数理解析研究所講究録
第306巻 1977年 50-67

種々の作用素イデヤルと補間空間

九州工大 宮崎慶一

§1. 序

ヒルベルト空間上のtrace作用素, Hilbert-Schmidt作用素に源を発する作用素の研究は, Grothendieck [4], [5], Pietsch [21] 等の位相線形空間の考察を動機として, 著しく発展, 展開されて来た。

有界線形作用素全体の作るノルム空間 $L(X, Y)$ の中で, イデヤルを作る次のような種々の作用素類が考察されている: 核型作用素, 積分型作用素, 総和型作用素, 分解可能作用素, それらの共役作用素類。

一方, 偏微分方程式に現れるSobolev空間, Besov空間, およびそれらの上の作用素の研究に発する補間空間の理論がある。

表題について, 我々は,

[I] 作用素が, 定義域および値域の補間空間とどう関りあうか,

又，[II] 種々の作用素イデヤルの補間空間を考えるとき、それに属する作用素は如何なる特徴をもつか，

或は，[III] 作用素を特徴付ける種々の特性数列に，補間空間の一つである $\ell_{p,q}$ の性質を応用した作用素の考察，に注目する。これらに関して，それぞれ

[I] : [7], [11], [19], [22], [26], [27], [28]

[II] : [15], [25]

[III] : [13], [14], [16], [17], [18], [26], [27]

等の結果がある。

ここでは，こうした観点から，一部の結果の総括と，補間空間論的結果並びに証明の整理を報告する。

§2. 補間空間論的整理

補間空間の一般的事項については [2], [11] 参照。定義を一べつすると；

X_i $(i=0, 1)$ を可分位相空間 $\mathcal{X}$ に連続的に含まれるノルム空間の対 (interpolation pair) とし，

<u>実補間空間 $(X_0, X_1)_{\theta,q}$</u>，$0<\theta<1$，$1\le q\le\infty$，とは，$t>0$

$$K(t, x) := \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_i\in X_i,\, i=0,1}} \left(\|x_0\|_{X_0} + t\,\|x_1\|_{X_1} \right) \quad \text{とし，}$$

$$X_{\theta,q} \equiv (X_0, X_1)_{\theta,q} :=$$
$$\{ x \in X_0 + X_1 : \quad \|x\|_{X_{\theta,q}} := \| t^{-\theta} K(t, x) \|_{L^q_*} < \infty \}$$

ここに $\|f(t)\|_{L^q_*} := \left(\int_0^\infty |f(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$ 。

複素補間空間 $[X_0, X_1]_\theta$, $0 < \theta < 1$

とは，

$$\mathcal{F} := \{ f(z) : f(z) \text{ は } 0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \text{ で解析的}, \ 0 \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq 1$$
$$\text{で連続で}, \ f(j + it) \in X_j \quad (j = 0, 1) \}$$

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \max \left(\sup_{-\infty < t < \infty} \|f(it)\|_{X_0}, \ \sup_{-\infty < t < \infty} \|f(1 + it)\|_{X_1} \right)$$

とし，

$$X_\theta \equiv [X_0, X_1]_\theta := \{ x = f(\theta) : f \in \mathcal{F} \}$$

$$\|x\|_{X_\theta} := \inf_{x = f(\theta)} \|f\|_{\mathcal{F}} \ 。$$

このとき，よく知られている結果は次の一連の事実：

$X_0 \subset X_1$ のとき，$X_{\theta,q}$ は位相空間として，連続的包含関係に関し，θ について単調増加，q についても単調増加、同じく X_θ も，θ について単調増加。

Th. 1（作用素の補間性）

$T \in L(X_i, Y_i)$ $(i = 0, 1)$, $\|T\|_{L(X_i, Y_i)} = M_i$

$\Rightarrow T \in L(X_{\theta,q}, Y_{\theta,q})$, $\|T\|_{L(X_{\theta,q}, Y_{\theta,q})} \leqq C M_0^{1-\theta} M_1^\theta$

又，$T \in L(X_\theta, Y_\theta)$, $\|T\|_{L(X_\theta, Y_\theta)} \leqq C M_0^{1-\theta} M_1^\theta$

（C は正の定数）。

$1 \leqq p_i \leqq \infty$ $(i=0,1)$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ のとき，$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,p} = [L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta = L_p$ が成立する。

Lorentz 空間 $L_{p,q}$ $(0 < p, q \leqq \infty)$ は次のように定義される：

$$m_f(\sigma) := \mu(\{x : |f(x)| > \sigma\}),$$

$$f^*(t) := \inf\{\sigma : m_f(\sigma) \leqq t\},$$

$$L_{p,q} := \{f : \underbrace{\|t^{1/p} f^*(t)\|_{L_*^q}}_{\|f\|_{L_{p,q}} :=} < \infty\}.$$

このとき，

$0 < p_0 < p_1 \leqq \infty$, $0 < q \leqq \infty$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ に対して，$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$ が成立する。

数列 Lorentz 空間 $l_{p,q}$ は次のものとする：

$$l_{p,q} := \left\{ \{x_i\} \in c_0 : \|\{x_i\}\|_{p,q} := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{q/p-1} |x_i|^{*q}\right)^{1/q} < \infty & (q<\infty \text{ のとき}) \\ \sup_i i^{1/p} |x_i|^* < \infty & (q=\infty \text{ のとき}) \end{cases} \right\}$$

ここで $|x_i|^*$ は数列 $\{|x_i|\}$ の減少列への並べ替えの第 i 項。

Th. 1 に対し，コンパクト作用素に対する補間法による保存性については，[11] により，更に拡げた完全な形では [7] により，次の定理が証明された：

Th. 2　$T \in L_c(X_i, Y_i)$（コンパクト作用素全体），

5.1

$i=0,1$, $0<\theta<1$, $1\leq q\leq\infty$ のとき,

$T\in L_C(X_{\theta,q}, Y_{\theta,q})$ 。

そこで

<u>Problem A</u> 作用素の性質(P)が(如何なる性質(P)のとき), 定義域, 値域(が如何なる条件をもてば)の補間空間の間の作用素として, 保たれるか?

: $T\in L_{(P)}(X_i, Y_i)$, $i=0,1 \Rightarrow T\in L_{(P)}(X_{\theta,q}, Y_{\theta,q})$

となる(P)の条件?, X_i, Y_iの条件?

この種の問題は, 結果の非常な有用性が予想されるが, 一般的な形では云えない。古くは, Grothendieck [4]で証明された次の結果が起源となる。有界全可測核 $K(x,y)$ (L_∞ で $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(y)$ で近似される核 $K(x,y)$) による積分作用素 $K: \varphi(x)\longrightarrow \psi(x) := \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy$ は $L_1(0,1)$ (resp. $L_\infty(0,1)$) から $L_1(0,1)$ (resp. $L_\infty(0,1)$) への核型作用素。したがって, この結果を補間空間論的に拡げた, Kは又 $L_p(0,1)$ から $L_p(0,1)$ ($1\leq p\leq\infty$) への核型作用素なることが予想される。しかし Pietsch [22] はこの予想を否定的に証明し, 又 Problem A の種類を含む次の結果を得た:

<u>Th. 3</u> (i) $\forall p,q: 1\leq p<\infty$, $1<q\leq\infty$

$\exists K: L_p(0,1)\to L_q(0,1)$ s.t. 核型でない。

(ii) $\forall p,q,s: 1\leq p<\infty$, $2<q\leq\infty$, $1\leq s<q$

$\exists K \notin \Pi_s(L_p(0,1),\ L_q(0,1))$

(iii) $\forall p, q : 1 \leqq p < \infty,\ 1 \leqq q \leqq 2$

$\forall K$：有界全可測核

$\Rightarrow K \in \Pi_1(L_p(0,1), L_q(0,1))$

(iv) $\forall p, q : 1 \leqq p < \infty,\ 2 \leqq q < \infty$

$\forall K$：有界全可測核

$\Rightarrow K \in \Pi_q(L_p(0,1), L_q(0,1))$

ここに $\Pi_p(E, F)$ は E から F への p-absolutely summing operators 全体（c.f. [13], [21], [23]）。

Problem A の肯定的な結果として，次の Th. 4〜6 が云える：

<u>Th. 4</u> [19]

$T \in \Pi_{p,q}(X_i, Y_i),\ i = 0, 1,$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sigma(t)}{\rho(t)}\right)^r \frac{dt}{t} < \infty \quad \cdots\cdots (1)$$

$\Rightarrow T \in \Pi_{p,q}(X_{(\sigma),\infty},\ Y_{(\rho),r})$。

ここに $\Pi_{p,q}$ は (p,q)-absolutely summing operators 全体，$\sigma(t)$, $\rho(t)$ は $0 < t < \infty$ の正値可測関数で，$X_{(\sigma),r} := \{x \in X_0 + X_1 : \left\| \frac{K(t,x)}{\sigma(t)} \right\|_{L^r_*} < \infty\}$。

しかし，この定理は，先に述べた実用的である補間空間 $(X_0, X_1)_{\theta,q}\ (\equiv (X_0, X_1)_{(t^\theta),q})$ に対しては (1) の条件が満されないので使えない。

Th. 5 [28]． $1 \leqq q \leqq \infty$, $0 < p_i < \infty$ $(i=0,1)$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ $(0<\theta<1)$ のとき，

$$T \in S_{p_i}^{app}(X_i, Y) \Rightarrow T \in S_p^{app}(X_{\theta,q}, Y)。$$

（S_p^{app}（$\equiv \ell^p$: type ℓ^p の作用素全体）の定義については [17]，[24] 参照）。

Th. 6． $1 \leqq p_i \leqq \infty$ $(i=0,1)$, $1 \leqq q \leqq \infty$， $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ $(0<\theta<1)$ のとき

$$T \in \Pi_{p_i,q}(X, Y_i) \Rightarrow T \in \Pi_{p,q}(X, Y_\theta)。$$

又，このとき， $\pi_{p,q}(T) \leqq c\,(\pi_{p_0,q}(T))^{1-\theta}\,(\pi_{p_1,q}(T))^{\theta}$（$c$ は正の定数）が成立する。

（証） $\forall y \in Y_0 \cap Y_1$ に対して

$\|y\|_{Y_\theta} \leqq c\,\|y\|_{Y_0}^{1-\theta}\,\|y\|_{Y_1}^{\theta}$ が成立する、ことはよく知られている（[2]）。

したがって $\{x_i\} \subset X$ に対して

$$\|Tx_i\|_{Y_\theta} \leqq c\,\|Tx_i\|_{Y_0}^{1-\theta}\,\|Tx_i\|_{Y_1}^{\theta}。$$

これから，Hölder の不等式を用い， $T \in \Pi_{p_i,q}(X, Y_i)$ なる条件から，

$$\|\{\|Tx_i\|_{Y_\theta}\}\|_{\ell_p} \leqq c\,\|\{\|Tx_i\|_{Y_0}\}\|_{\ell_{p_0}}^{1-\theta} \cdot \|\{\|Tx_i\|_{Y_1}\}\|_{\ell_{p_1}}^{\theta}$$

$$\leqq c\,(\pi_{p_0,q}(T))^{1-\theta}(\pi_{p_1,q}(T))^{\theta} \sup_{\|x'\|\leqq 1} \|\{\langle x_i, x'\rangle\}\|_{\ell_q}。$$

したがって $\pi_{p,q}(T) \leqq c\,(\pi_{p_0,q}(T))^{1-\theta}(\pi_{p_1,q}(T))^{\theta}$。

以上は，序の［I］の種の結果である。

［II］の方向の結果としては，次の Th. 7〜10 がある：

Th. 7 [19]．(Y_0, Y_1) を interpolation pair，$0<\theta<1$ とすると $L(X, Y_{\theta,\infty}) \hookrightarrow (L(X,Y_0), L(X,Y_1))_{\theta,\infty}$。

そして，$T \in L(X, Y_{\theta,\infty})$ に対し

$$\|T\|_{(L(X,Y_0),\,L(X,Y_1))_{\theta,\infty}} \leqq C\,\|T\|_{L(X,Y_{\theta,\infty})}$$

（C は正の定数）が成立する。

Th. 8 [25]．$1 \leqq p_i \leqq \infty$ $(i=0,1)$，$1 \leqq q \leqq \infty$，$1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$ $(0<\theta<1)$ のとき，

$$[\Pi_{p_0,q}, \Pi_{p_1,q}]_\theta \hookrightarrow \Pi_{p,q}$$ が成立する。

Th. 9 [16]．$1 \leqq p_i \leqq \infty$，$1 \leqq q_i \leqq \infty$ $(i=0,1)$，$1 \leqq q \leqq \infty$，$1 \leqq r \leqq \infty$，$1/p \leqq (1-\theta)/p_0+\theta/p_1$ $(0<\theta<1)$ のとき，$(\Pi_{p_0,q_0;r}, \Pi_{p_1,q_1;r})_{\theta,q} \hookrightarrow \Pi_{p,q;r}$。

（$\Pi_{p,q;r}$（$(p,q;r)$-absolutely summing operator については [4] 参照）。

Th. 10 [25]．H をヒルベルト空間とするとき，

(i) $1/2+1/p \leqq 1/q \Rightarrow \Pi_{p,q}(H,H)=L(H,H)$。

(ii) $1/r=1/2+1/p-1/q>0$，$1 \leqq q \leqq 2$

$$\Rightarrow \Pi_{p,q}(H,H)=[L(H,H), N(H,H)]_{1/r}$$

(iii) $1 \leqq p \leqq \infty$，$2 \leqq q < \infty$，$r=2p/q \Rightarrow$

$$[L(H,H), N(H,H)]_{1/r} \subset \Pi_{p,q}(H,H) \subset [L(H,H), N(H,H)]_{1/p}。$$

ここに $N(E,F)$ は $E\to F$ の核型作用素全体。

[III] の方向の結果の中，核型作用素については次号で述べるが，次の Th. は，作用素類と補間空間の関連の応用例を示唆する。 $\Omega\subset R^n$ のとき Besov 空間とその次元 $d(\cdot)$ は次のように定義される：

$$B^r_{p,q}(\Omega):=(L_p(\Omega),\ W^N_p(\Omega))_{r/N,\,q}\quad (0<r<N,\ 1\leqq p\leqq\infty,\ 1\leqq q\leqq\infty \text{ のとき}),$$

$$B^r_{\infty,q}(\Omega):=(C(\Omega),\ C^N(\Omega))_{r/N,\,q}\quad (0<r<N,\ 1\leqq q\leqq\infty \text{ のとき}),$$

$d(B^r_{p,q}):=r-\frac{n}{p}$ 。 このとき

Th. 11 [27]. $\Omega(\subset R^n)$ が有界，$\partial\Omega\in C^\infty$， S はある条件 (cf. [26] Satz 1) をみたす m-次元多様体 ($1\leqq m\leqq n$) とすると，

(i) $d(B^r_{2,2}(\Omega))>d(B^{r'}_{2,2}(S))$ for $r'\geqq 0$

(ii) 恒等作用素 $I: B^r_{2,2}(\Omega)\longrightarrow B^{r'}_{2,2}(S)$ は，

$0<\beta<\infty$， $\alpha=\dfrac{m}{d(B^r_{2,2}(\Omega))-d(B^{r'}_{2,2}(S))}$ とするとき，

$$I\notin S^{app}_{\alpha,\beta}\quad,\quad I\in S^{app}_{\alpha,\infty}\ 。$$

Sobolev 空間の恒等作用素 $I: W^l_p(\Omega)\longrightarrow L_p(\Omega)$ は核型である ([25]) ことを注意しておく。

補間空間について，次の問題が興味がある： [10] におけ

る $\mathcal{L}_p$-space と同様に（l_p を $l_{p,q}$ におきかえて），$\mathcal{L}_{p,q}$-space を定義するとき，

<u>Problem B.</u> X_i を $\mathcal{L}_{p_i}$-spaces $(i=0,1)$ とすると，$(X_0, X_1)_{\theta,q}$ は $\mathcal{L}_{p,q}$-space になるか？ ただし $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$。

§3. 核型作用素

核型作用素の統一的拡張として Lapresté [9] (or Pietsch [23]) は，次の (p, r, s)-nuclear operator を定義した：

$T \in L(X, Y)$ は，$0 < p, r, s < \infty$，$1/p + 1/r + 1/s \geqq 1$ に対し，

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i' \otimes y_i \quad \text{---- (2)} \quad x_i' \in X',\ y_i \in Y$$

s.t. $\{\lambda_i\} \in l_p$,

$$A := \sup_{\|x\| \leqq 1} \|\{<x, x_i'>\}\|_{l_r} < \infty,$$

$$B := \sup_{\|y'\| \leqq 1} \|\{<y_i, y'>\}\|_{l_s} < \infty,$$

と表わされるとき，(p, r, s)-nuclear といい，この作用素全体を $N_{(p,r,s)}(X, Y)$，

$$\nu_{p,r,s}(T) := \inf_{(2)} \left(\|\{\lambda_i\}\|_{l_p} \cdot A \cdot B \right)$$

と表わす。すると

$N_{(1,\infty,\infty)} = N$ (nuclear operators),

$1 \leqq p \leqq \infty$ のとき $N_{(p,\infty,p')} = N_p$ (p-nuclear operators [20])，$1/p + 1/p' = 1$，

$0<p\leqq 1$ のとき，$N_{(p,\infty,\infty)} = N_p$ (Fredholm p-nuclear operators [5])。

我々は，この p-nuclear operators [20] ($1\leqq p\leqq\infty$ のとき) および p-nuclear operators [5] or [12] ($0<p\leqq 1$ のとき) を，それぞれ拡張して [16], [17] において，(p, q)-nuclear operators ($1\leqq p\leqq\infty$ のとき), (p, q)-nuclear operators ($0<p<1$ のとき) の議論をした。その定義は，統一的に述べれば，

<u>Def. 1</u> $0<p, q, r, s, u, v\leqq\infty$ のとき，$T\in L(X,Y)$ が次の形に表わされれば ((p, q), (r, s), (u, v))-nuclear operator という：

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i' \otimes y_i \ , \quad x_i' \in X', \ y_i \in Y, \cdots\cdots (3)$$

$$\text{s.t.} \quad \{\lambda_i\} \in l_{p,q} \ ,$$

$$A' := \sup_{\|x\|\leq 1} \|\{\langle x, x_i'\rangle\}\|_{l_{r,s}} < \infty \ ,$$

$$B' := \sup_{\|y'\|\leq 1} \|\{\langle y_i, y'\rangle\}\|_{l_{u,v}} < \infty \ 。$$

又，このような作用素全体を $N_{(p,q),(r,s),(u,v)}(X, Y)$ と表わし，$\nu_{(p,q),(r,s),(u,v)}(T) := \inf_{(3)} \|\{\lambda_i\}\|_{l_{p,q}} \cdot A' \cdot B'$ とおく。

すると，$1\leqq p, q\leqq\infty$ のとき [16] の (p, q)-nuclear operator は $N_{(p,q),(\infty,\infty),(p',q')} = N_{p,q}$ ($1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$) となり，

$0<p<1$, $0<q\leq\infty$ のとき [17] の (p,q)-nuclear operator は $N_{(p,q),(\infty,\infty),(\infty,\infty)} = N_{p,q}$ となる。

又，$1\leq q<p\leq\infty$, $1/q - 1/p = 1/s$ のとき

$N_{(\frac{s}{r+1},\, s),(p,p),(q';q')} = \mathfrak{F}_{p,q;r}$ $((l_p, l_q)$-r-factorable operators 全体（[18] 参照））が [18] の結果から云える。

なお，(p,q)-nuclear operators の諸性質を調べるには，$1\leq p\leq\infty$ の場合と，$0<p<1$ の場合とで，（定義は統一的にまとめられても）計算が平行に行かないので，証明は別々の工夫がいる。([16], [17] 参照)。しかし結果は大体同じ様な形で得られ，その一部を次の形で述べておく：

<u>Th. 12</u> [16], [17]. $0<p\leq\infty$, $0<q\leq\infty$ のとき，$N_{p,q}$ は L の quasi-normed ideal となる。

<u>Th. 13</u> [16], [17]. $0<p, q\leq\infty$ のとき，$T\in N_{p,q}$ なるための必要十分条件は $T\in L(X,Y)$ が次の形に分解可能なことである：　　$T = QDP$

s.t. $P\in L(X, l_\infty)$, $Q\in L(l_{p,q}, Y)$, $D\in L(l_\infty, l_{p,q})$ で，D はある $\{\lambda_i\}\in l_{p,q}$ による diagonal operator 。

Pietsch は [24] で，ヒルベルト空間上の作用素 T の $|T| = (T^*T)^{1/2}$ の固有値の一般化である（Banach 空間上の）作用素の種々の (singular numbers) s-numbers を組織的に論じ

た。s-numbers を利用した作用素数の中，

$S^{app}_{p,q}(X,Y):=\{T\in L(X,Y):\{a_n(T)\}\in \ell_{p,q}\}$，

（$a_n(T)$ は T の n 次 approximation number）

$S^{gel}_{p,q}(X,Y):=\{T\in L(X,Y):\{b_n(T)\}\in \ell_{p,q}\}$，

（$b_n(T)$ は T の n 次 gelfand number）

$\alpha_{p,q}(T):=\|\{a_n(T)\}\|_{\ell_{p,q}}$，

$\beta_{p,q}(T):=\|\{b_n(T)\}\|_{\ell_{p,q}}$

に関し，Ha [6] の結果の拡張として，次の Th. を得る：

<u>Th. 14</u> [17]． $0<p<1$，$p\leq q\leq\infty$ のとき

$$\begin{array}{ccc} N_{p,q}(X,Y) & \subset & N^{Q}_{p,q}(X,Y) \\ \cup & & \cup \\ S^{app}_{p,q}(X,Y) & \subset & S^{gel}_{p,q}(X,Y) \end{array}$$

なる関係が成立し，又

$$\nu_{p,q}(T)\leqq 2^{1/p-1/q+2}\alpha_{p,q}(T) \qquad \text{for } \forall T\in S^{app}_{p,q},$$

$$\nu^{Q}_{p,q}(T)\leqq 2^{1/p-1/q+2}\beta_{p,q}(T) \qquad \text{for } \forall T\in S^{gel}_{p,q}.$$

ここに $N^{Q}_{p,q}$ は quasi-(p,q)-nuclear operators 全体で，その定義およびそこでの quasi-norm $\nu^{Q}_{p,q}(T)$ に関しては，[16]，[17] 参照。

（注）$\ell_{p,q}\ni\{s_n\}$ の quasi-norm を取扱うときは，s_n の代りに $s_n'=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k$，$\{s_n'\}\in\ell_{p,q}$ の形で取扱った方が quasi-norm の代りに norm として扱えるので便利。ただし

計算がややこしくなる。

§4. l_pー空間の間の恒等作用素

この節では，l_pー空間の間の恒等作用素が p の値によっていかなる総和作用素となるか，を論究した Bennett の次の結果（[1]）の証明を補間空間論的に見通しよくする。

<u>Th. 15</u> [1], [3]． $1 \leqq p \leqq q \leqq 2$ のとき，恒等作用素 $I: l_p \longrightarrow l_q$ は $I \in \Pi_{\frac{2pq}{pq-2p+2q},1}$ となる。

[1]，[3] の証明は Hölder の不等式を何回も用いて，定義から忠実に，又数列を組み替え matrix の補題を用意して証明してある。ここでは，この証明を，大筋では同じであるが、Th. 6 を用いて整理する。

先ず，古典的な

$$\text{(Orlicz)} \quad I_{l_1 \to l_1} \in \Pi_{2,1}$$
$$\text{又}\ 1 \leq p \leq 2\ \text{のとき}\ I_{l_p \to l_p} \in \Pi_{p,1} \qquad \text{---(4)}$$

$$\text{(Grothendieck)} \quad I_{l_1 \to l_2} \in \Pi_{1,1} \qquad \text{---(5)}$$

はよく知られている。

従って，Th. 6 から，$X = l_1$，$Y_0 = l_1$，$Y_1 = l_2$，$1 \leq p \leq 2$，$\theta = 2 - \frac{2}{p}$ として，

<u>Cor. 1</u> $1 \leqq p \leqq 2$，$r = \frac{2p}{3p-2}$ のとき，

$$I_{l_1 \to l_p} \in \Pi_{r,1} \quad 。$$

これは Kwapień [8] の <u>Th.</u> $1 \le p \le \infty$ のとき、$1/r = 1 - |1/p - 1/2|$ とおくと $L(\ell_1, \ell_p) = \Pi_{r,1}(\ell_1, \ell_p)$。から出る結果でもある。

Th. 6 に対し、定義域の補間に関する定理：

<u>Problem C</u>. $T \in \Pi_{p_i, q}(X_i, Y)$ $(i = 0, 1)$, X_i に適当な条件を付けて $\Rightarrow$ $T \in \Pi_{p,q}(X_{\theta,q}, Y)$？

が解決すれば、Th. 15 の証明は一ぺんに片付くが、このProb. C は未解決。したがって、この部分に当る所は今の所、Bennett の結果 [1]: $I_{\ell_p \to \ell_2} \in \Pi_{p,1}$ ---- (6)

（これは (5) $I_{\ell_1 \to \ell_2} \in \Pi_{1,1} \subset \Pi_{p,p}$ から導く）を利用する。すると、(4), (6) から再び Th. 6 を用いて、

$$I_{\ell_p \to \ell_q} \in \Pi_{\frac{2pq}{pq - 2p + 2q},\, 1}$$

が云える。

参考文献

[1] G. Bennett, Inclusion mappings between l^p - spaces, J. Funct. Anal. 13 (1973), 20 - 27

[2] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces, Springer, 1976

[3] B. Carl, Absolut - (p, 1) - summierende identische Operatoren von l_u in l_v , Math. Nachr. 63 (1974), 353 - 360

[4] A. Grothendieck, La théorie de Fredholm, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 319 - 384

[5] ——————————, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955

[6] C. W. Ha, Approximation numbers of linear operators and nuclear spaces, J. Math. Analysis Appl. 46 (1974), 292 - 311

[7] K. Hayakawa, Interpolation by the real method preserves compactness of operators, J. Math. Soc. Japan 21 (1969), 189 - 199

[8] S. Kwapień, Some remarks on (p, q) - absolutely summing operators in l_p - spaces, Studia Math. 29 (1968), 327 - 337

[9] J. T. Lapresté, Sur une generalisation de la notion d'operateurs nucléaires et sommants dans les espaces de Banach, C. R. Acad. Sci. 275 (1972), 45 - 48

[10] J. Lindenstraus and A. Pełczynski, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ - spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968), 275 - 326

[11] J. L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci Publ. Math., 19 (1964), 5 - 68

[12] A. S. Markus, Some criteria for the completeness of a system of root vectors of linear operator in a Banach space, Amer. Math. Soc. Transl. 85 (1969), 59 - 91

[13] K. Miyazaki, p - absolutely summing operators の補間法による一般化, 数理解析研講究録 136 (1972), 91 - 110

[14] ——————, (p, q; r) - absolutely summing operators, J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 341 - 354

[15] ——————, On a theorem of interpolation for Banach spaces of (p, q; r) - absolutely summing operators, Bull. Kyushu Inst. Tech. 20 (1973), 21 - 23

[16] ——————— , (p, q) - nuclear and (p, q) - integral operators, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 99 - 132

[17] ——————— , (p, q) - nuclear operators in case of $0 < p < 1$, ibid 6 (1976), 555 - 572

[18] ————— and M. Kato, Factorable operators through a diagonal operator between l_p - spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. 24 (1977), 49 - 57

[19] J. Peetre, Zur Interpolation von Operatorenräumen Arch. Math. 21 (1970), 601 - 608

[20] A. Persson and A. Pietsch, p - nukleare und p - integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math. 33 (1969), 19 - 62

[21] A. Pietsch, Nuclear locally convex spaces, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972

[22] —————— , Gegenbeispiele zur Interpolationstheorie der nuklearen und absolutsummierenden Operatoren, Arch. Math. 20 (1969), 65 - 71

[23] —————— , Theorie der Operatorenideale, Wiss. Beitrage Fried. - Schiller Univ., 1972

[24] —————— , S - Numbers of Operators in Banach spaces, Studia Math. 51 (1974), 201 - 223

[25] A. Pietsch and H. Triebel, Interpolationstheorie für Banach-ideale von beschränkten linearen Operatoren, Studia Math. 31 (1968), 95 - 109

[26] H. Triebel, Über die Verteilung der Approximations - zahlen kompakter Operatoren in Sobolev Besov Räumen, Inventiones Math. 4 (1967), 275 - 293

[27] ――――――――, Über die Approximationszahlen der Einbettungsoperatoren $J\ (B^r_{p,q}(\Omega) \longrightarrow B^r_{p,q}(S))$, Arch. Math. 19 (1968), 305 - 312

[28] ――――――――, Interpolationseigenschaften von Entropie- und Durchmesseridealen kompakter Operatoren, Studia Math. 34 (1970), 89 - 107