数理解析研究所講究録
第 306 巻 1977 年 36-49

$(*)_p$-Condition をみたす Banach space について

北大 理　　高橋泰嗣

§1. 序

$(*)_p$-Condition をみたす Banach space は無限次元測度論において重要な役割りを果たす。とりわけ Hilbert space において知られている Sazonov の定理, Bochner-Minlos の定理, Dao-Xing による quasi-invariant measure の存在定理, Kuo 等による abstract Wiener space に関する定理等はこの種の Banach space に対しては自然な形で拡張され得る（c.f. [7], [8]）。

他方この Banach space の class が $\mathcal{L}_p$-space (c.f. [3]) の dual space を含むことより，この種の Banach space の性質を調べることはそれ自身意味のあることのように思える。我々の目的としては

(1) Banach space E が $(*)_p$-Condition をみたす時

$^\forall M \subset E$ closed subspace に対して M は$(*)_p$- condition をみたすか？　E/M は $(*)_p$- condition をみたすか？

E_n $(n = 1, 2, \cdots, N)$ が $(*)_p$- condition をみたす時 $E = \sum_{n=1}^{N} \oplus E_n$ は $(*)_p$- condition をみたすか？

(2). (1) の結果の応用として

(i) $(*)_p$- condition をみたす Banach space の例を豊富に与えること。

(ii) J. Cohen の定理 (c.f. [1]) を一般化すること.

(iii) 無限次元測度論への応用

§2. 定義及び既知の定理

E, F を Banach sp. とする時, $E \to F$ continuous linear op. 全体を $L(E, F)$ で表わす。$E \to F$ p-absolutely summing op. 全体を $\Pi_p(E, F)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$, strongly q-summing op. 全体を $D_q(E, F)$ で表わすことにする $(1 \leqq q \leqq \infty)$。

<u>定義</u> E を Banach space, $1 \leqq p < \infty$ とする。

E : $(*)_p$ − Condition をみたす

$$\overset{\text{det.}}{\Longleftrightarrow} \quad ^\forall\{x_n^*\} \subset E^* \quad \|x_n^*\| = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して $\bigcap_{T \in L(F, E)} l_p(\|T^* x_n^*\|^p) = l_p$ が成立.

$$\left(\text{但し} \quad F = \begin{cases} c_0 & \text{if} \quad p = 1 \\ l_{p^*} & \text{if} \quad p > 1 \end{cases} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \right)$$

<u>注意</u> 定義において $\|x_n^*\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$ のところは $\inf_n \|x_n^*\|>0$ としても同等である。

<u>定理 2.1</u> (c.f. [6])

E : Banach space, $1 \leqq p < \infty$ とする時次は同等

(i) E は $(*)_p$- Condition をみたす

(ii) $\Pi_p(E, F) \subset D_{p^*}(E, F)$ for ${}^\forall F$: Banach sp. $(1/p + 1/p^* = 1)$

(iii) $\Pi_p(E, l_p) \subset D_{p^*}(E, l_p)$ $\quad (1/p + 1/p^* = 1)$

<u>注意</u> 上記定理の(iii)において l_p は無限次元 $\mathcal{L}_p$- space でおきかえてもよい。何故ならば F が無限次元 $\mathcal{L}_p$- space のとき F は l_p と isomorphic な Complemented subspace を含む (c.f. [4]) ことから容易に従う。

<u>系 2.1</u> E : Banach space とする時

E : $(*)_2$- Cond. をみたす $\Longleftrightarrow$ E : inner product sp. と isomorphic

§3. $(*)_p$- Condition をみたす Banach sp. の遺伝性 $(1 \leqq p < \infty)$

E が $(*)_p$- Condition をみたす時 E と isomorphic な Banach sp. はすべて $(*)_p$- Condition をみたす。もっと一般に

<u>定理 3.1</u> E, F : Banach spaces, $\varphi : E \longrightarrow F$ onto conti. linear op. とする時

E : $(*)_p$- Cond. をみたす $\Longrightarrow$ F : $(*)_p$- Cond. をみたす。

<u>系3.1</u>　E : Banach space, $M \subset E$ closed subspace とする時, E : $(*)_p$- Cond. をみたす $\Longrightarrow$ E/M : $(*)_p$- Cond. をみたす。

<u>系3.2</u>　E : Banach space, F : reflexive Banach sp. で F^* は E^* の subspace と isomorphic とする. この時

E : $(*)_p$- Cond. をみたす $\Longrightarrow$ F : $(*)_p$- Cond. をみたす

<u>定理3.2</u>　E_n $(n=1,2,\cdots,N)$ Banach spaces

$E = \sum_{n=1}^{N} \oplus E_n$ (topological direct sum) とする時

E : $(*)_p$- Cond. をみたす $\Longleftrightarrow$ $^\forall n$ $(n=1,2,\cdots,N)$ E_n : $(*)_p$- Cond. をみたす。

<u>系3.3</u>　E, F Banach spaces, $T : E \to F$ Fredholm op. とする時, E : $(*)_p$- Cond. をみたす $\Longleftrightarrow$ $T(E)$: $(*)_p$- Cond. をみたす。

<u>系3.4</u>　E : Banach sp. $M \subset E$ Complemented closed subsp. とする時, E : $(*)_p$- Cond. をみたす $\Longrightarrow$ M : $(*)_p$- Cond. をみたす

特に codim. $M < \infty$ の時は

E : $(*)_p$- Cond. をみたす $\Longleftrightarrow$ M : $(*)_p$- Cond. をみたす

<u>注意</u>

<u>Problem A</u> : E は $(*)_p$- Cond. をみたす Banach sp. $M \subset E$ closed subsp. とする時

$\Longrightarrow$ M : $(*)_p$- Cond. をみたすか？

この問題に関しては M が Complemented なら常に O.K.

また $p=2$ の時は E : $(*)_2$-cond. をみたす $\Longrightarrow E$: inner product sp. と isomorphic (∵ 系 2.1) ∴ 任意の closed subsp. は complemented O.K.

$p=1$ の時は次の如き反例がある。l_∞ は $(*)_1$-cond. をみたすが l_∞ の subsp. で l_1 と isomorphic なものが存在する。ところで l_1 は $(*)_1$-cond. をみたさない。実は l_∞ の closed subsp. で $(*)_1$-cond. をみたさないものは同型を除いても非可算無限個存在する (c.f. 次の §4)。

以上の事から Problem A は $1<p<2$, $2<p<\infty$ の時どうなるかであるが これは次の Cohen の問題に関連がある。

<u>Problem B</u> (J. Cohen) : $1<p<2$, $2<p<\infty$ とする。

$^\forall E$, $^\forall F$ Banach spaces, $^\forall M \subset E$ closed subsp. を与えた時, $^\forall T \in \Pi_p(M, F)$ $^\exists \tilde{T} \in \Pi_p(E, F^{**})$ s.t. $\tilde{T}|_M = T$ (i.e. $\tilde{T}$ は T の extension) ?

容易にわかることは Problem B が Yes $\Rightarrow$ Problem A が Yes

定理 2.1 を使えば $F = l_p$ に対して Problem B が Yes

$\Rightarrow$ Problem A が Yes

次に Banach sp. E の subsp. の性質がどの程度 E に影響するかを考える。定理 3.2 もその種のものであるがそれとは別の形で次を得る。

<u>定理 3.3</u> E : Banach space とする。

$^\forall M \subset E$ separable subsp. $^\exists M_0 \supset M$ closed subsp. of E

s.t. M_0 は $(*)_p$-Cond. をみたす $\Longrightarrow$ E : $(*)_p$-Cond. をみたす。

系3.5 任意の Hilbert sp. H は $(*)_p$-Cond. をみたす $(1 \leqq p < \infty)$

∵ $^\forall M \subset H$ separable closed subsp. とすれば $M \simeq l_2$,

ところで $^\forall p$ $(1 \leqq p < \infty)$ に対して l_2 は $L_p(0,1)$ の subsp. と

isomorphic ∴ l_2 は $L_p(0,1)^*$ の quotient sp. と isomorphic

$L_p(0,1)^*$ は $(*)_p$-Cond. をみたすから 系3.1 より l_2 は $(*)_p$-

cond. をみたす。

系3.6 E : Banach sp. とする時 次は同等

(i) E は $(*)_p$-Cond. をみたす for all $1 \leqq p < \infty$

(ii) E は $(*)_2$-Cond. をみたす

(iii) $^\forall p$ $(1 \leqq p < \infty)$, $^\forall M \subset E$ separable subsp. $^\exists M_0 \supset M$

s.t. M_0 は $(*)_p$-Cond. をみたす。

(iv) E は inner product sp. と isomorphic

次に dual sp. が $(*)_p$-Condition をみたす場合を考えてみよう。

定義 E : Banach sp. $1 \leqq p < \infty$ とする。

E : D-$(*)_p$-Condition をみたす

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ E^* ; $(*)_p$-Cond. をみたす

定理3.4 E: Banach sp. $1 \leqq p < \infty$ とする.
E: D-$(*)_p$-Cond. をみたす $\Longrightarrow$ $^\forall M \subset E$ closed subsp. に対し
M は D-$(*)_p$-Cond. をみたす。

定理3.5 E_n $(n=1, 2, \cdots, N)$ Banach spaces,
$E = \sum_{n=1}^{N} \oplus E_n$ (topological direct sum) とする時
E: D-$(*)_p$-Cond. をみたす $\Longleftrightarrow$ $^\forall n$, E_n: D-$(*)_p$-Cond. をみたす

注意 Problem A の dual の問題として
Problem C: E: D-$(*)_p$-Cond. をみたす Banach sp.
$M \subset E$ closed subsp. とする時

$$\Longrightarrow E/M : \text{D-}(*)_p\text{-Cond. をみたすか？}$$

この場合も $p=2$ の時 O.K. $p=1$ の時 NO.

§4. $(*)_p$-Condition をみたす Banach space の例.
みたさない Banach sp. の例.

$1 \leqq p < \infty$ とする. Lindenstrauss & Pelczynski の定義した $\mathcal{L}_p$-space は D-$(*)_p$-Cond. をみたす。$\mathcal{L}_{p*}$-space は $(*)_p$-Cond. をみたす $(1/p + 1/p* = 1)$。特に任意の $L_{p*}(\mu)$ space は $(*)_p$-Cond. をみたす。更に $C(K)$ (K: Compact Hausdorff sp.), Kakutani の M-space は $(*)_1$-Cond. をみたす. 一般に dual が L_1 型の空間は $(*)_1$-Cond. をみたす. また任意の Hilbert space は $(*)_p$-Cond. を

みたす for all $1 \leqq p < \infty$。他方 l_1 は $(*)_p$-Cond. をみたさない、従って系3.4より $\mathcal{L}_1$-space は $(*)_p$-Cond. をみたさない for all $1 \leqq p < \infty$。もっと一般に言えば $\mathcal{L}_r$-space は $(*)_p$-Cond. をみたさない. $(1 \leqq r < 2,\ 1 \leqq p < r^*)$。

例4.1 X: Banach sp. $1 \leqq p \leqq 2$ とする.
もし $\varphi(x) = \|x\|^p$ $(x \in X)$ が negative definite ならば X は D-$(*)_p$-Cond. をみたす。i.e. X^* は $(*)_p$-Cond. をみたす。

∵ $\varphi(x) = \|x\|^p$ $(x \in X)$ が negative def. より $^\exists L_p(\mu)$ s.t. X は $L_p(\mu)$ の subsp. と isomorphic ∴ 定理3.4より X は D-$(*)_p$-Cond. をみたす。

例4.2 X: $\mathcal{L}_r$-space, $2 \leqq r \leqq \infty$ とする。この時 $1 \leqq {}^\forall p \leqq r^*$ に対して X は $(*)_p$-Cond. をみたす。

∵ $r = \infty$ の時は $p = r^* = 1$ であるから明らか.
$2 \leqq r < \infty$ とする. X は $\mathcal{L}_r$-space より $^\exists L_r(\mu)$ s.t. X は $L_r(\mu)$ の complemented subsp. と isomorphic (∵ c.f. [4])
∴ 系3.4より $L_r(\mu)$ が $(*)_p$-condition をみたすことを言えばよい。ところで $1 \leqq p \leqq r^* \leqq 2$ より $^\exists L_p(\nu)$ s.t. $L_{r^*}(\mu)$ は $L_p(\nu)$ の subsp. と isomorphic (c.f. [4]) ∴ 定理3.4より $L_{r^*}(\mu)$ は D-$(*)_p$-Cond. をみたす. ∴ $L_r(\mu)$ は $(*)_p$-Cond. をみたす。

<u>注意.</u> もし Problem A が Yes ならば X : $\mathcal{L}_r$-space, $1<r\leqq 2$ とする時 $r^*\leqq {}^\forall p<\infty$ に対して X は $(*)_p$-Cond. をみたす。何故なら $1<p^*\leqq r\leqq 2$ より ${}^\forall L_r(\mu)$ に対して ${}^\exists L_{p^*}(\nu)$ s.t. $L_r(\mu)$ は $L_{p^*}(\nu)$ の subsp. と isomorphic、$L_{p^*}(\nu)$ は $(*)_p$-Cond. をみたすから $L_r(\mu)$ は $(*)_p$-Cond. をみたす。

<u>例4.3</u> K : Compact Hausdorff sp. $\sigma: K \xrightarrow{\text{onto}} K$ homeomorphism $\sigma^2=$ identity とする。この時 $C_\sigma(K)$-space は次の如く定義される。

$$C_\sigma(K)=\{\, f\in C(K):\ f(\sigma k)=-f(k)\quad {}^\forall k\in K \,\}$$

このように定義された $C_\sigma(K)$-sp. は $(*)_1$-Cond. をみたす。

∵ $C_\sigma(K)$-space は $C(K)$ の complemented subsp. であるから。

<u>例4.4</u> $C_\sigma(K)$-space, M-space を含む形で Grothendieck が定義した G-space は $(*)_1$-Cond. をみたす。

∵ G-space は M-space からの contractive projetion の image であるから (c.f. [4])。

<u>例4.5</u> Banach sp. X が P_λ-space ($1\leqq\lambda<\infty$) とは ${}^\forall Y\supset X$ ${}^\exists P: Y\xrightarrow{\text{onto}} X$ projection s.t. $\|P\|\leqq\lambda$ となることである。このように定義された P_λ-space は $(*)_1$-Cond. をみたす for all $1\leqq\lambda<\infty$.

∵ X : P_λ-space とする。$X\subset {}^\exists C(K)$ であるから X は $C(K)$ からの Proj. の image となる。∴ 定理3.1 より従う。

<u>例4.6</u> Banach sp. X が N_λ-space ($1\leqq\lambda<\infty$) とは

$^{\exists}B_\tau \subset X$ finite dim. P_λ-sp. s.t. $X = \overline{\cup B_\tau}$ となることである。このように定義された N_λ-space は $(*)_1$-cond. をみたす。また N_λ-space の second dual X^{**} も $(*)_1$-cond. をみたす。

∵ X: N_λ-space $\Longrightarrow$ X^{**}: P_λ-space $\Longrightarrow$ X: $\mathcal{L}_{\infty, 10\lambda}$-space

例4.7

$$H_p = \left\{ f(z) :\ f(z) \text{ は } |z| < 1 \text{ で analytic},\ \|f\| = \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

とすれば H_p は D-$(*)_p$-cond. をみたす。H_{p^*} は $(*)_p$-cond. をみたす ($1 < p < \infty$, $1/p + 1/p^* = 1$)。

∵ H_p は $L_p(0,1)$ に isomorphic より。

次に $(*)_p$-cond. をみたさない空間の例を与える。典型的な例として l_1 は $(*)_p$-cond. をみたさない for all $1 \leqq p < \infty$。

系3.4 により Banach sp. X が l_1 と isomorphic な complemented subsp. を含むならば X は $(*)_p$-cond. をみたさない $1 \leqq {}^{\forall}p < \infty$。

例4.8 X: Banach sp. $X^* \supset {}^{\exists}Z \simeq c_0$ とする。この時 X は $(*)_p$-cond. をみたさない $1 \leqq {}^{\forall}p < \infty$。

∵ この場合 $^{\exists}M \subset X$ complemented subsp. s.t. $M \simeq l_1$。

例4.9 X: $\mathcal{L}_r$-space, $1 \leqq r < 2$ とする。この時 $1 \leqq {}^{\forall}p < r^*$ に対して X は $(*)_p$-cond. をみたさない。

∵ X: $\mathcal{L}_r$-space より X は l_r と isomorphic な complemented subsp. を含む。系3.4 により l_r が $(*)_p$-cond. をみたさないことを示せばよいのであるが証明は quasi-inv. measure method

を使ってなされる。詳述はしない。

§5. J. Cohenの定理の一般化

ここでは今までの結果の応用としてJ. Cohenの結果(c.f.[1])を一般化する。

__定理5.1__ $1 < p \leq \infty$, $1/p + 1/p^* = 1$ とする。

(i) E: $\mathcal{L}_p$-space, or その quotient space, or direct sum とする時 $\Longrightarrow$ $\Pi_{p^*}(E, F) \subset D_p(E, F)$ for all Banach sp. F

(ii) F: $\mathcal{L}_{p^*}$-space, or その subspace, or direct sum とする時

$\Longrightarrow$ $D_p(E, F) \subset \Pi_{p^*}(E, F)$ for all Banach sp. E

更に $2 \leq p \leq \infty$ の時は (i), (ii) と同じ条件のもとで

(i)′ $\Pi_{q^*}(E, F) \subset D_q(E, F)$ for $p \leq {}^\forall q \leq \infty$, ${}^\forall F$: Banach sp.

(ii)′ $D_q(E, F) \subset \Pi_{q^*}(E, F)$ for $p \leq {}^\forall q \leq \infty$, ${}^\forall E$: Banach sp.

∵ (i), (ii) についてはJ. Cohenの結果(c.f.[1])に加えて定理2.1, 系3.1, 定理3.2, 定理3.4, 定理3.5より従う。

(i)′, (ii)′ については上記の定理に加えて例4.2より従う。

__定理5.2__ 次の如きBanach space E, Fが存在する。

$$\Pi_p(E, F) \neq D_{p^*}(E, F) \qquad (1 \leq p < \infty,\ 1/p + 1/p^* = 1)$$

もっと具体的に言えば

(i) $1 \leq p \leq 2$ の時 $2 < {}^\forall r \leq \infty$ に対して

$\Pi_p(l_{r^*}, l_2) \not\subset D_{p^*}(l_{r^*}, l_2)$, $D_{p^*}(l_2, l_r) \not\subset \Pi_p(l_2, l_r)$

(ii) $2 \leqq p < \infty$ の時 $p < {}^\forall r \leqq \infty$ に対して

$\Pi_p(l_{r^*}, l_p) \not\subset D_{p^*}(l_{r^*}, l_p)$, $D_{p^*}(l_{p^*}, l_r) \not\subset \Pi_p(l_{p^*}, l_r)$

いずれの場合も $1/r + 1/r^* = 1$ とする。

注意 上記(i), (ii)は $r > 2$ とする時 l_{r^*} は $(*)_p$-cond. をみたさないことを示す ($1 \leqq {}^\forall p < r$)。従って $\mathcal{L}_{r^*}$-space は $(*)_p$-cond. をみたさない ($1 \leqq {}^\forall p < r$)。J. Cohen の結果 (c.f. [1]) は $r = \infty$, $r^* = 1$ の時である。

§6. 無限次元測度論への応用

冒頭に述べた如く $(*)_p$-cond. をみたす Banach space は無限次元測度論において重要な役割りを果たす。ここではその一つとして Gaussian measure に関する Sazonov の定理の一般化を紹介しよう (c.f. [7])

$E = \cap E_n$ を可分な可算ノルム空間, $\|\cdot\|_H$ を E上の連続な Hilbertian norm とする。$\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{2}\|x\|_H^2)$ $(x \in E)$ は E上の positive definite conti. fn となるがこの時 E^*上の Cylinder measure μ_H が一意的に存在して

$$\varphi(x) = \int_{E^*} e^{i\langle x^*, x\rangle} d\mu_H(x^*) \quad \text{for } {}^\forall x \in E$$

となる。この μ_H を $\varphi(x)$ に対応する Gaussian measure と呼ぶことにする。一般に μ_H は有限加法的測度であって完全加法

的ではない。

定理6.1 $1 \leqq p \leqq 2$ で各 n について E_n は $(*)_p$-Cond. をみたすとせよ。その時次は同等である。

(i) $\varphi(x)$: Hilbert-Schmidt topologyで連続である。

(ii) μ_H: 完全加法的

注意 Eが Hilbert sp. の時この結果は Sazonov によって得られた。Eがある種の locally convex sp. の場合に Badrikian は Sazonov の定理を一般化したが証明の方法は Hilbert 空間の場合とほとんど同様になされる。我々は $(*)_p$-Cond. を使って Badrikian の結果も一般化できるが詳述しない。

参考文献

[1] J. Cohen: Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200

[2] S. Kwapień: A linear topological characterization of inner product spaces, Studia Math. 38 (1970) 277-278

[3] J. Lindenstrauss and Pełczyński: Absolutely summing operators between $\mathcal{L}_p$-spaces, Studia Math. 29 (1968) 275-326

[4] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri: Classical Banach spaces, Springer-Verlag Berlin・Heiderberg・Newyork (1973)

[5] A. Pietsch : Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. 28 (1967) 333-353

[6] Y. Takahashi : Some remarks on p-absolutely summing operators, Hokkaido Math. Jour. Vol. 5, No 2 (1976) 308-315

[7] Y. Takahashi : Bochner-Minlos' theorem on infinite dimensional spaces, Hokkaido Math. Jour. Vol. 6, No 1 (1977) 102-129

[8] Y. Takahashi : On measurable norms and abstract Wiener spaces, Hokkaido Math. Jour. Vol. 6, No 2 (to appear)