$1973=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2$$

(解説) 試行錯誤による方法で，a，b，c，… を順次に求めていくのであるが，無策に計算を進めると，backtrackの回数ばかり多くなって大変である．これを避けるには，任意の整数が2つの整数の2乗和に分解できるかどうかの判定を，具体的な分解作業を進める前に行う必要がある．整数論によると，[1] 整数Nが2つの整数の2乗和に分解されるのは

(i) Nが2のとき ($N=1^2+1^2$)

(ii) Nがk^2のとき ($N=k^2+0^2$)

(iii) Nが $4n+1$ 型の素数のとき（分解は1通り）

(iv) Nがうえの3タイプの積となるとき

に限られている．この判定法を利用すると，5種類の解のあることが容易に確かめられる．その1つを示すと

$$1973=(23)^2+(38)^2$$

$$1973=6^2+(16)^2+(41)^2$$

$$1973=6^2+8^2+(28)^2+(33)^2$$

$$1973=6^2+8^2+10^2+(3)^2+(42)^2$$

$$1973=6^2+8^2+10^2+12^2+(27)^2+(30)^2$$

$$1973=6^2+8^2+10^2+12^2+13^2+26^2+28^2$$

となる．なお，パズル愛好家の中には，2乗和の分解に関するうえの判定法を，知らない人も多かったようである．

> 昭和50年（1975年）　a，b をそれぞれ自然数とするとき，
>
> $$a^2-1975b^2=50$$
>
> を満たす1組の解は，$a=45$，$b=1$ です．このような解をあと3組求めて下さい．

（解説）　一松先生から完璧な解を頂戴し，大変に恐縮した．実は，この年の数芸年賀状から，先着の正解者数名に賞金を差し上げるようにしたため，解答を多くの愛好家から頂くようになった．愛好家の中には，1から始まる自然数をb

に順次に代入しながら検証した人も多かったようで，「朝から夕方まで計算し続けて，たった1組の解しか見つけられなかった」，という涙ぐましい話も聞いた．また，$a=45$，$b=1$という解以外には，他に整数解は存在しないという珍証明（?）も寄せられて，出題者を驚かせた．

この問題は，$a=5c$とおくと

$$c^2-79b^2=2$$

と変形されるが，これに2次体$K(\sqrt{79})$の整数を援用すれば，解は容易に得られる．すなわち，

$$(c+\sqrt{79}\,b)(c-\sqrt{79}\,b)=2$$

$$K(\sqrt{79})\text{の基本単数}=80+9\sqrt{79}$$

であるから，$c=9$，$b=1$が1つの解として与えられていることに注意すれば，

$$c_n+b_n\sqrt{79}=(9+\sqrt{79})(80+9\sqrt{79})^n$$

を満たすc_nとb_n（$n=0,1,2,\cdots\cdots$）がすべて求める解となる．なお，若干の計算を行うと，

$$\begin{cases} a_n=160a_{n-1}-a_{n-2} \\ b_n=160b_{n-1}-b_{n-2} \end{cases}$$

という漸化式を得る．この初期値として

$$\begin{cases} a_{-1}=45, \\ b_{-1}=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_0=45 \\ b_0=1 \end{cases}$$

を用いれば，最初の３組の解として

$$\begin{cases} a_1 = 7155 \\ b_1 = 161 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 1144755 \\ b_2 = 25759 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = 183153645 \\ b_3 = 4121279 \end{cases}$$

を得る．なお，この解法には面白い幾何学的方法もあり，この予想外の解法には筆者も敬服した．

昭和51年(1976年)　ある自然数nをk乗し，それを1976で割ったら，余りが51になりました．nとkの組合せを何組か求めて下さい．ただし，$51 < n < 1976$とし，一度用いたnやkの値は，別の組合せに用いないものとします．

（解説）　ちょっと気のきいたプログラムを作ると，コンピュータでも簡単に解が求められるため，正解者の20%強がこの方法を用いていた．出題者の解法は，51と1976が互いに素なことを利用するもので，まず

$$51^r \equiv 1 \pmod{1976}$$

を満たす最小の自然数として，$r = 18$を求める．18と互いに素な自然数（< 18）は 1, 5, 7, 11, 13, 17 の６個なので［その個数は$\varphi(18) = 6$］，１を除く５数について

$$51^5 \equiv 1819,\quad 51^7 \equiv 675,\quad 51^{11} \equiv 363,$$
$$51^{13} \equiv 1611,\quad 51^{17} \equiv 155 \qquad \pmod{1976}$$

を求めたのち，

$$5\times 11\equiv 7\times 13\equiv 17\times 17\equiv 1 \pmod{18}$$

に着目すれば，例えば

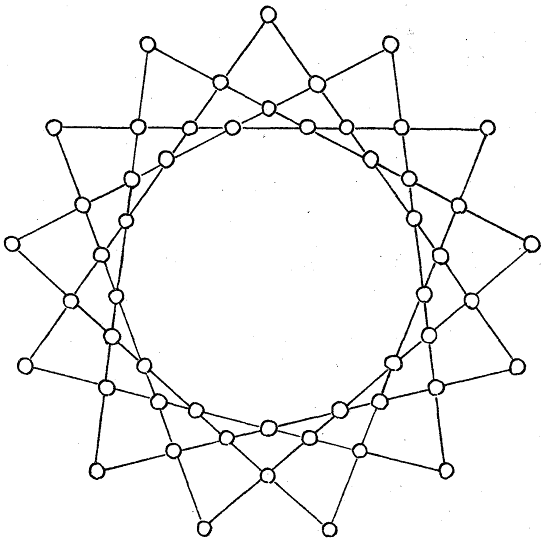
$$1819^{11}\equiv 51^{55}\equiv 51 \pmod{1976}$$

のようにして，

$$1819^{11}\equiv 675^{13}\equiv 363^{5}\equiv 1611^{7}\equiv 155^{17}\equiv 51 \pmod{1976}$$

を得る．そして，これが解のすべてであることも，整数論の知識から導かれる．

昭和52年（1977年）
右の図の52個の○印の中に1から52までの整数を1つずつ入れ，どの一直線上の8数の和も53で割り切れるようにして下さい．



（解説）　試行錯誤で解を探した愛好家も多かったが，その殆んどは徒労に帰したようである．検証の組合せ数が多すぎて，解にたどり着く前に疲れ果ててしまったのである．出題者の解法は，1～52の各数を素数53の原始根（その1つを

ρとする）で表示し，これらを

第１組：ρ^1, ρ^5, ρ^9, …, ρ^{49}（ρ^4倍ごと）

第２組：ρ^2, ρ^{10}, ρ^{18}, …, ρ^{46}（ρ^8倍ごと）

第３組：ρ^3, ρ^{15}, ρ^{27}, …, ρ^{43}（ρ^{12}倍ごと）

第４組：ρ^4, ρ^{20}, ρ^{36}, …, ρ^{40}（ρ^{20}倍ごと）

の４組に分割する．そして，各組の相続く２数ずつを加えた８数の和が，（mod. 53）で０となるような組合せを探す．この組合せはかなり存在するので，数組ぐらいなら，視察でも求められる．原始根に26を選ぶと，原始根による各数の表示は，その指数だけを示すと

26 - 1, 40 - 2, 33 - 3, 10 - 4, 48 - 5, 29 - 6, 12 - 7,

47 - 8, 3 - 9, 25 - 10, 14 - 11, 46 - 12, 30 - 13, 38 - 14,

34 - 15, 36 - 16, 35 - 17, 9 - 18, 22 - 19, 42 - 20,

32 - 21, 37 - 22, 8 - 23, 49 - 24, 2 - 25, 52 - 26, 27 - 27,

13 - 28, 20 - 29, 43 - 30, 5 - 31, 24 - 32, 41 - 33, 6 - 34,

50 - 35, 28 - 36, 39 - 37, 7 - 38, 23 - 39, 15 - 40, 19 - 41,

17 - 42, 18 - 43, 44 - 44, 31 - 45, 11 - 46, 21 - 47,

16 - 48, 45 - 49, 4 - 50, 51 - 51, 1 - 52 (= 0)

となる．これから，うえの組合せを求めると，例えば

$$(26^5+26^9)+(26^{50}+26^6)+(26^{31}+26^{43})+(26^4+26^{20})\equiv 0$$

を得る．ここで，この８数の配列を替えて

$$26^{4} - 26^{31} - 26^{50} - 26^{5} - 26^{9} - 26^{6} - 26^{43} - 26^{20}$$

とし，これらを逐次に 26^4 倍ずつしながら

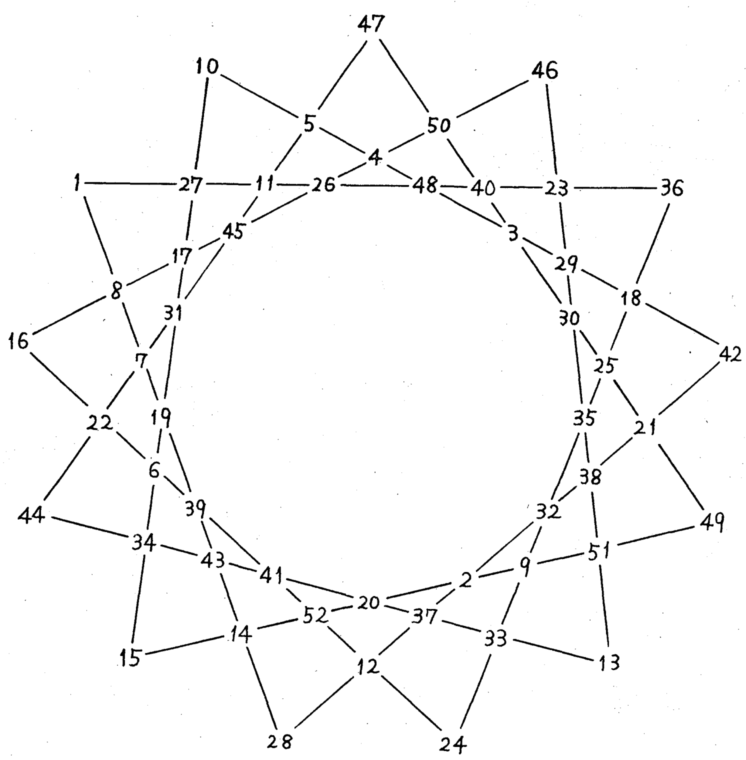
$$26^{8} - 26^{35} - 26^{2} - 26^{9} - 26^{13} - 26^{10} - 26^{47} - 26^{24}$$

$$26^{12} - 26^{39} - 26^{6} - 26^{13} - 26^{17} - 26^{14} - 26^{51} - 26^{28}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$26^{0} - 26^{27} - 26^{46} - 26^{1} - 26^{5} - 26^{2} - 26^{39} - 26^{16}$$

と13個の配列を作る．それぞれの配列を，巡回的に出現する13本の直線上の8点につぎつぎと対応させれば，各数が矛盾なく対応させられて，その結果は求める解となる．具体的には，まえの指数との対応表から，右図の解が得られる．なお，同種の解は，他にもかなり存在する．

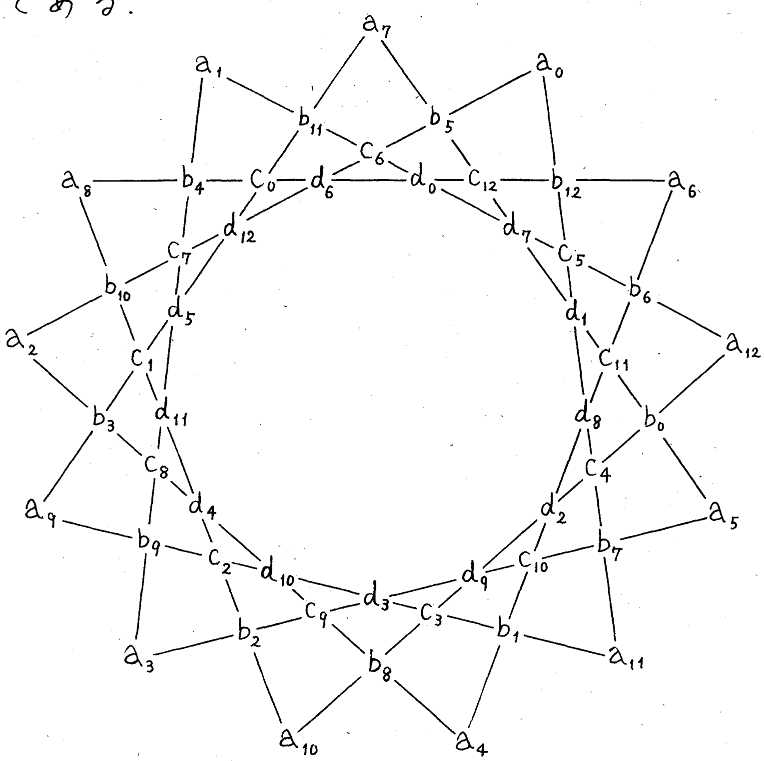


パズル愛好家から寄せられた解の中には，面白い着想のものも存在した．そ

の1つを紹介すると，次のようである．1～52を

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{12}$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_{12}$$
$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{12}$$
$$d_0,\ d_1,\ d_2,\ \cdots\cdots,\ d_{12}$$

の4組の数列に分割し，（mod. 53）で，どの数列も同じ公差の等差数列となるようにする．各数を下図のように配列すれば，それは求める解である．



この方法で，例えば，1から13までを a_0～a_{12} に，14から26までを b_0～b_{12} に，27から39までを c_0～c_{12} に，40から52までを d_0～d_{12} に割り当てれば，どの一直線上の8数の和も，一定値の212とすることができる．

<u>おわりに</u>　ここに紹介した筆者の数芸年賀状は，多少では

あるが懸賞金をつけている関係もあって，パズル愛好家の間には，好評で迎えられているようである．そこで，出題の材料が尽きないかぎり，筆者はこれを来年以降も続けたいと考えている．新規に挑戦を希望する諸兄は，その旨をお知らせ下されば，その翌年の元旦に数芸年賀状をお届けする．

参考文献

(1) 高木貞治：初等整数論講義，共立出版，1931．

(2) 一松信，米田信夫：数学の問題，数学セミナー増刊，日本評論社，1977．

(3) D. L. Silverman: "Fibonacci Primes", J. Recreational Mathematics, Vol. 9, No. 3 (1976-77), p. 208.

(4) C. G. Bachet: Problèmes plaisants & délectables, Blanchard, 1959 (original ed. 1612).

(5) E. Lucas: Récréations mathématiques I～IV, Blanchard, 1960 (original ed. 1891).

(6) A. H. Beiler: Recreations in the Theory of Numbers, Dover, 1966.

(7) 中村義作，他２名：続・数理パズル，中公新書，中央公論社，1977．