数理解析研究所講究録
第 305 巻 1977 年 14-28

G-homotopy types of G-complexes and representations of G-cohomology theories

阪市大理　村山光孝

§0　Gは有限群とする。

XがG-complexとは，X：CW-complex with cellular G-action s.t. $^{\forall}g\in G$に対し，$X^g=\{x\in X \mid gx=x\}$はsubcomplex，とする。

G-complexについてはBredon [2]に於いて論じられているがその中で，G-complexの基本的性質を次に挙げておく。

（以下，G-map，G-homotopy等でequivariant map，equivariant homotopy等を表わすことにする。）

○ G-homotopy extention property（[2], Chap I, §1）

○ G-cellular approximation theorem（[2], Chap II, Prop 5.6）

これらにより，mapping cylinder, mapping cone, equalizer, tellescope G-cofibration sequense 等が，(pointed) G-complexのcategoryの中で構成できる。

又，J.H.C. Whiteheadの定理が次の形で成立する。

○ Theorem of J. H. C. Whitehead for G-complexes ([2], Chap II, Cor 5.5)

X, Y : G-complexes, $f : X \to Y$ G-map とする。

このとき，次の (1), (2) は同値

(1) f は G-homotopy equivalence.

(2) $^{\forall}H \subset G$: subgroup に対し $f^H = f|_{X^H} : X^H \to Y^H$ は (weak) homotopy equivalence

§1 では，さらに G-complex の G-homotopy type をもつ G-space は，Milnor [8] と parallel な性質を持つことを示す。ここでの主要な結果は，[Theorem 1.2] と [Corollary 1.5] である。

§2 では [Corollary 1.5] を使って，Segal [9] で定義された，G-equivariant cohomology theory の Ω-G-spectrum による表現について論じる。

§1

$\mathcal{W}_G$ を G-complex の G-homotopy type をもつ G-space の category，$\mathcal{W}_G^n$ を G-complex の n-ad の G-homotopy type をもつ G-space の n-ad の category とする。

<u>Definition</u>　K が simplicial G-complex とは，K は simplicial complex with simplicial G-action とする。

<u>Theorem 1.1</u>　(Cf J. Milnor [8], Theorem 2)

G-space の n-ad $\mathbb{A} = (A; A_1, \cdots A_{n-1})$ に対して次は同値

(a) $\mathbb{A} \in Obj\, \mathcal{W}_G^n$

(b) $\mathbb{A}$ は G-complex の n-ad に G-dominated. i.e. $^\exists \mathbb{X}$: G-complex の n-ad

$^\exists f : \mathbb{A} \to \mathbb{X}$, $g : \mathbb{X} \to \mathbb{A}$ G-maps s.t $g \circ f \underset{G}{\simeq} 1_{\mathbb{A}}$ (G-homotopic)

(c) $\mathbb{A}$ は simplicial G-complex in the weak topology の n-ad の G-homotopy type をもつ。

(d) $\mathbb{A}$ は simplicial G-complex in the strong topology の n-ad の G-homotopy type をもつ。

<u>Proof</u> (a) ⇒ (b) は明らか。

(b) ⇒ (c) $S(\mathbb{A}) = (S(A) ; S(A_1) \cdots S(A_{n-1}))$; singular complex の n-ad とする。

$S(\mathbb{A})$ は induced G-action により, simplicial G-set の n-ad となる。

一般に K ; simplicial G-set とすると, $|K|$ (K の geometric realization) は G-complex になる。∵ $^\forall g \in G$ に対し, K^g は K の subcomplex かつ $|K^g| = |K|^g$。又 $|K|$ は G-simplicial subdivision をもつ。

∴ $|S(\mathbb{A})|$ は simplicial G-complex の n-ad (weak topology) になる。

$\alpha : |S(\mathbb{A})| \longrightarrow \mathbb{A}$, $\alpha(\sigma, y) = \sigma(y)$ $(\sigma, y) \in |S(A)|$ は G-map.

又 $|S(\mathbb{A})^g| = |S(\mathbb{A}^g)| = |S(\mathbb{A})|^g$ $(^\forall g \in G)$ より. $^\forall H \subset G$; subgroup に対し

$\alpha^H : |S(\mathbb{A})|^H \longrightarrow \mathbb{A}^H$ は weak homotopy equivalent (C.f J. Milnor [7])

∴ $\mathbb{X}$; G-complex の n-ad, とすると. Theorem of J. H. C. Whitehead for G-complex により. $\alpha_{\mathbb{X}} : |S(\mathbb{X})| \longrightarrow \mathbb{X}$ は G-homotopy equivalent

$\alpha'_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \to |S(\mathbb{X})|$ を $\alpha_{\mathbb{X}}$ の G-homotopy inverse とすれば,

J. Milnor [8] と同じ diagram を得る。

$$\begin{tikzcd}
{|S(\mathbb{A})|} \arrow[r, "|S(f)|"] \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{A}}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {|S(\mathbb{X})|} \arrow[r, "|S(g)|"] \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {|S(\mathbb{A})|} \arrow[d, "\alpha_{\mathbb{A}}"] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "f"] \arrow[u, dotted, bend left, "\alpha'_{\mathbb{A}}"] & \mathbb{X} \arrow[r, "g"] \arrow[u, bend right, "\alpha'_{\mathbb{X}}"'] & \mathbb{A} \arrow[u, dotted, bend left, "\alpha'_{\mathbb{A}}"]
\end{tikzcd}$$

$\alpha'_{\mathbb{A}}: \mathbb{A} \to |S(\mathbb{A})|$ を $\alpha'_{\mathbb{A}} = |S(g)| \circ \alpha'_{\mathbb{X}} \circ f$ とすれば, $\alpha'_{\mathbb{A}}$ は $\alpha_{\mathbb{A}}$ の G-homotopy inverse である。 //

(c)⇒(a) $\mathbb{K}_W$ を simplicial G-complex in the weak topology の n-ad とすれば Sd $\mathbb{K}_W$ (一回重心細分) は G-complex の n-ad である。//

(c)⇔(d) $\mathbb{K}$ を simplicial G-complex の n-ad, $\mathbb{K}_W$ (resp $\mathbb{K}_S$) を $\mathbb{K}$ の weak (resp. strong) topology をもつ polyhedron とする。このとき $\mathbb{K}_W \underset{G}{\simeq} \mathbb{K}_S$ を示せばよい。

$\beta \in K^0$ (K の頂点) に対し, K_S の open set U_β を $U_\beta = \{x \in K_S \mid x_\beta > \max_{\gamma \in K^0} x_\gamma\}$ (x_β, x_γ は x の重心座標), $\mathcal{U} = \{U_\beta\}_{\beta \in K^0}$ とすると, $\mathcal{U}$ は locally finite open covering で, $\forall U_\beta \in \mathcal{U}, \forall g \in G$ に対し, $gU_\beta \in \mathcal{U}$, (このとき $\mathcal{U}$ を G-covering という), $gU_\beta = U_{g\beta}$。($\mathcal{U}$ に G-action が入る。)

$p_\beta: K_S \to \mathbb{R}$ を $p_\beta(x) = d(x, K_S - U_\beta) / \sum_{\gamma \in K^0} d(x, K - U_\gamma)$, $x \in K_S$ (d は K_S の距離) とすると $\{p_\beta\}_{\beta \in K^0}$ は partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$.

又, $p_\beta(x) = p_{g\beta}(gx)$, (このとき $\{p_\beta\}_{\beta \in K^0}$ を G-partition of unity という)

今 $\mathcal{U}$ の nurve は K である。∴ $p: \mathbb{K}_S \to \mathbb{K}_W$ を $p(x) = \sum_{\beta \in K^0} p_\beta(x) \beta$ とする。(p は n-ad の continuous G-map)。又 $i: \mathbb{K}_W \to \mathbb{K}_S$ (identity) は G-map, 又 $i \circ p$ は各 simplex をそれ自身の中に写す。∴ $(1-t) i \circ p + t 1_{K_S}$ は, $i \circ p$ と $1_{\mathbb{K}_S}$ の G-homotopy, 同様にして $p \circ i \underset{G}{\simeq} 1_{\mathbb{K}_W}$。∴ $i: \mathbb{K}_W \underset{G}{\simeq} \mathbb{K}_S: p$, q.e.d.

<u>Definition</u> (C.f. J. Milnor [8] P277)

G-space X が G-E.L.C.X (G-equilocally convex) とは.

$^\exists U \subset X \times X$, diagonal の G-invariant neighborhood

$^\exists \lambda : U \times I \to X$ G-map ($X \times X$ の G-action は diagonal action, $I=[0,1]$, trivial action,

s.t (1), $\lambda(x, y, 0) = x$. $\lambda(x, y, 1) = y$. $(x, y) \in U$

(2) $\lambda(x, x, t) = x$, $x \in X$, $t \in I$

$^\exists \mathcal{V} = \{V_\beta\}$ open covering of X (V_β は convex set)

s.t $V_\beta \times V_\beta \subset U$ $\lambda(V_\beta \times V_\beta \times I) = V_\beta$.

同様に G-space の n-ad $\mathbb{X} = (X; X_1, \cdots X_{n-1})$ が G-E.L.C.X とは.

X は G-E.L.C.X, X_i $i=1 \cdots n-1$ は closed G-subspace.

s.t (4) $x, y \in X_i$ $(x, y) \in U \Rightarrow \lambda(x, y, t) \in X_i$, $t \in I$, $i=1, \cdots n-1$.

(この λ を structure map という。)

$\mathcal{V}$ は G-covering でなくてよい。実際. λ は G map であるから.

gV_β は convex, ∴ $\mathcal{V}$ に gV_β を加えて G-covering にできる。

<u>Theorem 1.2</u> G-space の n-ad $\mathbb{A} = (A; A_1 \cdots A_{n-1})$ に対し, 次の

(i), (ii), (iii) は同値

(i) $\mathbb{A} \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{W}_G^n$

(ii) $\mathbb{A}$ は metrizable G-E.L.C.X の G-homotopy type をもつ。

(iii) $\mathbb{A}$ は paracompact G-E.L.C.X の G-homotopy type をもつ。

<u>proof</u> (i) ⇒ (ii) (C.f J. Milnor [8] lemma 2)

$\mathbb{K}_s = (K, K_1 \cdots K_{n-1})$: simplicial G-complex in the strong topology の n-ad が

metrizable G-E.L.C.X であることを示せばよい。(∵ Theorem 1.1)

$V_\beta = O(\beta, K)$ (open star) $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in K^0}$ $V = \bigcup_{\beta \in K^0} V_\beta \times V_\beta$

$\mu : V \to K$ を $\mu(x, y)_\beta = \min(x_\beta, y_\beta) / \sum_{\delta \in K^0} \min(x_\delta, y_\delta)$ とし、

$\lambda : V \times I \to K$ を $\lambda(x, y, t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2t\,\mu(x, y) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)\,\mu(x, y) + (2t-1)y & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ とする

と、(1)(2)(3)(4) をみたす。∴ $|K|_S$ は G-E.L.C.X で metrizable。//

(ii) ⇒ (iii) は明らか、(iii) ⇒ (i) (Cf J. Milnor [8] lemma 4).

$|A$ は paracompact G-E.L.C.X としてよい。Theorem 1.1 より $|A$ は G complex の n-ad に G dominated、を示せばよい。

$\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ を A の convex G-covering とする。A は paracompact。∴ fully normal。∴ $\mathcal{V}$ の細分 $\mathcal{W}'$ で A の各点 a の $\mathcal{W}'$ に関する star $S(a, \mathcal{W}')$ がある $V_\beta \in \mathcal{V}$ に含まれるような open covering $\mathcal{W}'$ をとる。又 G は finite で $A_{i\,(i=1\cdots n-1)}$ は closed。∴ 次の (i)(ii)(iii) をみたす open G-covering $\mathcal{W} = \{W_a\}_{a \in A}$ がとれる。(i) $gW_a = W_a$ or. $gW_a \cap W_a = \phi$ $\forall g \in G$ (ii) $\mathcal{W}$ は $\mathcal{W}'$ の細分、(iii) $W_a \cap A_i \neq \phi \Rightarrow a \in A_i$

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ を $\mathcal{W}$ の細分である locally finite open G-covering とする。

A_i closed より $U_{\alpha_1} \cap A_{i_1} \neq \phi, \cdots U_{\alpha} \cap A_{i_k} \neq \phi \Rightarrow U_\alpha \cap A_{i_1} \cap \cdots A_{i_k} \neq \phi$、となるようにとることができる。N を $\mathcal{U}$ の nerve、subcomplex N_i を '$\langle \alpha_0 \cdots \alpha_k \rangle$ は N_i の k-simplex $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A_i \cap U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k} \neq \phi$' と定義する。これにより、simplicial G-complex の n-ad $|N = (N; N_1 \cdots N_{n-1})$ を得る。

$\{P_\alpha\}$ を G partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$ とする。(partition of unity $\{p'_\sigma\}$ に対し，平均 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} p'_{\sigma}(ga)$ をつくればよい。)

$p: A \to N$ を $p(a)=\sum_{\sigma} p_\sigma(a)\sigma$ とすると，p は n-ad の G-map $p: \mathbb{A} \to \mathbb{N}$ になる。

G-map $q: \mathbb{N} \to \mathbb{A}$ を次の様に定義する。$\mathrm{Sd}\,N$ を N の重心細分とし，$\mathrm{Sd}\,N$ の頂点に順序を $\sigma < \sigma' \Leftrightarrow \sigma \subset \sigma'$ となるように入れる。このとき G-action はこの順序を保つ。$\mathrm{Sd}\,\mathcal{U} = \{V'_\sigma ; V_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge V_{\sigma_k} (\neq \phi)\}$ $\sigma = \langle \sigma_0 \cdots \sigma_k \rangle$ とする。各 $V'_\sigma \in \mathrm{Sd}\,\mathcal{U}$ に対し，$W_{a_\sigma} \in \mathcal{W}$ を，$V'_\sigma \subset W_{a_\sigma}$，$g W_{a_\sigma} = W_{g a_\sigma}$ となるように選ぶ。($a_\sigma \in A$)

q を $\mathrm{Sd}\,N$ の skelton による induction で構成する。

(1) $\sigma \in \mathrm{Sd}\,N^0$ (σ は $\mathrm{Sd}\,N$ の頂点) に対し，$q(\sigma) = a_\sigma$.

(2) k-simplex $\langle \sigma_0 < \cdots < \sigma_k \rangle$ の点 $x \in \langle \sigma_0, \cdots \sigma_k \rangle$，$x = (1-t)\sigma_0 + ty$，$y \in \langle \sigma_1 \cdots \sigma_k \rangle$ に対し，$q(x) = \lambda(a_{\sigma_0}, q(y), t)$，$t \in I$.

こうすると q は well defined, continuous G-map になる。又，$\langle \sigma_0 < \cdots < \sigma_k \rangle \subset \mathrm{Sd}\,N_i \Rightarrow V_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge V_{\sigma_k} \neq \phi$，$\therefore a_{\sigma_j} \in A_i$ $j=0 \cdots k$，従って λ の性質により，inductive に q は n-ad の G-map $: \mathbb{N} \to \mathbb{A}$ が示される。

$\forall a \in A$ に対し，V_β を $S(a, \mathcal{W}) \subset V_\beta$ なるものとすれば，$q \circ p(a) \in V_\beta$ $\therefore (a, q \circ p(a)) \in V_\beta \times V_\beta \subset V$，$\therefore f_t : A \to A$．$f_t(a) = \lambda(a, q \circ p(a), t)$ は $q \circ p(a)$ と I_A の G-homotopy を与える。 q.e.d.

<u>proposition 1.3</u> (c.f. [8], prop 3)

$\mathbb{A} = (A; A_1 \cdots A_{n-1}) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{W}_G^n$，$\mathbb{B} = (B; B_1 \cdots B_{m-1}) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{W}_G^m$ ならば

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = (A \times B; A_1 \times B, \cdots A_{n-1} \times B, A \times B_1, \cdots A \times B_{m-1}) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{W}_G^{n+m-1}$

<u>proof</u> Theorem 1.2 により，$\mathbb{A}, \mathbb{B}$ は metrizable, G-E.L.C.X.

としてよい。このとき $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ は product metric により metrizable かつ convex set として，$\mathbb{A},\mathbb{B}$ の convex set の product を，structure map として $\mathbb{A},\mathbb{B}$ の structure map の product をとれば $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ は G-E.L.C.X. ∴ Theorem 1.2 により $\mathbb{A}\times\mathbb{B}\in Ob\,\mathcal{W}_G^{n+m-1}$ //

X, Y を G-spaces とする。function space $F(X,Y)$ は次の G-action により G-space となる，$(g\varphi)(x)=g\varphi(g^{-1}x)$，$\varphi\in F(X,Y)$，$x\in X$，$g\in G$，

<u>Theorem 1.4</u> (Cf. [8], Thm. 3)

$\mathbb{A}=(A;A_1\cdots A_{n-1})\in Ob\,\mathcal{W}_G^n$，$\mathbb{C}=(C,C_1\cdots C_{n-1})$ compact G-space の n-ad とすると，$F(\mathbb{C},\mathbb{A})=(F(C,A);F(C,C_1;A,A_1)\cdots F(C,C_{n-1};A,A_{n-1}))\in Ob\,\mathcal{W}_G^n$

<u>proof</u> Theorem 1.2 により $\mathbb{A}$ は metrizable G-E.L.C.X としてよい。このとき $F(C,A)$ は metrizable で $F(C,C_i;A,A_i)$ $i=1\cdots n-1$ は closed G-sub space，(C,C_i は compact より) [8], lemma 3 と同様に，$U'\subset F(C,A)\times F(C,A)$ を $U'=\{(\varphi,\psi)\in F(C,A)\times F(C,A)\mid(\varphi(c),\psi(c))\in U,\ c\in C\}$ $\lambda':U'\times I\to F(C,A)$ を $\lambda'(\varphi,\psi,t)(c)=\lambda(\varphi(c),\psi(c),t)$，$c\in C$，$(\varphi,\psi)\in U'$，$t\in I$ 各 $\varphi\in F(C,A)$ に対し，φ の convex open neighborhood を $F(C,D_1\cdots D_k;A,V_{\beta_1}\cdots V_{\beta_k})$ とすれば $F(\mathbb{C},\mathbb{A})$ は G-E.L.C.X。ここに $\varphi(D_i)\subset V_{\beta_i}$ $i=1\cdots k$ $D_1\cdots D_k$ は C の compact set covering。//

V を finite dimensional G-module とする。$\Sigma^V=V^c$：V の 1 点 compact化，とする，X を pointed G-space，$x_0\in X$ を base point とする。(base point は常に X^G の中にあるとする。)

$\Omega^V(X)=F(\Sigma^V,*;X,x_0)$ とおき，($\dim V$ fold) loop space と呼ぶ。

$\Omega^V(X)$ は constant map $c:\Sigma^V\to x_0$ を base point にもつ。

Corollary 1.5 (cf. [8], Cor 3)

$(X;x_0)\in \mathcal{W}_G^2$ ならば, $(\Omega^V(X), c)\in \mathcal{W}_G^2$.

proof Theorem 1.4 より $C=(\Sigma^V;*,\Sigma^V)$, $\mathbb{A}=(X,x_0,x_0)$ とすれば $(F(\Sigma^V,X);\Omega^V(X), c)\in \mathcal{W}_G^3$ ∴ $(\Omega^V X, c)\in \mathcal{W}_G^2$ //

§2

まず Brown-Adams の表現定理について論じ, それを使って G-cohomology theory の Ω-G-spectrum による表現を考える。

$\mathcal{CW}_0^G$ を pointed G-complex の category, $\mathcal{CW}_*^G$ を $\mathcal{CW}_0^G$ の full subcategory で $X\in Ob\,\mathcal{CW}_*^G \longleftrightarrow X^H$ は connected, ${}^\forall H\subset G$ subgroup なるものとする。h を $\mathcal{CW}_0^G$ 上の Brown functor (G-homotopy functor で Wedge axiom, Mayer-Vietoris axiom をみたすもの) とする。$Y\in Ob\,\mathcal{CW}_*^G$, $u\in h(Y)$ に対し, $T_u:[X,Y]^G\to h(X)$, $T_u[f]=f^*u$ ($[\ ,\ ]^G$ は pointed G-homotopy class の set) は $\mathcal{CW}_*^G$ 上の functor の natural transformation である。

$[G/H^+\wedge S^n, Y]^G\cong \pi_n(Y^H)$ $n\geq 1$ (S^n の G-action は trivial) に注意する。$f:Y\to Y'$ $\mathcal{CW}_*^G$ の map が $X=G/H^+\wedge S^n$ $n\geq 1$, ${}^\forall H\subset G$: subgroup に対し $f_*:[X,Y]^G\cong[X,Y']^G$ をみたせば, Theorem of J.H.C Whitehead for G-complexes により f は G-homotopy equivalence。

従って，mapping cone, equator 等が $\mathcal{CW}_*^G$ の中で構成できることに注意して，$\{S^n;\ n\geq 1\}$ のかわりに $\{G/H^+\wedge S^n;\ n\geq 1,\ H\subset G \text{ subgroup}\}$ に対して Brown の construction を行なえば次の proposition を得る。

<u>proposition 2.1</u>

$\mathcal{CW}_*^G$ 上の Brown functor h は representable。
i.e. $^\exists Y\in\mathcal{CW}_*^G$, $^\exists u\in h(Y)$, such that $T_u: [X,Y]^G\cong h(X)$, $X\in\mathcal{CW}_*^G$ (natural equivalence)，Y は unique up to G-homotopy equivalence.

次に $\mathcal{CF}_*^G$ を finite G-complex からなる $\mathcal{CW}_*^G$ の full subcategory として，$\mathcal{CF}_*^G$ 上の group-valued Brown functor h の表現を Adams の方法に従って述べる。

$X\in\mathcal{CW}_*^G$ に対し，$\hat{h}(X)=\varinjlim_\gamma h(X_\gamma)$, $X_\gamma\in\mathcal{CF}_*^G$, $X_\gamma\subset X$: G-subcomplex とおく。次のことに注意する。

<u>lemma</u>

$X\in\mathcal{CW}_*^G$ は $X=\bigcup_\gamma X_\gamma$ と表わせる。ここに $X_\gamma\in\mathcal{CF}_*^G$, $X_\gamma\subset X$: G-subcomplex

<u>proof</u>. $^\forall K\subset X$: finite G-subcomplex に対し $^\exists K'\in\mathcal{CF}_*^G$ s.t. $K\subset K'$, $K'\subset X$ G-subcomplex, を，G の subgroup H の inclusion による induction で示す。$K\subset K_1$, finite G-subcomplex of X を $^\forall H'\subsetneq H$: proper subgroup に対し $K_1^{H'}$ は connected なるものと仮定する。K_1^H の各 connected component と base point を結ぶ X^H 内の path を L_i とし $K_2=K_1\cup(\bigcup_i G\cdot L_i)$ とすれば G は finite より，K_2 は finite G-subcomplex で $K\subset K_2$, $K_2^{H'}$: connected for $^\forall H'\subseteq H$ subgroup (L_i は sub

complexとなるようにとる。) 又 G: finite よりこの操作は有限回で終る。 //

$\hat{h}$ は $\mathcal{CW}_*^G$ 上の weak G-homotopy functor (cf [1]) で,
$Y \in \mathcal{CW}_*^G$, $u \in \hat{h}(Y)$ に対し,

$T_u: [X, Y]^G \to h(X)$, $X \in \mathcal{C}\mathfrak{F}_*^G$ $T_u([f]) = f^*u$

$\hat{T}_u: [X, Y]_w^G \to \hat{h}(X)$ $X \in \mathcal{CW}_*^G$ $\hat{T}_u([f]) = f^*u$

は natural transformation。

又, finite G-complex は, ある finite simplicial G-complex に G-homotopy equivalent だから, finite G-complex の G-homotopy type は countable, 又 finite simplicial G-complexes K, K' に対し, $\forall f: K \to K'$ G-map は, simplicial G-map に G-approximate される。
∴ $[K, K']^G$ は countable set。 (これらの construction は各 cell (simplex) の G-orbit の代表元に対してつくり, G-action で equivariant に拡張することにより, 普通の場合と同様にしてできる。) 従って Adams [1] と同様にして次の proposition を得る。

<u>Proposition 2.2</u>

$\mathcal{C}\mathfrak{F}_*^G$ 上の group valued Brown functor h は representable
i.e. $\exists Y \in \mathcal{CW}_*^G$ $\exists u \in \hat{h}(Y)$ s.t. $T_u: [X, Y]^G \cong h(X)$, $X \in \mathcal{C}\mathfrak{F}_*^G$
さらに, Y は unique, up to G-homotopy equivalence

<u>Remark</u> [1] Theorem 1.9 の analogue; $\hat{T}_u: [X, Y] \cong \hat{h}(X)$ は, Y にある種の Hopf space structure を入れて, $\hat{T}_u$ を group

のisomorphismにすることができる。

次に G-cohomology theory (C.f. G. Segal [9]) を定義する。

Definition

$\tilde{h}^*_G = \{\tilde{h}^\alpha\}_{\alpha\in RO(G)}$ (RO(G) は G の実表現環) が $\mathcal{W}_0^G$ ($\mathcal{F}_0^G$) 上の reduced G-cohomology theory とは次の A1), A2) をみたすもの.

A1) $\tilde{h}^\alpha, \alpha\in RO(G)$ は $C\mathcal{W}_0^G$ ($C\mathcal{F}_0^G$) 上で Mayer-Vietoris axiom, Wedge axiom をみたす contravariant G-homotopy functor.

A2) 各 V: finite dimentional G-module に対し, natural, suspension isomorphism $\sigma^V : \tilde{h}^\alpha(X)\cong \tilde{h}^{\alpha+V}(\Sigma^V X)$, ${}^\forall\alpha\in RO(G)$ $\Sigma^V X = \Sigma^V\wedge X$ が定義される。

$\mathcal{F}_0^G$ 上の G-cohomology theory の表現を考える。

$\tilde{h}^\alpha|C\mathcal{F}^G_*$ に対し, ${}^\exists Y'_\alpha \in C\mathcal{W}^G_*$ s.t. $[X, Y'_\alpha]^G \cong \tilde{h}^\alpha(X)$, $X\in C\mathcal{F}^G_*$ (prop. 2.2)

$Y_\alpha = \Omega Y'_{\alpha+1}$ ($=\Omega^1 Y'_{\alpha+1}$) (1 は 1-dim. trivial G-module) とおく。

Y_α は loop space として Hopf space (H-space) で,その積は G-action と可換。この意味で Y_α を Hopf G-space と呼ぶ。このとき,各 $H\subset G$: subgroup に対し, Y_α^H は Hopf space。

又, $X\in C\mathcal{W}_0^G \Rightarrow \Sigma X = \Sigma^1 X \in C\mathcal{W}^G_*$ であるから, ${}^\forall X\in C\mathcal{F}_0^G$ に対し

$\tilde{h}^\alpha(X) \overset{\sigma^1}{\cong} \tilde{h}^{\alpha+1}(\Sigma X)\cong [\Sigma X, Y'_{\alpha+1}]^G \cong [X, \Omega Y'_{\alpha+1}]^G = [X, Y_\alpha]^G$, $\alpha\in RO(G)$

は natural group isomorphism 。

$X\in C\mathcal{W}^G_*$ に対し, $\hat{h}^\alpha(X) = \varprojlim_\gamma \tilde{h}^\alpha(X_\gamma)$, $X_\gamma\in C\mathcal{F}^G_*$, $X_\gamma\subset X$: G-subcomplex

とおくと, $\hat{h}^\alpha(X) = \varprojlim_\gamma \tilde{h}^\alpha(X_\gamma)\cong \varprojlim_\gamma [X_\gamma, Y_\alpha]^G = [X, Y_\alpha]^G_w$

又，$\hat{h}^\alpha(X) = \varprojlim_\gamma \hat{h}^\alpha(X_\gamma) \overset{\sigma^V}{\cong} \varprojlim_\gamma \hat{h}^{\alpha+V}(\Sigma^V X_\gamma) = \hat{h}^{\alpha+V}(\Sigma^V X)$.

$\therefore [X, Y_\alpha]^G_W \cong \hat{h}^\alpha(X) \overset{\sigma^V}{\cong} \hat{h}^{\alpha+V}(\Sigma^V X) \cong \varprojlim_\gamma [\Sigma^V X_\gamma, Y_{\alpha+V}]^G \cong \varprojlim_\gamma [X_\gamma, \Omega^V Y_{\alpha+V}]^G \cong [X, \Omega^V Y_{\alpha+V}]^G_W$

今．Thm 1.5 により，$Y_\alpha, \Omega^V Y_{\alpha+V} \in \mathcal{C}\mathcal{W}^G_0$ としてよい。

$[X, Y_\alpha]^G_W \cong [X, \Omega^V Y_{\alpha+V}]^G_W$ において $X = Y_\alpha, \Omega^V Y_{\alpha+V}$ として，$1_{Y_\alpha}, 1_{\Omega^V Y_{\alpha+V}}$ に対応する G-map を $f_{\alpha,V} : Y_\alpha \to \Omega^V Y_{\alpha+V}$，$g_{\alpha,V} : \Omega^V Y_{\alpha+V} \to Y_\alpha$ とする。

このとき．$(f_{\alpha,V})_* = (g_{\alpha,V})_*^{-1}$，$f_{\alpha,V} \circ g_{\alpha,V} \underset{G,W}{\simeq} 1_{\Omega^V Y_{\alpha+V}}$，$g_{\alpha,V} \circ f_{\alpha,V} \underset{G,W}{\simeq} 1_{Y_\alpha}$，で $f_{\alpha,V}$, $g_{\alpha,V}$ は Hopf G-space の weak morphism。又．$Y_\alpha, \Omega^V Y_{\alpha+V} \in \mathcal{C}\mathcal{W}^G_0$

$\therefore {}^\forall H \subset G$: subgroup に対し $f^H_{\alpha,V}$ $g^H_{\alpha,V}$ は Hopf complex の weak morphism で．

$f^H_{\alpha,V} \circ g^H_{\alpha,V} \underset{W}{\simeq} 1_{(\Omega^V Y_{\alpha+V})^H}$ $g^H_{\alpha,V} \circ f^H_{\alpha,V} \underset{W}{\simeq} 1_{Y^H_\alpha}$。$\therefore (f^H_{\alpha,V})_* : \pi_n(Y^H_\alpha) \cong \pi_n((\Omega^V Y_{\alpha+V})^H)$ $(n \geq 0)$

$\therefore f^H_{\alpha,V}$ は Hopf complex の weak homotopy equivalence を与える。

$\therefore$ Theorem of J.H.C. Whitehead for G-complexes により，$f_{\alpha,V}$ は G-homotopy equivalence．$f_{\alpha,V}$．$Y_\alpha \underset{G}{\simeq} \Omega^V Y_{\alpha+V,0}$ 従って次を得る。

<u>Theorem 2.3</u>

$\hat{h}^*_G = \{\hat{h}^\alpha ; \alpha \in RO(G)\}$ を $\mathcal{W}^G_0$ $(\mathcal{F}^G_0)$ 上の G-cohomology theory とすると，${}^\forall \alpha \in RO(G)$，${}^\exists Y_\alpha \in \mathcal{C}\mathcal{W}^G_0$ s.t Y_α は Hopf G-complex で $\hat{h}^\alpha$ を group valued functor として represent する。，又．finite dimensional G-module V に対し，${}^\exists f_{\alpha,V} : Y_\alpha \underset{G}{\simeq} \Omega^V Y_{\alpha+V}$，$f_{\alpha,V}$ は (Weak) morphism of Hopf G-complexes。これは suspension isomorphism σ^V を induce する。

W を各 irreducible G-module の copy を1つづつ直和したものとする。(trivial G-module を含む。) G-spectrum $\mathbb{E}$ を $\mathbb{E} = \{E_n ; \varepsilon_n, \varepsilon_n : \Sigma^W E_n \to E_{n+1}\}, n \in \mathbb{Z}\}$．$(E_n \in \mathcal{W}^G_0$, ε_n : G-map$)$ で定義する。

$^\forall n \in \mathbb{Z}$, に対し, $\varepsilon_n' : E_n \to \Omega^\omega E_{n+1}$ (ajoint of ε_n) が G-homotopy equivalence のとき, $\mathbb{E}$ を Ω-G-spectrum という。

Theorem 2.3 で, $E_n = Y_{n\omega}$ $\varepsilon_n' = f_{n\omega,\omega} : E_n \underset{G}{\simeq} \Omega^\omega E_{n+1}$ とおいて Ω-G-spectrum $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n ; \Sigma^\omega E_n \to E_{n+1}, n \in \mathbb{Z}\}$ を得る。

Theorem 2.4

全ての reduced G-cohomology theory $\tilde{h}_G^* = \{\tilde{h}^\alpha ; \alpha \in RO(G)\}$ は Ω-G-spectrum で represent できる。i.e. $^\forall \alpha \in RO(G)$ に対し, 次の natural isomorphism (as groups) を得る。

$$\tilde{h}^\alpha(X) \cong [X, \Omega^V E_n]^G \qquad X \in \mathcal{W}_0^G(\mathcal{F}_0^G)$$

ここに, V: finite dimensional G-module, $\alpha + V = n\omega$.

References

[1] J.F. Adams, A variant of E.H Brown's representability theorem. Topology 10 (1971) 185-198

[2] G.E. Bredon, Equivariant cohomology theories, Lect. Note in Math 34 Springer-Verlag

[3] E.H. Brown Cohomology theories, Ann. of Math. 75 (1962) 467-484 Correct. Ann of Math 78 p201

[4] E.H. Brown. Abstruct homotopy theory, Trans. Amer. Math. Soc 119 (1965) 79-85.

[5] T. Matumoto On G-CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead J. Fac. Soc, Univ. of Tokyo Sect I 18 (1973) 363-374.

[6] T. Matumoto, Equivariant cohomology theories on G-CW complexes. Osaka J. Math. 10 (1973) 51-68

[7] J. Milnor The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. of Math. 65 (1957) 357-362

[8] J. Milnor. On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans. Amer

Math. Soc. 90 (1959) 272-280

[9] G. B. Segal Equivariant stable homotopy theories, Actes Congrès intern. math. 1970 tom 2 59-63