数理解析研究所講究録
第301巻 1977年 129-142

ある種の石取りゲームにおける双対性

阪大・理　　山﨑洋平

正規型の石取りゲームの後手必勝形については Grundy の基本定理が一応の解決を与えているとみることができるが，逆型の石取りゲームについては，あまり広範囲にわたってまとまった結果が得られているとはいえない．しかし，特にn山くずしに話を限れば，その逆型については正規型の理論を少し修正することにより適用できる．このことはチャヌシッツイ（Wythoff の二山くずし）についてもあてはまることが容易にわかる．本稿の目的は逆型の理論が正規型の理論を少々修正して適用できるような，ゲームのカテゴリーを論じることであり，結果として，この性質をもつ，ある意味で'まとまった'カテゴリーには最大なものが存在すること，また"佐藤のゲーム（マヤ・ゲーム）"と呼ばれるものがこれに属することを示す．

§1. D-scheme と石取りゲーム.

Xを有限集合とし，$\mathfrak{M}=\{(A,B): X\supset A\supsetneqq B\}$とおく．

ρ を $\mathfrak{M}$ から $\{0,1\}$ への写像とする．このような組 $\mathbb{D}=(X,\rho)$ を D-scheme という．ρ は，与えられた集合 A を B にかえる手が $\rho(A,B)=1$ のとき，かつこのときのみ認められるというルールを表す．$\mathbb{D}$ 上の石取りゲームは集合 X から，二人の競技者により，ルール ρ に従い交互着手で進められる．その結果着手不可能に陥った者を，正規型では負け，逆型では勝ちと規定する．

D-schemes $\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}=(X,\rho)$ と $C\subset X$ に対し，直和 $\mathbb{D}_1\oplus\mathbb{D}_2$ 及び進行途中のゲームに対応する D-scheme $\mathbb{D}_C$ が次のように定義される．

$$\mathbb{D}_1\oplus\mathbb{D}_2=(X_1\cup X_2,\ \rho_1\oplus\rho_2)$$

$$\rho_1\oplus\rho_2(A_1\cup A_2,\ B_1\cup B_2)=1 \iff \begin{cases}\rho(A_1,B_1)=1,\ A_2=B_2 & \text{又は}\\ A_1=B_1,\ \rho(A_2,B_2)=1\end{cases}$$

$$\mathbb{D}_C=(C,\ \rho_C)\qquad \rho_C=\rho|_{\mathfrak{M}_C}$$

§2．Grundy 数と正規型石取りゲーム．

D-scheme $\mathbb{D}=(X,\rho)$ に対し Grundy 数 $G(\mathbb{D})$ が次のように帰納的に定義される．

$$G(\mathbb{D})=\min\{i:\text{非負整数},\ i\neq G(\mathbb{D}_C)\ \forall C\subset X\ \text{s.t.}\ \rho(X,C)=1\}.$$

容易に知れるように次の定理が成り立つ．

定理1．$\mathbb{D}$をD-schemeとし，その上の正規型石取りゲームをΓとすれば

$$\Gamma\text{が後手必勝} \Longleftrightarrow G(\mathbb{D})=0$$

次の定理は正規型石取りゲームの理論のすなおさに直結している．

定理2．(Grundy)　$\mathbb{D}_1$，$\mathbb{D}_2$をD-schemeとするとき

$$G(\mathbb{D}_1\oplus\mathbb{D}_2)=G(\mathbb{D}_1)\oplus G(\mathbb{D}_2)$$

ここに，二進展開$a=\sum_i a_i 2^i$，$b=\sum_i b_i 2^i$に対し　$c=a\oplus b$の二進展開$\sum_i c_i 2^i$は

$$c_i\equiv a_i+b_i \mod 2$$

で与えられるものとする．

以下，いくつかの代表的なD-schemeを紹介する．詳しくは一松[2]を参照されたい．

例1．ニム　$N^\infty(n)$

$$|X|=n \quad , \quad \rho=1$$

例2. 制限ニム $\mathbb{N}^a(n)$ $1 \leq a < \infty$

$$|X| = n, \quad \rho(A, B) = 1 \iff |A \setminus B| < a$$

ニム $\mathbb{N}^\infty(n)$ は $a=\infty$ の制限ニムとみなすことができる。また，通常，制限ニムとはこれらの D-scheme の直和を指している．Grundy 数は次の式で与えられる．

$$G(\mathbb{N}^a(n)) = \text{最小の非負整数} \equiv n \pmod a$$

例3. ケイレス

$$X \subset \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

$$\rho(A, B) = 1 \iff |x - y| \leq 1 \quad \forall x, y \in A \setminus B.$$

特に $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ なるものを $\mathbb{K}(n)$ とかくと，ケイレスはこういう D-scheme の直和で表わされる．$G(\mathbb{K}(n))$ は $n \geq 71$ では12を周期にもつ．

例4. チャスシッツイ $\mathbb{C}(n_1, n_2)$

$$X = X_1 \cup X_2 \qquad |X_i| = n_i \quad i = 1, 2$$

$$\rho(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) = 1 \iff \begin{cases} A_1 = B_1 & \text{又は} \\ A_2 = B_2 & \text{又は} \\ |A_1 \setminus B_1| = |A_2 \setminus B_2| \end{cases}$$

$$G(\mathbb{C}(n_1, n_2)) = 0 \iff {}^{\exists}N \in \{0, 1, 2, \cdots\}$$

$$\min\{n_1, n_2\} = [cN], \quad \max\{n_1, n_2\} = [cN] + N = [c^2 N]$$

ここに [ ] は整数部分を，c は $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ を表す．

例5．佐藤のゲーム（マヤ・ゲーム） $\mathbb{M}^l(n_1, \cdots, n_l)$

$X = X_1 \cup \cdots \cup X_l, \quad |X_i| = n_i \quad 1 \leq i \leq l$

$$\rho(A_1 \cup \cdots \cup A_l, B_1 \cup \cdots \cup B_l) = 1 \iff \begin{cases} |A_i| \neq |A_j|, \ |B_i| \neq |B_j| \quad {}^{\forall}i \neq {}^{\forall}j \\ \text{かつ} \quad {}^{\exists}i \quad A_j = B_j \quad {}^{\forall}j \neq i \end{cases}$$

$$G(\mathbb{M}^l(n_1, \cdots, n_l)) = 0 \iff \begin{cases} \prod_{i<j}(n_i - n_j) = 0 \quad \text{又は} \\ \bigoplus_{i<j}((n_i \oplus n_j - 1) \oplus n_j \oplus n_i) = \bigoplus_i n_i . \end{cases}$$

§3．逆型石取りゲームと singular D-scheme．

逆型の石取りゲームについては，美しい一般論は絶望的である．しかし，いくつかの逆型の石取りゲームについては，正規型の場合の理論を少々変形してあてはめることができる．その良い例がニムの直和 $\mathbb{D} = \bigoplus_i \mathbb{N}^\infty(n_i)$ である．$\mathbb{D}$ 上の逆型の石取りゲームが後手必勝なる為の条件は

$$\begin{cases} {}^{\exists}i \quad G(\mathbb{N}^\infty(n_i)) \geq 2, \ G(\mathbb{D}) = 0 \quad \text{又は} \end{cases}$$

$$\Big\} \ ^\forall i \quad G(\mathbb{N}^{\omega}(n_i)) \leq 1 \qquad G(\mathbb{D}) = 1,$$

であることがよく知られている．このことは更に一般に $\oplus_i \mathbb{N}^{a_i}(n_i)$ についても成立することが容易に分かる．他に例をひけばチャヌシッツイ $\mathbb{C}(n_1, n_2)$ についても $\mathbb{C}(n_1, n_2)$ 上の逆型の石取りゲームが後手必勝なる条件は

$$\begin{cases} \{n_1, n_2\} \neq \{0\}, \{1, 2\} \quad \text{で} \quad G(\mathbb{C}(n_1, n_2)) = 0 \\ \text{又は} \quad \{n_1, n_2\} = \{0, 1\}, \{2\} \end{cases}$$

である．また，これらニム，制限ニム，チャヌシッツイの直和についても同様の結果が得られることが判明してくるであろう．ここで次の定義をおくことによって逆型の石取りゲームについての知識を整理してみよう．

定義．D-scheme $\mathbb{D}$ は，$\mathbb{D}$ 上の正規型石取りゲームと逆型石取りゲームとで先手必勝か後手必勝かが異るとき *singular* であるという．

例1． $\mathbb{N}^a(n)$ が singular $\Longleftrightarrow$ $G(\mathbb{N}^a(n)) \leq 1$

例2.　$\oplus_i \mathbb{N}^\infty(n_i)$ が singular $\Leftrightarrow$ 各 $\mathbb{N}^\infty(n_i)$ が singular
（実は $\oplus_i \mathbb{N}^{a_i}(n_i)$ についても成り立つ．）

例3.　タイレスについては難しい．$\mathbb{K}(5)$ は non-singular で $G(\mathbb{K}(5)) = 4$ だが $\mathbb{K}(5) \oplus \mathbb{K}(1)$ は singular である．

例4.　$\mathbb{C}(n_1, n_2)$ が singular $\Longleftrightarrow$ $n_1, n_2 \leq 2$ かつ $G(\mathbb{C}(n_1, n_2)) \leq 1$ すなわち $\{n_1, n_2\} = \{0\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2\}$ の場合である．

例5.　$\mathbb{M}^\ell(n_1, \cdots, n_\ell)$ が singular $\Leftrightarrow$ $\Pi_{i<j}(n_i - n_j) = 0$ 又は

$$\{n_1, \cdots n_\ell, \imath(n_1), \cdots, \imath(n_\ell)\} = \{0, 1, \cdots, \ell-1, \ell, \cdots, 2\ell-1\}$$

ここに $\imath(m) = 2\ell - 1 - m$ である．

例5については，ここでは記憶に留める程度でよい．以下，次のような性質をもつ，D-scheme のカテゴリー $\mathcal{C}$ について考えよう（hom は略する）．

Axiom 1:　$\mathrm{obj}\,\mathcal{C} \ni \mathbb{D} = (X, \rho),\ C \subset X \Longrightarrow \mathbb{D}_C \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$

Axiom 2:　$\mathrm{obj}\,\mathcal{C} \ni \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \Longrightarrow \mathbb{D}_1 \oplus \mathbb{D}_2 \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$

Axiom 3:　$\mathrm{obj}\,\mathcal{C} \ni \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ が singular $\Longleftrightarrow \mathbb{D}_1 \oplus \mathbb{D}_2$ が singular.

Axiom 1 については C として X から'着手'の列によって実現されるもののみをとるべきだという考えも成り立つが，実質的な差異はない．ここでは形式上，この形をとることにする．これら3つの性質はカテゴリーについてのものであるから，種々雑多なカテゴリーがこれを満たし得るが，奇異なことに，これらをみたすもののうち最大のものが存在することが判明してくる．以下 $\mathfrak{C}$ を上の3つの性質をみたすカテゴリーとする．

補題1. obj $\mathfrak{C}$ が $\rho \neq 0$ なる D-scheme $\mathbb{D}=(X,\rho)$ をもてば，次の i), ii) をみたす D-scheme $\mathbb{D}'=(X',\rho')$ をもつ．

i) $\rho' \neq 0$

ii) $\rho'_{C'}=0 \qquad \forall C' \leq X'$.

証明. $\rho_C \neq 0$ なる X の極小部分集合（必然的に non-empty）の一つ C を X' として $\mathbb{D}'=\mathbb{D}_{X'}$ とおればよい．

補題2, obj $\mathfrak{C} \ni \mathbb{D}$ が singular なら $G(\mathbb{D}) \leq 1$。

証明. obj $\mathfrak{C} \ni \mathbb{D}$ が singular で $G(\mathbb{D}) \geq 2$ とする．補題1の i), ii) をみたす $\mathbb{D}'$ をとってくると $\mathbb{D}'$ は singular で $G(\mathbb{D}')=1$．

よって $\mathbb{D}$ と $\mathbb{D}\oplus\mathbb{D}'$ は共に，singular で Grundy 数は 2 以上，従って後手必勝である．しかし $\mathbb{D}\oplus\mathbb{D}'$ 上先手は一手で $\mathbb{D}$ に変形できる筈だから矛盾である．証明終り．

§4．カテゴリー $\mathcal{C}$

一般に，D-scheme $\mathbb{D}=(X,\rho)$ に対し次の記号を定める．

$$\mathcal{T}=\{T\subset X:\ \rho(T,C)=0\quad \forall(T,C)\in\mathfrak{M}\}$$

$$\mathcal{I}=\{I\subset X:\ G(\mathbb{D}_I)\leq 1\}$$

$$\mathcal{F}=\{F\in\mathcal{I}:\ {}^{\exists}F=F_0,F_1,\cdots,F_s=T\in\mathcal{I}\ \text{s.t}\ T\in\mathcal{T},\ \rho(F_{i-1},F_i)=1\ {}^{\forall}i\}$$

$$\mathcal{S}=\{S\subset X:\ \mathbb{D}_S\ \text{は singular}\}.$$

容易にわかるように $\mathcal{S}\supset\mathcal{T}\subset\mathcal{F}\subset\mathcal{I}$ である．

補題 3．obj $\mathcal{C}\ni\mathbb{D}$ のとき $\mathcal{I}\supset\mathcal{S}$ であり，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{I}$ の中で関係 $\rho(\ ,\ )=1$ に関して閉じている．

証明．前半は補題 2 と同値であるから，$\mathcal{I}\ni I,J$ が $\rho(I,J)=1$ をみたすとき片方が $\mathcal{S}$ に属すれば他方も $\mathcal{S}$ に属することをいえばよい．$\mathbb{D}_I$ に対し補題 1 の $\mathbb{D}'$ をとってくる．$\mathbb{D}'$ は singular で $G(\mathbb{D}')=1$ である．従って $\mathbb{D}_I$ が singular であることは $\mathbb{D}_I\oplus\mathbb{D}'$ が singular なることと同値で，$G(\mathbb{D}_I)\leq 1$ より

$\{G(\mathbb{D}_I), G(\mathbb{D}_I \oplus \mathbb{D}')\} = \{0, 1\}$ なので $\mathbb{D}_I$（又は $\mathbb{D}_I \oplus \mathbb{D}'$）は逆型石取りゲームにおいて後手必勝，従って $\mathbb{D}_J$（又は $\mathbb{D}_J \oplus \mathbb{D}'$）は先手必勝である．Grundy数をみると $G(\mathbb{D}_I) = G(\mathbb{D}_J) \oplus 1$，$G(\mathbb{D}_I \oplus \mathbb{D}') = G(\mathbb{D}_J \oplus \mathbb{D}') \oplus 1$ となり，$\mathbb{D}_I$ が singular であることと $\mathbb{D}_J$ が singular であることは同値である．証明終り．

補題4．obj $\mathbb{C} \ni \mathbb{D}$ のとき $\mathcal{T} = \mathcal{S}$（従って $\mathcal{T}$ は $\mathcal{I}$ の中で関係 $\rho(\ ,\ ) = 1$ に関して閉じている）。

証明．$\mathcal{S} \setminus \mathcal{T} \ni S$ に対し $\mathcal{I} \ni I$ で $\rho(S, I) = 1$ なるものを見つければよい．$\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_S$ は singular で $G(\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_S) = 0$ であるから $\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_S$ 上の逆型石取りゲームは先手必勝である．先手の必勝戦略により $\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_C$ になったとしよう．Grundy数の性質から $G(\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_C) \neq 0$ なので $\mathbb{D}_S \oplus \mathbb{D}_C$ は singular でその Grundy数は 1 でなければならない．よって $\mathbb{D}_C$ は singular である．この C が求める I の性質をもつ．

補題5．obj $\mathbb{C} \ni \mathbb{D} = (X, \rho)$ とし C を $\rho(X, C) = 1$ なる X の部分集合とする．$\mathbb{D}$ が non-singular で $\mathbb{D}_C$ が singular なら X の部分集合 C' で $\rho(X, C') = 1$ をみたし，かつ次の i) 又は ii) をみたすものが存在する

i) $\mathbb{D}_{c'}$ は singular で $G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c) \oplus 1$

ii) $\mathbb{D}_{c'}$ は non-singular で $G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c)$.

証明．もし $X \in \mathcal{A}$ なら補題3より $\mathbb{D}$ は singular となるので $G(\mathbb{D}) \geqq 2$ でなければならない．ここで補題1の条件をみたす $\mathbb{D}'$ をもってくると，$\mathbb{D}$ 及び $\mathbb{D} \oplus \mathbb{D}'$ は共に Grundy 数が2以上なので，これらの上の連型石取りゲームは先手必勝である．$\mathbb{D} \oplus \mathbb{D}'$ から $\mathbb{D}$ にかえる手は先手の必勝法ではないので，必勝法は $\mathbb{D} \oplus \mathbb{D}'$ については $\mathbb{D}_{c'} \oplus \mathbb{D}'$ のような形に，$\mathbb{D}$ については $\mathbb{D}_{c''}$ のような形にかえるものである，これら c'，c'' のうちに求めるものが含まれる．

§5．flat D-scheme と projective D-scheme

前節までに我々はカテゴリー $\mathfrak{C}$ の object たる D-scheme がみたすべき条件をいくつか見出したが，逆にこれらの条件から最大のカテゴリーが得られることをみよう．

定義．D-scheme $\mathbb{D} = (X, \rho)$ は次の2つの性質をみたすとき flat であるという．

① $\mathcal{F}$ が $\mathcal{A}$ の中で関係 $\rho(\ ,\ ) = 1$ に関して閉じている．

② $Y \in 2^X - \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{F}$ が $\rho(Y, c) = 1$ をみたすとき，$\rho(Y, c')$ $=1$ で次のどちらかをみたす c' が存在する：

i) $c' \in \mathcal{F}$ で $G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c) \oplus 1$

ii) $c' \in 2^X - \mathcal{F}$ で $G(\mathbb{D}_{c'}) = G(\mathbb{D}_c)$.

定義．上の ii) が省ける場合，$\mathbb{D}$ は projective であるという．

補題 6．$\mathbb{D}$ を flat D-scheme とするとき $\mathcal{F} = \mathcal{S}$.

証明．$c \subset X$ に対し，$\mathbb{D}_c$ 上の逆型石取りゲームが

$$後手必勝 \Leftrightarrow \begin{cases} c \in \mathcal{F} & G(\mathbb{D}_c) = 1 \text{ 又は} \\ c \notin \mathcal{F} & G(\mathbb{D}_c) = 0 \end{cases}$$

なることをみればよいが，これは flat なることから容易である．

定理 3．flat D-scheme のカテゴリー，projective D-scheme のカテゴリーは共に次の性質をもつ．特に flat の場合には，この性質をもつ最大のものである．

i) obj $\mathbb{C} \ni \mathbb{D} = (X, \rho)$　$c \subset X$ $\Rightarrow$ $\mathbb{D}_c \in$ obj $\mathbb{C}$

ii) obj $\mathbb{C} \ni \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ $\Rightarrow$ $\mathbb{D}_1 \oplus \mathbb{D}_2 \in$ obj $\mathbb{C}$

iii) obj $\mathbb{C} \ni \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ について

$\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ が共に singular $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{D}_1 \oplus \mathbb{D}_2$ が singular

証明．i) は明白である．$\mathbb{D}_1 \oplus \mathbb{D}_2 = \mathbb{D}$ とおくとき $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$，$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ であるから，ii) iii) もまた明らかである．flat D-scheme のカテゴリーが，これらの性質をもつもののうち最大であることは前節にみた通りである．

定理 4．ニム，制限ニム，チャヌシッツイ，佐藤のゲーム，$\mathbb{K}(4)$ は projective であるが $\mathbb{K}(5)$ は flat でない．

証明；ここでは佐藤のゲーム $M^{\ell}(n_1, \cdots, n_\ell)$　$(\prod_{i<j}(n_i - n_j) \neq 0)$ についてのみ述べる．

$$\mathcal{F}' = \{C_1 \cup \cdots \cup C_\ell : \{|C_1|, \cdots, |C_\ell|, \tau(|C_1|), \cdots, \tau(|C_\ell|)\} = \{0, \cdots, \ell-1, \ell, \cdots, 2\ell-1\}\}$$

ただし　$\tau(m) = 2\ell - 1 - m$

とおくと，正規型及び逆型の石取りゲームを考察することにより，$\mathcal{F}' \subset \mathcal{S}$，$\mathcal{F}' \subset \mathcal{C}$，$\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ 更に $\mathcal{F}$ が ①，② をみたすことが順に $\sum_i |C_i|$ に関する帰納法で導かれる．

これらの結果は最近得られたものなので，どのような D-scheme が flat か，projective か，あるいは flat であるが projective でないものが存在するのか……など，まだ不明のことが多い。$\rho(A;B)$ が $(|A|,|B|)$ のみに依存するものでも，

$$\rho(A,B)=1 \iff \{|A|,|B|\} \neq \{0,1\},\{1,3\},\{1,4\}$$

のように non-flat なものが存在するが

$$\rho(A,B)=1 \iff |A \setminus B| \in \{p_1, p_2, \cdots\}$$

のような形のものではどうかよく判らない。

末筆ながら，佐藤のゲームについて考えたのは，明石高専の加納幹雄氏の質問によるところである。同氏に深く感謝する次第である。

参考文献

[1] J. H. Conway, On numbers and games, Acad. Press, 1975.
[2] 一松 信，石取りゲームの数理，森北出版，1968.