数理解析研究所講究録
第 307 巻 1977 年 29-45

Modified wave operator の completeness

京大理　池部晃生
磯崎洋

§1. 序.

$L_2(R^n)$ において Schrödinger 作用素 $H_0=-\Delta$, $H(V)=-\Delta+V(x)$ を考える。$V(x)$ は実数値 C^∞- 函数で $D^\alpha V(x)=O(|x|^{-|\alpha|-\delta_0})$ $(0<\delta_0<1,\ |x|\to\infty)$ をみたすものとする。非線型方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}X(\xi,t:V)=V(2\xi t+\nabla_\xi X(\xi,t:V))$$

の解 $X(\xi,t:V)$ を用いれば time-dependent modified wave operator

$$W(V)=\underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}\ e^{itH(V)}e^{-itH_0-iX(p,t:V)} \qquad *)$$

が存在し，かつ $W(V)$ の値域，$\mathrm{Ran}(W(V))$，が $\mathcal{H}_{ac}(H(V))=H(V)$ の絶対連続部分空間に含まれることが知られている。Wave

*) $X(\xi,t:V)$ の詳しい特徴づけや作用素 $X(p,t:V)$ については §2を参照。

operator $W(V)$ は $\mathrm{Ran}(W(V)) = \mathcal{H}_{ac}(H(V))$ をみたすとき "complete" であると呼ばれる。本稿では

<u>定理 1.1</u>　$W(V)$ は complete である。

の証明について解説する。証明の方針は $\mathrm{Ran}(\Omega(V)) = \mathcal{H}_{ac}(H(V))$ をみたす "stationary" wave operator $\Omega(V)$ を導入し $\Omega(V) = W(V)$ を示すことにある。しかし、これを直接的に実行することはあまり易しそうには思われない。そこで potential V を compact support の potential で近似し、short-range potential に対する wave operator に関する結果に帰着させることによってこれを証明しよう。

§2. Time-dependent modified wave operators

$0 < \delta < \delta_0$ なる定数 δ をえらび以下固定しよう。最初に函数空間 $\mathbb{V}$ を次のように定義する。

<u>定義 2.1.</u>　$\mathbb{V} = \mathbb{V}_\delta \ni f(x) \Longleftrightarrow$ (1) $f(x)$ は実数値 C^∞-函数。

(2) $\|f\|_{\mathbb{V},N} \equiv \max\limits_{|\alpha| \le N} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{|\alpha|+\delta} |D^\alpha f(x)| < \infty$, $N = 0, 1, 2, \cdots$

容易に判るように $\mathbb{V}$ は real Fréchet 空間である。以下

potential V は $\mathbb{V}$ に属するものとする。

補題 2.2. $\mathbb{V} \ni V$ に対して次の性質をもつ函数 $X(\xi, t : V)$ が存在する。

(1) $X(\xi, t : V)$ は実数値 $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\} \times \mathbb{R}_+)$-函数 $(\mathbb{R}_+ = (0, \infty))$。

(2) $\mathbb{R}^n - \{0\}$ に含まれる任意の compact set K と $\mathbb{V}$ の任意の有界集合 B に対して

$$| D_\xi^\alpha D_t^m X(\xi, t : V) | \leq C(1+t)^{1-m-\delta} \quad (|\alpha| \geq 0,\ m \geq 0),$$

$$| D_\xi^\alpha [\tfrac{\partial}{\partial t} X(\xi, t : V) - V(2\xi t + \nabla_\xi X(\xi, t : V))] | \leq C(1+t)^{-2}$$

$(|\alpha| = 0, 1)$,

という評価が成りたつ。ここで C は $\xi \in K$, $V \in B$ と $t > 0$ によらぬ定数である。

(3) $V_n \to V$ in $\mathbb{V}$ なら各点収束の意味で

$$D_\xi^\alpha D_t^m (X(\xi, t : V_n) - X(\xi, t : V)) \to 0 \quad (|\alpha| \geq 0,\ m \geq 0)。$$

このような $X(\xi, t : V)$ を作る一つの方法は Hörmander [3] によるもので

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (H = H(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x))$$

という常微分方程式を適当な初期条件の下で解き，いわゆる Hamilton-Jacobi の理論を用いればよい。もう一つの方法は

逐次近似によるもので

$$X^{(0)}(\xi, t : V) = 0$$

$$X^{(j)}(\xi, t : V) = \int_0^t V(2\xi s + \nabla_\xi X^{(j-1)}(\xi, s : V))\,ds + \Phi_j(\xi : V)$$

ただし

$$\Phi_j(\xi : V) = \begin{cases} 0 & (j\delta < 1) \\ \Phi_{j-1}(\xi : V) - \int_0^\infty A_{j-1}(\xi, t : V)\,dt & (j\delta > 1) \end{cases}$$

$$A_j(\xi, t : V) = V(2\xi t + \nabla_\xi X^{(j)}(\xi, t : V)) - V(2\xi t + \nabla_\xi X^{(j-1)}(\xi, t : V))$$

という scheme に従って $X^{(j)}(\xi, t : V)$ を作り $(j+1)\delta \geqq 2$ となるような j を選んで $X(\xi, t : V) = X^{(j)}(\xi, t : V)$ と定義すればよい。補題2.2の性質をもつような $X(\xi, t : V)$ を time-dependent modifier と呼ぶことにしよう。

作用素 $e^{-iX(p, t : V)}$ を $e^{-iX(p, t : V)}u = \mathcal{F}^{-1}[e^{-iX(\xi, t : V)}\hat{u}(\xi)]$（$\mathcal{F}$, ^ は通常のFourier変換を意味する）によって定義すれば次の定理を得る。

定理2.3（[1], [2], [3]）強極限 $\underset{t \to \infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH(V)} e^{-itH_0 - iX(p, t : V)} \equiv W(V)$ が存在し $\mathrm{Ran}(W(V)) \subset \mathcal{H}_{ac}(H(V))$ となる。

序文にも述べたように $\mathrm{Ran}(W(V)) = \mathcal{H}_{ac}(H(V))$ となることを証明するのが本稿の目的である。

<u>定理 2.4.</u> $V_m \to V$ in $\boldsymbol{V}$ なら $W(V_m)$ は $W(V)$ に強収束する。

定理 2.4 の証明には次の２つの事実を用いればよい。

事実 1. $W(t:V) = e^{itH(V)} e^{-itH_0 - iX(p,t:V)}$ とおく。任意の $\varepsilon > 0$, $u \in \mathcal{F}^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\}))$, $\boldsymbol{V}$ の有界集合 B に対して定数 $T = T(\varepsilon, u, B)$ が存在して $t > T$ のとき $\|W(V)u - W(t:V)u\| < \varepsilon$ となる。

事実 2. t を固定するとき $W(t:V_m) \to W(t:V)$ （$L_2(\mathbb{R}^n)$ 上強収束）。

§3. Time-dependent modifier と stationary modifier

$W(\xi, t:V) = t|\xi|^2 + X(\xi, t:V)$ とおこう。補題 2.2 によって

$$(3.1) \qquad \left| \frac{\partial W}{\partial t}(\xi, t:V) - |\xi|^2 - V\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right) \right| \le C(1+t)^{-2}$$

が成立している。変数変換 $(\xi, t) \to (x, \lambda)$ を $x = \frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\lambda = \frac{\partial W}{\partial t}$ という式に従って行う。

<u>補題3.1.</u> $C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)$-函数 $\xi(x,\lambda:V)$, $t(x,\lambda:V)$ が存在して次の性質をみたす。

(1) $\mathbb{R}_+$ の任意の compact set Λ に対して定数 $R=R(\Lambda)$ が存在して $|x|\geq R$, $\lambda\in\Lambda$ なるとき

$$x=\frac{\partial W}{\partial\xi}(\xi(x,\lambda:V),\ t(x,\lambda:V):V)$$

$$\lambda=\frac{\partial W}{\partial t}(\xi(x,\lambda:V),\ t(x,\lambda:V):V)$$

が成りたつ。

(2) $|x|\geq 1$ のとき

$$|D_x^\alpha D_\lambda^m(\xi(x,\lambda:V)-\sqrt{\lambda}\,\omega)|\leq C(1+|x|)^{-|\alpha|-\delta}$$

$$|D_x^\alpha D_\lambda^m(t(x,\lambda:V)-r/2\sqrt{\lambda})|\leq C(1+|x|)^{1-|\alpha|-\delta}$$

という評価をもつ（$r=|x|$, $\omega=x/r$）。ただし (1), (2) において定数 R や C は V が $\mathcal{V}$ の有界集合を動くとき一定にとれる。

(3) $V_n\to V$ in $\mathcal{V}$ なら各点収束の意味で

$$D_x^\alpha D_\lambda^m(\xi(x,\lambda:V_n)-\xi(x,\lambda:V))\to 0$$

$$D_x^\alpha D_\lambda^m(t(x,\lambda:V_n)-t(x,\lambda:V))\to 0\,。$$

証明は補題2.2の評価を考慮して通常の逆函数定理の証明を適用すれば原理的には難かしくはない。

$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots \to \mathbb{R}_+$ となる compact set の列 $\{\Lambda_j\}$ を選ぼう。補題3.1の評価によれば定数 $R_1 < R_2 < \cdots$ が存在して $(x,\lambda) \in \{|x| \geq R_j\} \times \Lambda_j$ のとき $\xi(x,\lambda:V) \neq 0$, $t(x,\lambda:V) > 0$ となる。$A = \bigcup_j \{|x| \geq R_j\} \times \Lambda_j$ とし $\tilde{A}$ を A の小さい近傍として $\tilde{A}$ 上でも $\xi(x,\lambda:V) \neq 0$, $t(x,\lambda:V) > 0$ となるようにする。C^∞-函数 $\varphi(x,\lambda)$ を $\varphi(x,\lambda) = 1$ on A $\varphi(x,\lambda) = 0$ outside $\tilde{A}$ となるように選んで

<u>定義3.2.</u> $K(x,\lambda:V)$ を $K(x,\lambda:V) = \varphi(x,\lambda)\left[W(\xi(x,\lambda:V), t(x,\lambda:V):V) - x\xi(x,\lambda:V) - \lambda t(x,\lambda:V)\right]$ によって定義する。

<u>補題3.3.</u> $\left| |\nabla_x K(x,\lambda:V)|^2 - \lambda + V(x) \right| \leq C(1+|x|)^{-2}$

証明は $|x|$ が大なるとき $\frac{\partial}{\partial x_j} K(x,\lambda:V) = -\xi_j(x,\lambda:V)$ となることと (3.1) を考慮すれば容易である。

<u>定義3.4.</u> $Y(x,\lambda:V) \equiv \varphi(x)\left(\sqrt{\lambda}\, r + K(x,\lambda:V)\right)$ $(r = |x|)$。ただし $\varphi(x)$ は C^∞-函数で $\varphi(x) = 0$ $(|x| \leq 1)$ $\varphi(x) = 1$ $(|x| \geq 2)$ をみたすものである。

今までの議論より $Y(x,\lambda:V)$ は次の性質をもつことがわか

る。

補題3.5. (1) $Y(x,\lambda:V)$ は実数値 $C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)$-函数。

(2) $|D_x^\alpha D_\lambda^m Y(x,\lambda:V)| \le C(1+|x|)^{1-|\alpha|-\delta}$,

$|2\sqrt{\lambda}\frac{\partial Y}{\partial r} - |\nabla_x Y|^2 - V(x)| \le C(1+|x|)^{-2}$,

ただし定数 C は λ が $\mathbb{R}_+$ の compact set, V が $\mathbb{V}$ の有界集合にある限り λ や V にはよらない。

(3) $V_n \to V$ in $\mathbb{V}$ なら各点収束の意味で

$D_x^\alpha D_\lambda^m (Y(x,\lambda:V_n) - Y(x,\lambda:V)) \to 0$ 。

上の $Y(x,\lambda:V)$ を stationary modifier と呼ぶことにしよう。

注意3.6. $W(\xi,t:V)$ が (3.1) という評価をみたしているということは W が方程式

(3.2) $$\frac{\partial W}{\partial t} = |\xi|^2 + V(x)$$

の近似解であることを意味する。($V(x)\equiv 0$ のときは $W(\xi,t) = t|\xi|^2$ が (3.2) の解である。) 方程式 (3.2) は古典力学における Hamilton-Jacobi の方程式である。我々は補題3.2 で $x = \frac{\partial W}{\partial \xi}$ $\lambda = \frac{\partial W}{\partial t}$ から ξ と t を x と λ の函数として表わしたが、これはいいかえれば ξ や t のかわりに $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ $\frac{\partial W}{\partial t}$ を新たな変数として

採用しそれをxやλとおいたということである。このような手続きは古典力学に現れる Legendre 変換に類似している。更に補題3.3で $K(x,\lambda;V)=W(\xi,t;V)-x\xi-\lambda t$ は

$$(3.3)\qquad |\nabla_x K|^2=\lambda-V(x)$$

の近似解であることを示したが(3.3)は(Hamilton-Jacobiの方程式の一種であるが)幾何光学における eikonal 方程式に類似している。($V(x)\equiv 0$ のときは $K(x,\lambda)=-\sqrt{\lambda}r$ が(3.3)の解である。)従って我々は Hamilton-Jacobi の解に Legendre 変換をほどこして eikonal の解を得たといえよう。これが上に述べた手続きの重要な step なのである。

§4. 固有函数展開と stationary wave operators

<u>定義4.1.</u> $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\lambda>0$, $\omega\in S^{n-1}$($\mathbb{R}^n$の単位球面)とする。作用素 $\mathcal{F}_0(\lambda)$を

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)f)(\omega)=2^{-1/2}\lambda^{(n-2)/4}(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\sqrt{\lambda}\omega\cdot x}f(x)\,dx$$

によって定義する。

函数空間 $L_{2,\beta}=\{f:\|f\|_\beta^2=\int(1+|x|)^{2\beta}|f(x)|^2dx<\infty\}$ を導入しよう。不等式 $\|\mathcal{F}_0(\lambda)f\|_{L_2(S^{n-1})}\le C\|f\|_{(1+\varepsilon_0)/2}$ が成立し

$\mathcal{F}_0(\lambda)$は $B(L_{2,(1+\varepsilon_0)/2}; L_2(S^{n-1}))$ *) の元に一意的に拡張されることがわかる。(ε_0 は $0<\varepsilon_0\leq\delta/2$ をみたす定数である。) 拡張したものを同じく $\mathcal{F}_0(\lambda)$で表わす。 $(0,\infty)$ で定義され $L_2(S^{n-1})$ に値をとる(直線上の Lebesgue 測度に関する) L_2 函数全体を $\hat{\mathcal{H}}$で表わそう。$\hat{\mathcal{H}}$ の内積, norm は $(\ ,\ )_{\hat{\mathcal{H}}}$ $\|\ \|_{\hat{\mathcal{H}}}$ で表わすことにする。 $f\in L_{2,(1+\varepsilon_0)/2}$ に対して作用素 $\mathcal{F}_0$ を $(\mathcal{F}_0 f)(\lambda)=\mathcal{F}_0(\lambda)f$ で定義する。$\mathcal{F}_0$が本質的には通常の Fourier 変換であることより 次の定理は容易に示される。

<u>定理4.2.</u> (1) $\mathcal{F}_0$は $\mathcal{H}=L_2(R^n)$ から $\hat{\mathcal{H}}$ への unitary 作用素に一意的に拡張される。

(2) $\mathcal{H}\ni{}^{\forall}f$ に対して 次の反転公式が成りたつ。

$$f=\underset{N\to\infty}{\text{s-lim}}\int_{1/N}^{N}\mathcal{F}_0(\lambda)^*(\mathcal{F}_0 f)(\lambda)d\lambda。$$

H(V) に対して類似の結果を導く為に次の作用素を導入する。

<u>定義4.3.</u> $R(z:V)=(H(V)-z)^{-1}$ とし $U(z:V)$ は函数 $e^{iY(x,(R\xi)^2:V}$

*) $B(\mathcal{H}_1:\mathcal{H}_2)$ は Banach 空間 $\mathcal{H}_1$ から Banach 空間 $\mathcal{H}_2$ への有界作用素全体を表わす。

を乗ずる掛算作用素とする。$G(z:V)$ を $G(z:V)=(H_0-z)U(z:V)R(z:V)$ で定義する。

次の補題は Isozaki [6] で証明された。

補題 4.4. $\lambda>0$ のとき強極限 $\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\text{s-lim}}\, G(\lambda+i\varepsilon:V)\equiv G(\lambda+i0:V)\in B(L_{2,(3-\varepsilon_0)/2}:L_{2,(1+\varepsilon_0)/2})$ が存在する。

定義 4.5. $\mathcal{F}(\lambda:V)\in B(L_{2,(3-\varepsilon_0)/2}:L_2(S^{n-1}))$ を $\mathcal{F}(\lambda:V)=\mathcal{F}_0(\lambda)G(\lambda+i0:V)$ によって定義する。

$f\in L_{2,(3-\varepsilon_0)/2}$ に対して $(\mathcal{F}(V)f)(\lambda)=\mathcal{F}(\lambda:V)f$ によって $\mathcal{F}(V)$ を定義すれば次の定理を得る。

定理 4.6. (1) $\mathcal{F}(V)$ は $\mathcal{H}_{ac}(H(V))$ を initial set, $\hat{\mathcal{H}}$ を final set とする $\mathcal{H}$ 上の partial isometry に一意的に拡張される。
(2) $\mathcal{H}_{ac}(H(V))\ni{}^{\forall}f$ に対して反転公式

$$f=\underset{N\to\infty}{\text{s-lim}}\int_{1/N}^{N}\mathcal{F}(\lambda:V)^*(\mathcal{F}(V)f)(\lambda)\,d\lambda$$

が成立する。
(3) $\mathcal{F}(\lambda:V)^*\in B(L_2(S^{n-1}):L_{2,-(3-\varepsilon_0)/2})$ は次の意味で"固有

作用素”である。即ち $L_2(S^{n-1}) \ni {}^\forall\varphi$ に対して *distribution* の意味で $(-\Delta+V)\mathcal{F}(\lambda:V)^*\varphi = \lambda\mathcal{F}(\lambda:V)^*\varphi$ が成りたつ。

Long-range potential をもつ Schrödinger 作用素の固有函数展開を扱ったものには Ikebe [4], Saito [8] がある。[4], [8] では $\mathcal{F}(\lambda,r:V)f = C(\lambda)r^{(n-1)/2}e^{-i\sqrt{\lambda}r+iY(r,\lambda:V)}(R(\lambda+i0:V)f)(r\cdot)$ $(C(\lambda)=e^{(n-3)\pi i/4}\pi^{-1/2}\lambda^{1/4})$ によって $\mathcal{F}(\lambda,r:V)$ を定義し，強極限 $\underset{r\to\infty}{\text{s-lim}}\,\mathcal{F}(\lambda,r:V)f$ によって固有作用素（の共役作用素）を定義している。本稿で与えた固有作用素の導き方は [4], [8] とは見かけ上異なるが実は同じものであることがわかる。それは次の補題によって保証される。

<u>補題4.7.</u>　$f \in L_{2,(3-\varepsilon_0)/2}$ に対して

(1)
$$r_m^{-\varepsilon_0}\int_{|x|=r_m}|R_0(\lambda+i0)G(\lambda+i0:V)f|^2\,dS \to 0$$

$$r_m^{\varepsilon_0}\int_{|x|=r_m}|\mathcal{D}(\lambda+i0)R_0(\lambda+i0)G(\lambda+i0:V)f|^2\,dS \to 0$$

$$\left(R_0(z)=(H_0-z)^{-1},\ \mathcal{D}(z)=\mathrm{grad}+\frac{n-1}{2r}\tilde{x}-i\sqrt{z}\,\tilde{x},\ r=|x|,\ \tilde{x}=x/r\right)$$

をみたす点列 $\{r_m\}_{m=1,2,\cdots}$ $(r_m\to\infty,\ m\to\infty)$ が存在する。

(2)　(1)の性質をもつ任意の点列 $\{r_m\}$ に対して $\mathcal{F}(\lambda,r_m:V)f$ は $\mathcal{F}(\lambda:V)f$ に $L_2(S^{n-1})$ 上弱収束する。

$\Omega(V)=\mathcal{F}(V)^*\mathcal{F}_0$ によって stationary wave operator $\Omega(V)$ を定義しよう。次の定理はあきらかである。

<u>定理 4.8.</u> $\mathrm{Ran}\,(\Omega(V))=\mathcal{H}_{ac}(H(V))$。

<u>定理 4.9.</u> $V_m\to V$ in $\mathbb{V}$ のとき $\Omega(V_m)$ は $\Omega(V)$ に $\mathcal{H}$ 上強収束する。

定理 4.9 は $f\in L_{2,(3-\varepsilon_0)/2}$, $g\in\mathcal{F}^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n-\{0\}))$ のとき

$$(\Omega(V)g,f)=\int_0^\infty(\mathcal{F}_0(\lambda)g,\ \mathcal{F}_0(\lambda)G(\lambda+i0:V)f)_{L_2(S^{n-1})}d\lambda$$

となることと，次の事実

$$\begin{cases}V_m\to V \text{ in } \mathbb{V} \text{ なら } L_{2,(3-\varepsilon_0)/2}\ni{}^\forall f,\ {}^\forall\lambda>0 \text{ に対して}\\ G(\lambda+i0:V_m)f\to G(\lambda+i0:V)f \quad (L_{2,(1+\varepsilon_0)/2} \text{ 上強収束})\end{cases}$$

を用いて証明される。

§5. supp V が compact であるときの諸事実

potential V が compact support のとき time-dependent wave operator は modifier $X(\xi,t:V)$ を 0 としても存在する。

定理 5.1　$\exists\, \underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{itH(V)} e^{-itH_0} \equiv W^{(s)}(V)$。

V が compact support である場合には $Y(x,\eta:V)\equiv 0$ として補題 3.5 が成立している。そのことから §4 で与えた所論は $Y(x,\eta:V)\equiv 0$ として成立することがわかる。§4 で $Y\equiv 0$ としたときの $\mathcal{F}(\eta:V)$ $\mathcal{F}(V)$ $\Omega(V)$ を $\mathcal{F}^{(s)}(\eta:V)$, $\mathcal{F}^{(s)}(V)$, $\Omega^{(s)}(V)$ と表わすことにしよう。次の定理はよく知られたことである。

定理 5.2.　$W^{(s)}(V)=\Omega^{(s)}(V)$。

補題 5.3.　(1) $\xi\neq 0$ のとき $\exists \lim_{t\to\infty} X(\xi,t:V)\equiv X_\infty(\xi:V)$。

(2)　$\exists \lim_{r\to\infty} Y(r\omega,\eta:V)\equiv Y_\infty(\omega,\eta:V)$。

(3)　$Y_\infty(\omega,\eta:V)=X_\infty(\sqrt{\eta}\,\omega:V)$。

(1) は $\frac{\partial X}{\partial t}(\xi,t:V)=V(2\xi t+\nabla_\xi X(\xi,t:V))+O(t^{-2})$ となることから了解される。(2), (3) は $Y(x,\eta:V)$ は §3 において $X(\xi,t:V)$ を用いて構成されたものであることを想い起こして途中の手続きを調べ直していくことによってわかる。

補題 5.4.　$\mathcal{F}(\eta:V)=e^{iY_\infty(\cdot,\eta:V)}\mathcal{F}^{(s)}(\eta:V)$。

補題5.4は補題4.7より「共通な」点列 $\{r_m\}$ が存在して

$$\mathcal{F}(\lambda:V)f = \underset{m\to\infty}{w\text{-}\lim}\, C(\lambda) r_m^{(n-1)/2} e^{-i\sqrt{\lambda} r_m + iY(r_m\cdot,\lambda:V)} (R(\lambda+i0:V)f)(r_m\cdot)$$

$$\mathcal{F}^{(S)}(\lambda:V)f = \underset{m\to\infty}{w\text{-}\lim}\, C(\lambda) r_m^{(n-1)/2} e^{-i\sqrt{\lambda} r_m} (R(\lambda+i0:V)f)(r_m\cdot)$$

となることと補題5.3を考慮すればわかる。

<u>定理5.5.</u> V が compact support なら $W(V)=\Omega(V)$。

証明） $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g\in L_{2,(3-\varepsilon_0)/2}$ としよう。補題5.1と補題5.3より

$$\begin{aligned}(W(V)f, g) &= \lim_{t\to\infty} (e^{itH(V)} e^{-itH_0 - iX(p,t:V)} f, g) \\ &= (W^{(S)}(V) e^{-iX_\infty(p:V)} f, g)\end{aligned}$$

定理5.2より

$$\begin{aligned}(W(V)f, g) &= (\Omega^{(S)}(V) e^{-iX_\infty(p:V)} f, g) \\ &= \int_0^\infty (\mathcal{F}_0(\lambda) e^{-iX_\infty(p:V)} f, \mathcal{F}^{(S)}(\lambda:V) g)_{L_2(S^{n-1})} d\lambda\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_0(\lambda)$ の定義と補題5.3より右辺は次のように書き直される。

$$\int_0^\infty (e^{-iX_\infty(\sqrt{\lambda}\cdot:V)} \mathcal{F}_0(\lambda) f, \mathcal{F}^{(S)}(\lambda:V) g)_{L_2(S^{n-1})} d\lambda$$

11

$$= \int_0^\infty \left(\mathcal{F}_0(\lambda) f, \; e^{iY_\infty(\cdot,\lambda:V)} \mathcal{F}^{(s)}(\lambda:V) g \right)_{L_2(S^{n-1})} d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \left(\mathcal{F}_0(\lambda) f, \; \mathcal{F}(\lambda:V) g \right)_{L_2(S^{n-1})} d\lambda \qquad \text{（補題5.4より）}$$

ところがこれは $(\Omega(V)f, g)$ に等しいから f, g が $L_2(\mathbb{R}^n)$ で dense なことより $W(V) = \Omega(V)$ が結論される。■

§6. 定理1.1の証明

実数値 C^∞-函数 $\varphi(x)$ を $\varphi(x) = 1$ $(|x| < 1)$, $\varphi(x) = 0$ $(|x| \geq 2)$ となるようにとる。$V_m(x) = \varphi(\frac{x}{m}) V(x)$ と定義すれば $V_m \to V$ in $\mathbb{V} = \mathbb{V}_\delta$ である。定理5.5より $W(V_m) = \Omega(V_m)$ であるが定理2.4と定理4.9を考慮して $m \to \infty$ とすれば $W(V) = \Omega(V)$ となる。定理4.8を見れば定理1.1が結論される。■

以上，証明の outline を述べたが詳細については [5] を参照していただきたい。又，北田氏の仕事 [7] は，やはり同じ問題を取り扱っているが証明の技法はここで述べたものと異なるので参照していただきたい。

文献

[1] Alsholm, P., Wave operators for long-range scattering, Thesis, U.C. Berkeley (1972)

[2] Buslaev, V. S. and Matveev, V. B., Wave operators for the Schrödinger equations with a slowly decreasing potential, Theo. Math. Phys. 2 (1970)

[3] Hörmander, L., The existence of wave operators in scattering theory, Math. Z., 146 (1976)

[4] Ikebe, T., Spectral representations for Schrödinger operators with long-range potentials, J. Functional Anal, 20 (1975)

[5] Ikebe, T., and Isozaki, H., Completeness of modified wave operators for long-range potentials, (to appear)

[6] Isozaki, H., On the long-range stationary wave operator, (to appear)

[7] Kitada, H., Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials, I. II, (to appear)

[8] Saitō, Y., Eigenfunction expansions for the Schrödinger operators with long-range potentials $Q(y) = O(|y|^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, (to appear)