数理解析研究所講究録
第305巻 1977年 66-79

On H-equivalences of $SU(3)$, $U(3)$ and $Sp(2)$

徳大　工　　澤下教親

§1. 序

$\mathcal{E}(X)$をXの自己ホモトピー同値写像の表わすホモトピー類全体の作る群とする（空間はすべて基点をもつCW複体とし，写像，ホモトピーはすべて基点を保つものとする）．XをH空間，$m: X\times X\longrightarrow X$をその積とし（$m|X\times * = 1 = m|*\times X$ in $[X,X]$），$X=(X,m)$で表わすことにする．H空間(X,m)から(X,m)へのH写像であるホモトピー同値写像（H-equivalence）の表わすホモトピー類全体の作る$\mathcal{E}(X)$の部分群を$\mathcal{E}_H(X)=\mathcal{E}_H(X,m)$とする．

$\{X_n,\ f_n: X\to X_n,\ p_n: X_n\to X_{n-1}\}$をH空間XのPostnikov分解とするとき（すなわち，$\pi_i(X_n)=0\ (i>n)$，$f_{n*}: \pi_i(X)\approx\pi_i(X_n)\ (i\leqq n)$，$p_n f_n = f_{n-1}$ in $[X, X_{n-1}]$，$K(\pi_n(X),n)\xrightarrow{i_n} X_n\xrightarrow{p_n} X_{n-1}$；ファイバー空間)，よく知られているように，$X_n$は$p_n$, f_n, i_nをH写像とするH空間になる．このとき，

$\mathcal{E}(X_n)$ について Y. Nomura [4] による次の結果がある.

定理 1 (Y. Nomura [4, Th 2.1, 2.9])　X を単連結な H 空間とし, $\{X_n, f_n, p_n\}$ を Postnikov 不変量 $\{k^{n+1}\}$ をもった X の Postnikov 分解とする. このとき, 次の完全系列を得る.

$$0 \longrightarrow H_n \longrightarrow \mathcal{E}(X_n) \longrightarrow G_n \longrightarrow 1 .$$

ここに
$$H_n = p_n^* H^n(X_{n-1}; \pi_n(X)) / (\Omega k^{n+1})_* [X_n, \Omega X_{n-1}]$$
$$G_n = \{ (h, \varepsilon) \in \mathcal{E}(X_{n-1}) \times \mathcal{E}(K(\pi_n(X), n+1)),$$
$$k^{n+1} h = \varepsilon k^{n+1} \text{ in } H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n(X)) \},$$

$p_n^* : H^n(X_{n-1}; \pi_n(X)) \longrightarrow H^n(X_n; \pi_n(X))$ はいつも単射である.

ここでは, この定理を基礎にして $\mathcal{E}_H(X)$ を $X = SU(3), U(3)$ 及び $Sp(2)$ に対して計算するのが目的である.

§2.　$\mathcal{E}_H(X)$ と $\mathcal{E}_H(X_n)$ との関係

$\{X_n, f_n, p_n\}$ を X の Postnikov 分解とするとき, X_n の cell 構造は次で与えられる.

(2.1)　$$X_n = X \cup (\bigcup_\alpha e_\alpha^{n+2}) \cup (\bigcup_\beta e_\beta^{n+3}) \cup \cdots$$

X を H 空間とするとき, X_n は自然に H 空間となり, 自然な準同型写像 $\varphi_n : \mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}(X_n)$ ($\varphi_n(h) f_n = f_n h$) の制限として, 準同型写像

$$\tilde{\varphi}_n : \mathcal{E}_H(X) \longrightarrow \mathcal{E}_H(X_n)$$

が定義できる. このとき, 次の結果を得る.

定理 2.2　X を ℓ 次元 CW 複体でかつ H 空間とする.

(i)　$n \geqq \ell$ ならば $\hat{\varphi}_n$ は単射,

(ii)　$n \geqq 2\ell$ ならば $\hat{\varphi}_n$ は全射.

[証明]　(i)　[5, Lemma 7.1] より, $n \geqq \ell$ のとき φ_n は同型写像であるから, (i) は明らかである.

(ii)　(i) の場合と同様に φ_n $(n \geqq 2\ell)$ は同型写像であるから, 任意の元 $h \in \mathcal{E}_H(X_n)$ に対して, $f_n \bar{h} = h f_n$ を満たすある元 $\bar{h} \in \mathcal{E}(X)$ が存在する. f_n は H 写像であるから, $f_{n*}\, m(\bar{h} \times \bar{h}) = f_{n*}\, \bar{h}\, m$ を得る (m は X の積). また仮定 $n \geqq 2\ell$ より $f_{n*} : [X \times X, X] \longrightarrow [X \times X, X_n]$ は単射であるから, $\bar{h} \in \mathcal{E}_H(X)$ を得る.　　　　証明終り

上の定理において, 一般には $\hat{\varphi}_n$ が $2\ell > n \geqq \ell$ に対して同型写像にならない例として次をもつ.

例 2.3　$X = S^\ell$ $(\ell = 3, 7)$, $\{X_n\}$ を X の Postnikov 分解とする. このとき,

$$\mathcal{E}_H(X_n) = \begin{cases} \mathcal{E}(X) = Z_2 & (\ell \leqq n < 2\ell) \\ \mathcal{E}_H(X) = 1 & (2\ell \leqq n) \end{cases}$$

[証明]　$X_n \wedge X_n$ は $2\ell - 1$ 連結であるから, $[X_n \wedge X_n, X_n] = 0$ $(\ell \leqq n < 2\ell)$. 従って, [6, Prop 2.7] より $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathcal{E}(X_n) = \mathcal{E}(X) = Z_2$ $(\ell \leqq n < 2\ell)$ を得る. また定理 2.2 よ

り，$\varepsilon_H(X_n) = \varepsilon_H(X) = 1$　($2l \leqq n$) を得る．　　　証明終り

X，Yを2つのH空間とし，$f: X \longrightarrow Y$をH写像とする．fによって誘導されたファイバー空間を$\Omega Y \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} X$，$k: E_f \times \Omega Y \longrightarrow E_f$をファイバー$\Omega Y$の作用とする．このとき，[2]より$E_f$は$i$, p, kをH写像とするH空間となる．

$$K: [E_f, \Omega Y] \longrightarrow [E_f, E_f]$$

を$\alpha \in [E_f, \Omega Y]$に対して$K(\alpha) = k(1 \times \alpha)d$（$d$は対角写像）で定義する．このとき，直ちに$K(\alpha) = 1 + i\alpha$であることがわかる．

補題 2.4　$(\Omega f)_*: [E_f \wedge E_f, \Omega X] \longrightarrow [E_f \wedge E_f, \Omega Y]$において$\mathrm{Im}(\Omega f)_* = 0$のとき，$\alpha \in [E_f, \Omega Y]$に対して，$\alpha$がH写像であることと$K(\alpha)$がH写像であることは同値である．

［証明］　kはH写像であるから，αがH写像のとき，$K(\alpha)$はH写像となる．

逆に$K(\alpha)$をH写像とし，m_1とm_2をそれぞれE_fとYの上のような積とする．このとき，

$$K(\alpha)m_1 = m_1 + i\alpha m_1, \quad m_1(K(\alpha) \times K(\alpha)) = m_1 + i m_2(\alpha \times \alpha)$$

であるから，$i\alpha m_1 = i m_2(\alpha \times \alpha)$を得る．また仮定より$i_*: [E_f \wedge E_f, \Omega Y] \longrightarrow [E_f \wedge E_f, E_f]$は単射であるから，$\alpha$がH写像となる．　　　証明終り

§3. $SU(3)$ の Postnikov 分解

$SU(3)$ の Postnikov 分解 の計算に必要な $SU(3)$ のホモトピー群は M. Mimura and H. Toda [3] によって与えられる。

$$S^3 \xrightarrow{i} SU(3) \xrightarrow{p} S^5$$

を主バンドルとする。このとき、次の補題を得る。

補題 3.1 (M. Mimura and H. Toda [3]) $SU(3)$ のホモトピー群 $\pi_i(SU(3))$ ($i \leqq 8$) は次の表で与えられる。

i	1, 2	3	4	5	6	7	8
$\pi_i(SU(3))$	0	Z	0	Z	Z_2+Z_3	0	Z_4+Z_3
生成元		$i_*\iota_3$		$[2\iota_5]$	$i_*\omega$		$[2\iota_5]\nu_5+[\alpha_1]$

ここに $[\alpha]$ は $p_*[\alpha]=\alpha$ なる元を表わす。

この補題により、$SU(3)$ の Postnikov 分解 $\{X_n\}$ ($n \leqq 8$) は次の図式で与えられることがわかる。

$$\begin{tikzcd}
X_8 \arrow[r, "p_8"] & X_7 \arrow[r, equal, "p_7"] \arrow[d, "k^9"] & X_6 \arrow[r, "p_6"] & X_5 \arrow[r, "p_5"] \arrow[d, "k^7"] & X_4 \arrow[r, equal, "p_4"] \arrow[d, "k^6"] & X_3 = K(Z,3) \\
 & K(Z_{12},9) & & K(Z_6,7) & K(Z,6) &
\end{tikzcd}$$

命題 3.2 上の図式において、$H^{n+1}(X_{n-1}\,;\pi_n(SU(3)))$ ($n \leqq 8$) は次の表で与えられる。

n	1, 2, 3, 4	5	6	7	8
$H^{n+1}(X_{n-1}\,;\pi_n(SU(3)))$	0	Z_2	Z_6	0	Z_{12}

そしてPostnikov不変量$\{k^{n+1}\}$はそれぞれの対応するコホモロジー群を生成する。

この命題は補題3.1，(2.1)及びSerreの完全系列を使うことによって得られる。

$c: SU(3) \longrightarrow SU(3)$ と $v: SU(3) \longrightarrow SU(3)$ をそれぞれ $c(\alpha)=\bar{\alpha}$（αの共役行列），$v(\alpha)=\alpha^{-1}$ で定義されるホモトピー同値写像とし，$c_n=\varphi_n(c)$，$v_n=\varphi_n(v)$ とおく．また同型写像 $\varphi_8: \mathcal{E}(SU(3)) \longrightarrow \mathcal{E}(X_8)$ によって，$\xi_n \in \mathcal{E}(X_n)$ $(n \geqq 8)$ と $\xi \in \mathcal{E}(SU(3))$ を次のように定義する．

$$\xi_8 = k(x), \quad \xi = \varphi_8^{-1}(\xi_8), \quad \xi_n = \varphi_n(\xi) \ (n \geqq 9).$$

ここに x は $H^8(X_8; Z_{12})$ の生成元とする。このとき，命題3.2と定理1を繰返し使って，帰納的に $\mathcal{E}(X_n)$ を計算することにより次の命題を得る。

命題 3.3　$\{X_n\}$ を $SU(3)$ のPostnikov分解とするとき，

(i)　$\mathcal{E}(X_n) = Z_2$（生成元 v_n）$(n=3,4)$，

(ii)　$\mathcal{E}(X_n) = Z_2 \times Z_2$（生成元 v_n と c_n）$(5 \leqq n \leqq 7)$，

(iii)　$\mathcal{E}(X_n) = D_{12} \times Z_2$　$(n \geqq 8)$，ここに $D_{12} = D_{12}(\xi_n, v_n)$ で第2因子 Z_2 は c_n で生成される．

(iv)　$\mathcal{E}(SU(3)) = D_{12} \times Z_2$，ここに $D_{12} = D_{12}(\xi, v)$ で第2因子 Z_2 は c で生成される。

ここに $D_i(a,b)$ は $a^i = 1 = b^2$，$ab = ba^{-1}$ なる関係をもっ

た a, b で生成される位数 $2i$ の2面体群である。

§4. $SU(3)$ と $U(3)$ の H-equivalences

§3で得られた $\mathcal{E}(X_n)$ に関する結果を使って, $\mathcal{E}(X_n)$ の部分群 $\mathcal{E}_H(X_n)$ を計算することにより, 次の主定理を得る。

定理 4.1 $\{X_n\}$ を特殊ユニタリー群 $SU(3)$ の Postnikov 分解とする。このとき,

(i) $\mathcal{E}_H(X_n) = Z_2$ (生成元 v_n) $(n = 3, 4)$,

(ii) $\mathcal{E}_H(X_5) = Z_2 \times Z_2$ (生成元 v_5 と c_5),

(iii) $\mathcal{E}_H(X_n) = Z_2$ (生成元 c_n) $(n \geqq 6)$,

(iv) $\mathcal{E}_H(SU(3)) = Z_2$ (生成元 c).

定理 4.2 ユニタリー群 $U(3)$ に対して, $\mathcal{E}_H(U(3)) = Z_2 \times Z_2$ となる。

定理4.2は, $U(n)$ が $S^1 \times SU(n)$ と H-equivalence であり, [6, Example 3.12 (i)] より $\mathcal{E}_H(S^1 \times SU(n)) = Z_2 \times \mathcal{E}_H(SU(n))$ であるから, 定理4.1より直ちに得られる。

[定理4.1の証明] $[X_n \wedge X_n, X_n] = 0$ $(n \leqq 5)$ であるから, [6, Prop 2.7] より $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathcal{E}(X_n)$ となる。よって (i) と (ii) は命題 3.3 の (i) と (ii) より得られる。

明らかに $c \in \mathcal{E}_H(SU(3))$ であるから, すべての n に対して

$$(4.3) \qquad c_n \in \mathcal{E}_H(X_n)$$

となる。$i: S^3 \longrightarrow SU(3)$ を自然な包含写像とするとき，ν_6 の定義より $\nu_6 f_6 i = -f_6 i$ となる．今 $\nu_6 \in \mathcal{E}_H(X_6)$ と仮定すると，$-f_6 i$ がH写像となり，従って，$(f_6 i)_* \phi = 0$ (in $[S^3 \times S^3, X_6]$) を得る．ここに $\phi \in [S^3 \times S^3, S^3]$ は $\phi(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ (積は S^3 の canonical な積) で定義される写像の表わす類とする．$\pi: (S^3 \times S^3, S^3 \vee S^3) \longrightarrow (S^6, *)$ を collapsing map とするとき，次の可換図を得る．

$$
\begin{array}{ccccc}
\pi_6(S^3) & \xrightarrow{i_*} & \pi_6(SU(3)) & \xrightarrow[\approx]{f_{6*}} & \pi_6(X_6) \\
\downarrow \pi^* & & & & \downarrow \pi^* \\
[S^3 \times S^3, S^3] & & \xrightarrow{(f_6 i)_*} & & [S^3 \times S^3, X_6]
\end{array}
$$

この図式において，$\pi_6(S^3) = Z_{12}$，$\pi_6(SU(3)) = Z_6$，補題 3.1 より i_* は全射，π^* は両方共に単射である．また $\phi \in \pi^*(\pi_6(S^3))$ である．故に $(f_6 i)_* \phi = 0$ より $6\phi = 0$ となる．これは I. M. James [1, P.176] の結果に矛盾する．よって $\nu_6 \notin \mathcal{E}_H(X_6)$．従って，命題 3.3 の (ii) と (4.3) より (iii) の $n = 6, 7$ の場合を得る．

$X_8 \wedge X_8$ は 5 連結で，$\pi_i(\Omega X_7) = 0$ ($i \geqq 6$) であるから，$[X_8 \wedge X_8, \Omega X_7] = 0$ となる．よって補題 2.4 の仮定が $f = h^9$，$X = X_7$，$Y = K(Z_{12}, 9)$ に対して満される．よって $\alpha \in H^8(X_8; Z_{12})$ に対して，α がH写像であることと $K(\alpha)$ がH写像であることは同値である．ところが $H^8(X_8; Z_{12})$ は自明

でない原始的な元を含まないから，従って自明でない H 写像を含まない．故に次を得る．

(4.4) $\qquad K(\alpha) \notin \mathcal{E}_H(X_8) \qquad (\alpha\,(\neq 0) \in H^8(X_8; Z_{12}))$

また K の定義より $K(\alpha) f_8 i = f_8 i$，従って $K(\alpha)\nu_8 f_8 i = -f_8 i$ となる．よって $\nu_6 \notin \mathcal{E}_H(X_6)$ の証明と同様の方法によって

(4.5) $\qquad K(\alpha)\nu_8 \notin \mathcal{E}_H(X_8) \qquad (\alpha \in H^8(X_8; Z_{12}))$

を得る． 故に (4.3)，(4.4)，(4.5) 及び命題 3.3 の (iii) より (iii) の $n=8$ の場合を得る．また (4.3) より $\mathcal{E}_H(X_n)$ $(n \geqq 9)$ は自明でない元 c_n を含むから，定理 2.2 の (i) より (iii) の $n \geqq 9$ の場合を得る．(iv) も同様に得られる． 証明終り

§5. $Sp(2)$ の Postnikov 分解

$Sp(2)$ の Postnikov 分解の計算に必要な $Sp(2)$ のホモトピー群は M. Mimura and H. Toda [3] によって与えられる．

$$S^3 \xrightarrow{i} Sp(2) \xrightarrow{p} S^7$$

を主バンドルとする．このとき，次の補題を得る．

補題 5.1 (M. Mimura and H. Toda [3]) $Sp(2)$ のホモトピー群 $\pi_i(Sp(2))$ $(i \leqq 10)$ は次の表で与えられる．

i	1, 2	3	4	5	6	7	8, 9	10
$\pi_i(Sp(2))$	0	Z	Z_2	Z_2	0	Z	0	$Z_8+Z_3+Z_5$
生成元		$i_*\iota_3$	$i_*\eta_3$	$i_*\eta_3^2$		$[12\iota_7]$		$[\nu_7]+i_*\alpha_2+i_*\alpha_{1,5}$

ここに $[\alpha]$ は $p_*[\alpha]=\alpha$ なる元を表わす。

この補題により，$Sp(2)$ の Postnikov 分解 $\{X_n\}$ $(n\leqq 10)$ は次の図式で与えられることがわかる.

$$\begin{tikzcd} X_{10} \arrow[r, "p_{10}"] & X_9 \arrow[r, equal, "p_9"] \arrow[d, "k^{11}"] & X_8 \arrow[r, equal, "p_8"] & X_7 \arrow[r, "p_7"] & X_6 \arrow[r, equal, "p_6"] \arrow[d, "k^8"] & X_5 \arrow[r, "p_5"] & X_4 \arrow[r, "p_4"] \arrow[d, "k^6"] & X_3 = K(Z,3) \arrow[d, "k^5"] \\ & K(Z_{120},11) & & & K(Z,8) & & K(Z_2,6) & K(Z_2,5) \end{tikzcd}$$

命題 5.2　上の図式において，$H^{n+1}(X_{n-1};\pi_n(Sp(2)))$ $(n\leqq 10)$ は次の表で与えられる.

n	1, 2, 3	4	5	6	7	8, 9	10
$H^{n+1}(X_{n-1};\pi_n(Sp(2)))$	0	Z_2	Z_2	0	Z_{12}	0	Z_{120}

そして Postnikov 不変量 $\{k^{n+1}\}$ はそれぞれの対応するコホモロジー群を生成する.

この命題は補題 5.1，(2.1) 及び Serre の完全系列を使うことによって得られる.

$v: Sp(2)\longrightarrow Sp(2)$ を $v(\alpha)=\alpha^{-1}$ で定義されるホモトピー同値写像とし，$v_n=\varphi_n(v)$ とおく．また同型写像 φ_{10}: $\mathcal{E}(Sp(2))\longrightarrow \mathcal{E}(X_{10})$ によって，$\xi_n\in\mathcal{E}(X_n)$ $(n\geqq 10)$ と

$\xi \in \mathcal{E}(Sp(2))$ を次のように定義する.

$$\xi_{10} = K(x), \quad \xi = \varphi_{10}^{-1}(\xi_{10}), \quad \xi_n = \varphi_n(\xi) \ (n \geqq 11).$$

ここに x は $H^{10}(X_{10}; Z_{120})$ の生成元とする. このとき, 命題5.2と定理1を繰返し使って, 帰納的に $\mathcal{E}(X_n)$ を計算することにより次の命題を得る.

命題 5.3　$\{X_n\}$ を $Sp(2)$ の Postnikov 分解とするとき,

(i)　$\mathcal{E}(X_n) = Z_2$ （生成元 v_n） $(3 \leqq n \leqq 9)$,

(ii)　$\mathcal{E}(X_n) = D_{120}$ $(n \geqq 10)$, ここに $D_{120} = D_{120}(\xi_n, v_n)$,

(iii)　$\mathcal{E}(Sp(2)) = D_{120}$, ここに $D_{120} = D_{120}(\xi, v)$.

§ 6.　$Sp(2)$ の H-equivalences

§5 で得られた $\mathcal{E}(X_n)$ に関する結果を使って $\mathcal{E}_H(X_n)$ を計算することにより, 次の主定理を得る.

定理 6.1　$\{X_n\}$ をシンプレクティク群 $Sp(2)$ の Postnikov 分解とする. このとき,

(i)　$\mathcal{E}_H(X_n) = Z_2$ $(3 \leqq n \leqq 9)$,

(ii)　$\mathcal{E}_H(X_n) = 1$ または Z_2 $(10 \leqq n \leqq 13)$,

(iii)　$\mathcal{E}_H(X_n) = 1$ $(n \geqq 14)$,

(iv)　$\mathcal{E}_H(Sp(2)) = 1$.

この定理の証明には次の命題を使う.

命題 6.2　$Sp(2)_{(5)}$ を $Sp(2)$ の (5) における局所化とするとき，H空間 $Sp(2)_{(5)}$ の任意のループ積はホモトピー可換でない．また $(X_n)_{(5)}$ $(n \geqq 14)$ の $Sp(2)$ の canonical な積から誘導された積はホモトピー可換でない。

この命題の証明の概略は次の通りである．

$Sp(2)_{(5)} = \Omega Y$ とおく．$E : S\Omega Y \to Y$ を evaluation map とする．このとき，ΩY のループ積がホモトピー可換であると仮定すると，J. D. Stasheff [7, Th. 1.10] により $E \vee E : S\Omega Y \vee S\Omega Y \to Y$ の拡張 $f : S\Omega Y \times S\Omega Y \to Y$ が存在する．従って次の可換な図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
H^8(S\Omega Y; Z_5) \arrow[d, "\nabla^*"] & H^8(Y; Z_5) \arrow[l, "E^*"'] \arrow[r, "\mathcal{P}^1"] \arrow[d, "f^*"] & H^{16}(Y; Z_5) \arrow[d, "f^*"] \\
H^8(S\Omega Y \vee S\Omega Y; Z_5) & H^8(S\Omega Y \times S\Omega Y; Z_5) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[r, "\mathcal{P}^1"] & H^{16}(S\Omega Y \times S\Omega Y; Z_5)
\end{tikzcd}
$$

ここに $j : S\Omega Y \vee S\Omega Y \to S\Omega Y \times S\Omega Y$ は包含写像，$\nabla : S\Omega Y \vee S\Omega Y \to S\Omega Y$ はおりたたみ写像．$H^8(S\Omega Y; Z_5) = Z_5$ の生成元を a とし，$b \in H^8(Y; Z_5)$ を $E^*(b) = a$ なる元とする．このとき，次のことがわかる（計算略）．

$$f^*\mathcal{P}^1(b) \neq 0, \qquad \mathcal{P}^1 f^*(b) = 0 .$$

これは上の図式の可換性に矛盾する．故に ΩY のループ積はホモトピー可換でないことがわかる．

この命題の後半も同様の方法で証明される．

［定理 6.1 の証明］ (i) 容易に $[X_n \wedge X_n, X_n] = 0$ $(3 \leqq n \leqq 9)$ であることがわかるから，［6, Prop. 2.7］より $\mathcal{E}_H(X_n) = \mathcal{E}(X_n)$ を得る．従って命題 5.3 の (i) より (i) を得る．

(ii) $Sp(2) = S^3 \cup e^7 \cup e^{10}$ であるから，$\Omega P_{10*} : [Sp(2) \wedge Sp(2), \Omega X_{10}] \longrightarrow [Sp(2) \wedge Sp(2), \Omega X_9]$ は全射である．従って，$\Omega P_{10*} : [X_{10} \wedge X_{10}, \Omega X_{10}] \longrightarrow [X_{10} \wedge X_{10}, \Omega X_9]$ も全射である．よって補題 2.4 の仮定が $f = k''$, $X = X_{10}$, $Y = K(Z_{120}, 11)$ に対して満される．よって (4.4) の証明と同様の方法により，次を得る．

(6.3) $\qquad \xi_{10}^{k} \notin \mathcal{E}_H(X_{10}) \qquad (0 < k < 120)$

今，$\xi_n^k \nu_n \in \mathcal{E}_H(X_n)$ $(0 \leqq k < 120,\ n \geqq 10)$ と仮定すると，$(\xi_n^k \nu_n)\nu_n = \nu_n(\xi_n^k \nu_n)$ となるから，命題 5.3 の (ii) より $k = 0 \mod 60$ となる．よってこのことと (6.3) と命題 5.3 の (ii) より (ii) を得る．

(iii) 今 $\xi_n^k \nu_n \in \mathcal{E}_H(X_n)$ と仮定する．このとき，$k = 0 \mod 60$ であるから，$(\xi_n^k \nu_n)_{(5)} = (\nu_n)_{(5)}$ となることがわかる．従って $(\nu_n)_{(5)}$ は H 写像となる．ところがこのことは命題 6.2 の後半に矛盾する．故に次を得る．

$$\xi_n^k \nu_n \notin \mathcal{E}_H(X_n) \qquad (0 \leqq k < 120,\ n \geqq 14)$$

これと (6.3) と命題 5.3 の (ii) より (iii) を得る．

(iv) は (iii) と定理 2.2 より明らかである． 証明終り

参考文献

[1] I.M. James, On H-spaces and thier homotopy groups, Quart. J. Math. 11 (1960), 161-179.

[2] __________, On extensions of H-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 126-135.

[3] M. Mimura and H. Toda, Homotopy groups of SU(3), SU(4) and Sp(2), J. Math. kyoto Univ. 3-2 (1964), 217-250.

[4] Y. Nomura, Homotopy equivalences in a principal fibre space, Math. Zeit. 92 (1966), 380-388.

[5] N. Sawashita, On the group of self-equivalences of the product of spheres, Hiroshima Math. J. 5 (1975), 69-86.

[6] __________, On the self-equivalences of H-spaces, J. Math. Tokushima Univ. 10 (1976), 17-33.

[7] J. D. Stasheff, On homotopy abelian H-spaces, Proc. Camb. Soc. 57 (1961), 734-745.