

ラテン方陣の個数計算について

東女大、山本幸一
(文理・教)

1. n 次既約ラテン方陣の個数 L_n は $n \leq 9$ が知られている。

$$L_1 = L_2 = L_3 = 1, \quad L_4 = 4, \quad L_5 = 56, \quad L_6 = 9408, \quad L_7 = 1694\ 2080,$$

$$L_8 = 5352\ 8140\ 1856, \quad L_9 = 37\ 7597\ 5709\ 6425\ 8816.$$

非同型のものの個数 L'_n については

$$L'_4 = L'_5 = 2, \quad L'_6 = 22, \quad L'_7 = 563, \quad L'_8 = 167\ 6257$$

が知られている。またラテン方陣の種の数 L''_n については

$$L''_4 = L''_5 = 2, \quad L''_6 = 12, \quad L''_7 = 147.$$

ついでながら L_n について筆者は次の漸近式が成立つのではないかと推測している:

$$n!(n-1)!L_n \sim (n!)^n \exp\left(-\frac{n(9n-13)}{12}\right).$$

さて上の結果のうち L_8 を与える M. B. Wells (J. Comb. Th. vol. 3 (1967), 98-99) 及び L'_8 を与える J. W. Brown (J. Comb. Th. vol. 5 (1968), 177-184) はただ結果を示すだけで詳細は不明である。これらはいわば正反対の立場に立

つもので、M. B. Wells は A. Sade に由来する Hall 矩形による逐次的集計であり、J. W. Brown は置換の指標を規準にとって対象を縮小する。従ってこれらにはまるで共通点がないわけ、それら 2 つの立脚点を統合することが望ましいが、そのためにどのようなことを行ったらいいかという問題を考えた。

2. 簡単に言えば Sade 流の逐次集計に際して、同型性を考慮して計算を精密化することとなるが、Sade の方法の大意をまず説明する。

$r \times n$ ラテン矩形は n 次順列を縦に r 個並べたもので各列には文字の重複が現われないものごとである。今も各列の中の文字の順序を無視し、各列は

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$$

の部分集合であると考えたときいわゆる Hall 矩形を生ずる。すなわち、 Ω の部分集合 B_1, B_2, \dots, B_n の系 (indexed subsets)

$$f = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

があつて、

$$\#B_i = r \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

であり、しかも任意の $j \in \Omega$ に対して

$$\#\{i; j \in B_i\} = r,$$

すなわち j が r 個の B に含まれるならば f を $r \times n$

Hall 矩形とつら.

この際各 B_i の番号をつけかえること, Ω に置換を施すこと, あるいは関連行列を転置すること, すなわち

$$j \in B_i \iff i \in B_j^*$$

なる性質によって

$$f^* = \{B_1^*, B_2^*, \dots, B_n^*\}$$

を作ること. この3種類の操作によって, $r \times n$ Hall 矩形の全体に群 $S_n \times S_n \times S_2$ が作用する. この作用の下で分類して Hall 矩形の同値類を得る. 同値類の個数を h_r で表わす.

又, 各同値類 \mathcal{L} に対して, その中に含まれる Hall 矩形の数を $\lambda(\mathcal{L})$ で表わす. この数は \mathcal{L} に属する Hall 矩形 H の安定群 Q_H を知ることによって

$$\lambda(\mathcal{L}) = \frac{2(n!)^2}{\#Q_H}$$

で与えられる.

3. $r \times n$ ラテン方阵 L に 1 行を追加して $(r+1) \times n$ ラテン方阵を作る方法の数を $\nu(L)$ で表わす. これは L から出る Hall 矩形に依存し, なおその Hall 矩形 H の属する同値類 \mathcal{L} で決る. この函数を $\nu(\mathcal{L})$ とする.

Hall 矩形 H の余形 (complement)

$$f^* = \{\Omega - B_1, \Omega - B_2, \dots, \Omega - B_n\}$$

の類を \mathcal{L}^* とすれば, $\nu(\mathcal{L})$ は \mathcal{L}^* の中の f^* について, その中から相異代表系 (system of distinct representatives = SDR) を取り出す方法の数に当る. それは又 H^* の関連行列の永久式に等しい.

さて Sade の方法の要点は Hall 矩形 H を $r+1$ 列のものに拡張してえられる $\nu(\mathcal{L})$ 個を, $(r+1) \times n$ Hall 矩形の同値類ごとに分類して, 対応する個数が $m_{\mathcal{L}^*}$ 個であると,

$k_r \times k_{r+1}$ 次行列

$$M_{r,r+1} = (m_{\mathcal{L}^*})$$

を求めるところにある. たとえば, その行和

$$\sum_{\mathcal{L}^*} m_{\mathcal{L}^*}$$

は, \mathcal{L} 個の $\nu(\mathcal{L})$ を与えている.

一方拡張のし方を表わす上の函数 $\nu(\mathcal{L})$ は, Erdős-Kaplan-sky 及び著者の方法で \mathcal{L} の内部構造から決定されて具体的な公式もある. 詳細は煩雑なのでここには述べないことにする. 要するに Sade の流儀は Erdős-Kaplan-sky らのラテン拡大の個数計算を, 同値類ごとに細分して, その積み重ね (つまり行列の積) として L_n を決定しようとするものである.

4. 基本的な行列 $M_{r,r+1}$ が求められたとすれば

$$P_r = M_{0,1} M_{1,2} \cdots M_{r-1,r}$$

は, その \mathcal{L} 成分が \mathcal{L} に属する $r \times n$ ラテン方阵の個数を示す.

$$Q_r = M_{r,r+1} \cdots M_{n-1,n}$$

については、その \mathcal{L} 成分が \mathcal{L} の中のラテン矩形をラテン方阵に拡張する方法の数を示す。ゆえに今

$$\Delta_r = \text{diag} \{ \lambda(\mathcal{L}) \}$$

とすれば対称関係

$$(1) \quad P_r = {}^t(\Delta_r Q_{n-r}) = {}^t Q_{n-r} \Delta_r$$

が成立つ。同様に r 基本的行列 $M_{r,r+1}$ についても

$$(2) \quad \Delta_{r+1} M_{n-r-1, n-r} = {}^t(\Delta_r M_{r,r+1}) = {}^t M_{r,r+1} \Delta_r$$

が成立している。

5. 7 次の場合. $r=2$ といは $h_r=4$. 4 つの類を Sade のよ
うに A, B, C, D と命名する. 表 1.

\mathcal{L}	\mathcal{G}_H	# \mathcal{G}_H	$\lambda(\mathcal{L})$
$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{matrix}$	$D_{12} \times D_{34} \times D_{567}$	192	105/4
$C = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{matrix}$	$D_{123} \times D_{4567}$	48	105
$B = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{matrix}$	$D_{12} \times D_{34567}$	40	126
$D = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{matrix}$	$D_{1234567}$	14	360

$r=3$ といは $k_3=14$, Sade の名称を流用する, 但し I 以外.

$X = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{matrix}$	$[S_{23}] \times (S_{123}) \times S_{4567}$	864	35/6
$I = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$	SL (3, 2)	168	30
$J = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{matrix}$	$[12], [67], (12), (67),$ $(16)(27)[16][27][34]$	32	315/2
$K = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 \end{matrix}$	$S_{345} \times \{(12), (67),$ $(16)(27)[15][26][37]\}$	48	210
$P = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 \end{matrix}$	$[12], (67),$ $(12)[34], (45)[67]$	16	315
$U = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{matrix}$	$D_{1234567}$	14	360
$N = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 5 & 7 & 7 \end{matrix}$	$(12)(67)[34], (34)[12],$ $(16)(27)[16][27]$	8	630
$Y = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{matrix}$	$[12],$ $(12), (56)$	8	630
$W = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{matrix}$	$S_{\frac{2}{7} \frac{3}{8} \frac{4}{5}}$	6	840
$Z = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 7 & 6 & 7 \end{matrix}$	$(23)(45)[23][45], (67)[67]$	4	1260

$$R = \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (135)(246)[123][567] \quad 3 \quad 1680$$

$$\blacksquare Q = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (12), (45)(67)[23][45][67] \quad 4^{\blacksquare} \quad 2520$$

$$V = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (17)(26)(34)[17][25][36] \quad 2 \quad 2520$$

$$T = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (12)(34)(56)[12][34][56] \quad 2 \quad 2520$$

[説明] K, Q は反転 $f \rightarrow f^*$ によつて他のものになる。これを \blacksquare 示した。他の類は反転により不変である。

安定群はその生成元を示すに止めた。その中で

(1) $D_{ab\dots c}$ は a, b, \dots, c を頂点とする正多角形に属する 2 面体群をあらわす。

(2) $S_{ab\dots c}$ は a, b, \dots, c に属する対称群をあらわす。

(3) $SL(3, 2)$ は特殊線型群。位数 168 の単純群である。

(4) $(12)(67)[34]$ は文字に置換 $(12)(67)$ を施した結果にちいて列に置換 $[34]$ を施すことを意味する。

$\lambda(\mathcal{L})$ はそれを 5040 で割った商を書いた。

$r=3$ の 14 個の類の中で I だけがブロック・デザインで、 I は Sade の方法では現出しない。 I は有限射影平面 $PG(2, 2)$ で、その安定群が $SL(3, 2)$ で与えられる。

$M_{01} = 5040, M_{12} = \begin{matrix} A & C & B & D \\ (210, & 420 & 504 & 720) \dots 1854 \end{matrix}$ 表 2

	X	I	J	K	P	U	N	Y	W	Z	R	Q	V	T	
$M_{23} =$	A	4	.	.	.	96	.	48	96	48	.	.	192	96	580
	C	2	.	24	.	24	48	24	.	48	48	96	144	120	578
	B	20	20	40	80	40	40	120	80	140	580
	D	.	2	7	14	21	10	21	28	28	56	84	112	98	98

	X*	I*	J*	K*	P*	U*	N*	Y*	W*	Z*	R*	Q*	V*	T*		
$M_{34} =$	X	144	144	
	I	.	8	.	.	24	.	.	56	.	56	.	.	.	144	
	J	16	32	32	.	.	32	32	144	
	K	48	48	48	144	
	P	8	16	.	.	24	16	32	16	32	144	
	U	.	2	.	.	14	2	14	14	14	14	14	28	28	.	144
	N	8	16	8	16	8	16	16	24	32	144
	Y	.	.	4	.	.	8	8	16	12	4	24	16	24	32	148
	W	1	2	6	.	.	6	12	9	6	12	10	24	24	36	148
	Z	.	.	4	.	6	4	4	2	8	16	24	24	24	28	144
	R	.	1	.	.	3	3	6	9	5	18	15	24	30	30	144
	Q	.	.	.	4	4	4	4	4	8	12	16	36	24	28	144
	V	.	.	2	4	2	4	6	6	12	12	20	24	32	20	144
	T	.	.	2	4	4	.	8	8	8	14	20	28	20	28	144

	A*	C*	B*	D*		
$M_{45} =$	X*	18	36	.	.	54
	I*	.	.	.	24	24
	J*	.	16	.	16	32
	K*	.	.	.	24	24
	P*	.	.	.	24	24
	U*	7	7	7	10	31
	N*	.	8	4	12	24
	Y*	2	4	8	16	30
	W*	3	.	12	12	27
	Z*	1	4	4	16	25
	R*	.	3	3	18	24
Q*	.	4	6	16	26	
V*	2	6	4	14	26	
T*	1	5	7	14	27	

$M_{56} = \begin{matrix} A* \\ C* \\ B* \\ D* \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, M_{67} = 1.$

∴

$M_{01}M_{12}M_{23}M_{34}M_{45}M_{56}M_{67} = 7! \cdot 121 \cdot 9829 \cdot 7600$

∴

$L_7 = 1694 \cdot 2080.$

(表2, 表3の説明は末尾の補足参照)

表3

E	1	1	1
A	210	8	105/4
C	420	4	105
B	504	4	126
D	720	2	360
X	1680	288	35/6
I	1440	48	30
J	1 5120	96	315/2
K	1 0080	48	210
P	1 5120	48	315
U	4 7520	132	360
N	4 5360	72	630
Y	6 0480	96	630
W	8 0640	96	840
Z	9 0720	72	1260
R	10 0800	60	1680
Q	18 1440	72	2520
V	21 1680	84	2520
T	21 1680	84	2520
X*	8 0640	1 3824	35/6
I*	36 8640	1 2288	30

J^*	193 5360	1 2288	$315/2$
K^*	241 9200	1 1520	210
P^*	362 8800	1 1520	315
U^*	393 9840	1 0944	360
N^*	749 9520	1 1904	630
Y^*	774 1440	1 2288	630
W^*	1032 1920	1 2288	840
Z^*	1403 1360	1 1136	1260
R^*	1903 1040	1 1328	1680
Q^*	2806 2720	1 1136	2520
V^*	2854 6560	1 1328	2520
T^*	2757 8880	1 0944	2520
A^*	1 7418 2400	663 5520	$105/4$
C^*	6 8705 2800	654 3360	105
B^*	8 3220 4800	660 4800	126
D^*	23 6390 4000	656 6400	360
E^*	121 9829 7600	121 9829 7600	1

これから 8 列 7 行 テン字形 の 総数 N_r について

$$N_2 = 1854, \quad N_3 = 107\,3760, \quad N_4 = 15518\,5920,$$

$$N_5 = 40\,5734\,4000. \quad N_2 \text{ 及び } N_3 \text{ は 別 の 方法 で も 求 め ら れ$$

るが N_4, N_5 を 与 える 一 般 公 式 は 知 ら れ て い る。

6. Sade の方法はこのように枚舉の立場からは大それた有効であるが、同型決定にはこのままでは使えない。その理由は $r \times n$ ラテン矩形 L の拡大である $(r+1) \times n$ ラテン矩形 \tilde{L} があつた時、それぞれをまず Hall 矩形 H, \tilde{H} で置き換えるのはいいとしても、その後で H と \tilde{H} とを別々に、“大きい群” \mathcal{G} の下で処理してしまふところに問題がある。同型関係については \tilde{H} と H との相対関係が基本的だから、 \tilde{H} を類別する群としては \mathcal{G} の代りに H の安定群 \mathcal{G}_H を使う必要がある。だから \tilde{H} と同値な拡大の個数は $m_{\mathcal{G}, \mathcal{D}}$ の構成する一部分にある所の

$$\# \mathcal{G}_H / \# (\mathcal{G}_H \cap \mathcal{G}_{\tilde{H}})$$

をなければならない。このように $M_{r,r+1}$ を構成する $m_{\mathcal{G}, \mathcal{D}}$ を用いて \mathcal{G}_H の下で細分することが先か必要である。一例をあげれば $M_{2,3}$ における $m_{\mathcal{D}, \mathcal{U}}$ は $=10$ であるが、 $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ とともに 2 面体群 D_{14} と同型で、この2つの2面体群の入り組み方によって $10 = 7 + 1 + 1 + 1$ のように4個の小類に分割する。そしてその計算は安定群の位数が $m_{\mathcal{G}, \mathcal{D}}$ に比べて小さい所では決山の分類が生ずるため面倒になる。筆者も実のところまだこの分割を完了してはいないが、近いうちに実行したいものと考えている。

なお $n=8$ の場合、 $f_2=6, f_3=35$ で、それらの安定群もすでに決定されている。しかし f_4 は目下筆者には未知であるが、

恐らく 300 程度と思われる。このさい現われる $M_{r,r+1}$ は最大 35×300 程度の行列で、電子計算機によれば近づけない計算ではないと思われる。

文献

A. Sade : Énumération des carrés Latins. Application au 7^e ordre. Conjecture pour les ordres supérieurs, Marseille 1948.

K. Yamamoto : On the number of Latin rectangles, Sci. Rep. Tokyo Woman's Christian College, No. 7-11 (1968), pp. 86-97.

補足 (説明) 表 2 の H^* は H の余形 (83) を表わす。むしろ $\lambda(H^*) = \lambda(H)$ である。

~~この~~ 分類表² は電子計算機に実行させたものである。

行列 P_r, Q_r の成分^{を表す} ~~を~~ に記す。第 1 列は各類に含まれるラテン矩形の数を $7!$ で割ったもの、第 2 列は各類の中の一つ一つの Hall 矩形の中に含まれるラテン矩形の数をあらわす。