数理解析研究所講究録
第 307 巻 1977 年 46-59

振動型積分変換の L^2 有界性とその応用.

東大 理. 浅田健嗣
藤原大輔

§1. 序

$\nu \geq 1$ をパラメターとする, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に働く積分変換で

$$(1) \quad A(\nu)f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} a(x,\theta,y)\, e^{i\nu\phi(x,\theta,y)} f(y)\,dy\,d\theta$$

の型のものを考える. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ で, 有界線型作用素を定義するための十分条件を求め, $\nu \to \infty$ のときの漸近的様子を調べておく。

Ex. 1. $m=0$ のとき, Fourier 変換.

$$\hat{f}(y) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\nu x\cdot y} f(x)\,dx$$

Ex 2. $m = n$, $a(x,\theta,y) \equiv 1$, $\phi(x,\theta,y) = (x-y)\cdot\theta$

$$f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{n}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{i\nu(x-y)\cdot\theta} f(y)\,dy\,d\theta$$

Ex. 3. $m=n$. $\phi(x,\theta,y)=(x-y)\cdot\theta$ のとき擬微分作用素。

$$A(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{n}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} a(x,\theta,y)\,e^{i\nu(x-y)\cdot\theta} f(y)\,dy\,d\theta$$

となる。

Ex. 4. Eskin の例. [5] $m=n$, $\nu=1$.

$\lambda(x,\xi)$ は ξ につき斉次一次の実 C^∞ 関数, $\phi(x,\theta,y)$ は,

Eiconal eq.

$$\phi_t-\lambda(x,\phi_x)=0$$
$$\phi|_{t=0}=(x-y)\cdot\theta$$

の解, $\phi(t,x,\theta,y)$ で t はパラメーターとみなす。(十分小) $a(x,\theta,y)$ は y に依らず, $\exists r\geq 0$.

$$|\partial_x^\alpha a(x,\theta)|\leq C(1+|\theta|)^r$$

という評価をみたし, x につき compact support. このとき

$$\|A(\nu)f\|_{L^2}\leq C\|f\|_{L^2}$$

を示した.

Ex. 5. Eskin [6] $\nu=1$. $m=0$, $\phi(x,y)$ は y につき斉次一次. 実数値をとる C^∞ 関数で, $(y\neq 0)$

(a) $|\partial_x^\alpha a(x,y)|\leq C(\alpha)$,

(b) $\exists N > 0$. 对 $|x| \geqq N \Rightarrow a(x, y) \equiv a(\infty, y)$.

(c) $\left|\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, y)\right| \neq 0$. 与 y.

この下で

$$\|A(\nu) f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad (\nu = 1)$$

を示した.

Ex 6. Hörmander [10] $\phi(x, \theta, y)$ は θ につき斉次一次の $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \setminus 0) \times \mathbb{R}^n)$ の実数値関数で,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, \theta, y) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \theta}(x, \theta, y) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial y}(x, \theta, y) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \theta}(x, \theta, y) \end{pmatrix} \neq 0$$

かつ $a \in S^0_{\rho, 1-\rho}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, $\rho > \frac{1}{2}$ のとき,

$\forall K, K'$ という $\mathbb{R}^n$ の2つのコンパクト集合に対し, $\exists C > 0$ があって, f の台が K' に含まれるなら

$$\|A(\nu) f\|_{L^2(K)} \leqq C \|f\|_{L^2(K')} \qquad (\nu = 1)$$

を示した.

Ex 7. 熊ノ郷[12]は早くから Fourier 積分作用素の L^2 有界性について研究を発表した. 最近の結果によると, [12], Eskin と Hörmander の結果につきまとっていた条件, $a(x, \xi, y) = a(\infty, \xi, y)$ という条件を除いた。

$a \in S^0_{\rho\delta}$，$\rho \geqq \delta$ で良い。しかし $\phi(x,\xi,y)$ は，$(x-y)\cdot\xi$ から，あまり離れてはならない。として，

$$\|A(\nu)f\|_{L^2} \leqq C\|f\|_{L^2} \qquad (\nu=1)$$

という評価を，f の台の有限，~~無~~限に関わらず，証明している。

Ex 8　藤原[7] は，はじめて，パラメーター ν を導入した。そして ~~$\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$~~ $m=0$，即ち $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ で実数値をとり，次の仮定をみたすものとした。

(A)　$\Phi(x,y,z) = \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,z)\right|$

$\Psi(x,y,z) = \left|\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial\phi}{\partial y}(z,y)\right|$

とおき，正値関数 $\Xi_1(x,y,z)$，$\Xi_2(x,y,z)$，$\theta(t)$ があり，

$\Phi(x,y,z) \geqq \Xi_1(x,y,z)\,\theta(|y-z|)$

$\Psi(x,y,z) \geqq \Xi_2(x,y,z)\,\theta(|x-z|)$

であり，ある正数 $\delta>0$ があり $\Xi_j(x,y,z)\geqq\delta$，$(j=1,2)$

であり，また他の $\sigma>0$ について $\theta(t)\sim t^\sigma$ $(t\to\infty)$

と仮定する。

(B)　$\forall\alpha$，$|\alpha|\geqq 2$ に対し

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha(\phi(x,y)-\phi(x,z))\right| \leqq C\,\Phi(x,y,z)$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha(\phi(x,y)-\phi(z,y))\right| \leqq C\,\Psi(x,y,z)$$

(C) $\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(a(x,y)\,a(x,z)\right)\right| \leq C\,\Xi_1(x,y,z)^{|\alpha|}$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha}\left(a(x,y)\,a(z,y)\right)\right| \leq C\,\Xi_2(x,y,z)^{|\alpha|}.$$

これらの仮定 (A),(B),(C) がみたされるとき、

$$\|A(\lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

を示した。

ここでは、(1) という積分変換に次の仮定を置く。

(A-I) ϕ は実数値の $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ で C^∞ の関数。

(A-II) $\exists\delta_0>0$, $\forall(x,\theta,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ に対し、

$$|\det D(\phi)(x,\theta,y)| \geq \delta_0$$

が成立する。ただし、$D(\phi)(x,\theta,y)$ は次の関数行列。

$$D(\phi)(x,\theta,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,\theta,y), & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial\theta}(x,\theta,y) \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial y}(x,\theta,y), & \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial\theta}(x,\theta,y) \end{pmatrix}$$

(A-III) 行列 $D(\phi)(x,\theta,y)$ の各成分は L. Schwartz [16] の意味で $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ の元。

(A-IV). $a\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$.

この仮定 (A-I),(A-II), (A-III), (A-IV) をおくと，

$$\| A(\nu) f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad {}^\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

という評価が，成立する。従って．$A(\nu)$ は，$L^2(\mathbb{R}^n)$ の有界線型作用素を定める。

§2．定理．

積分 (1) は，一般には絶対収束しない。はじめに，積分 (1) の意味を，はっきりさせる。

定義．関数列 $\{\omega_\nu(x,\theta,y)\}_{\nu=1}^\infty$ が，1 の近似列であるとは，$\{\omega_\nu\}$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ で有界集合をなし，各々の $\omega_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ で $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ で

$$\lim_{\nu\to\infty} \omega_\nu(x,\theta,y) = 1$$ であること，とする。

これを用いて

(2) $$A_k(\nu) f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} a(x,\theta,y)\, \omega_k(x,\theta,y) f(y)\, dy\, d\theta$$

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

とおく。

定理 1. (A-I) から (A-IV) が成立すると仮定するならば、$^\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し、1 の近似列のとり方によらず、$^\exists A(\nu)f(x) = \lim_{k\to\infty} A_k(\nu)f(x)$ が各 $x \in \mathbb{R}^n$ において存在し、Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ の意味で強収束。

$$A(\nu)f = s\text{-}\lim_{k\to\infty} A_k(\nu)f$$

が成立する。

定理 2. (A-I) から (A-IV) が成立すると仮定すれば、$^\exists C>0$, $^\forall \nu \geq 1$, $^\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\|A(\nu)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

という評価が成立する。

$\nu \longrightarrow \infty$ のときの様子を記述するには、Hörmander 及び Maslov の仕事が指針となった。

定義 2 $\quad C_\phi = \{(x,\alpha,y) \mid \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(x,\alpha,y) = 0\}$

とおく。

$$\Lambda_\phi = \{(x,y,\ d_x\phi,\ -d_y\phi) \mid (x,\alpha,y) \in C_\phi\}.$$

とすると、Λ_ϕ は、$T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ の正準変換のグラフとなる。そこで、Hörmander にならって Λ_ϕ 上 $\Omega_{1/2}\otimes L$ の切断となる、$A(\nu)$ の主表象 $\sigma(A(\nu))$ を定義出来る。

Λ_ϕ とこの主表象が $\nu\to\infty$ のときの $A(\nu)$ の振舞いを本質的に決定する。すなわち，

定理3.

$$A_1(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}}\iint_{R^m\times R^n}a_1(x,\theta,y)\,e^{i\nu\phi_1(x,\theta,y)}f(y)\,dy\,d\theta$$

$$A_2(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m'+n}{2}}\iint_{R^{m'}\times R^n}a_2(x,\tilde\theta,y)\,e^{i\nu\phi_2(x,\tilde\theta,y)}f(y)\,dy\,d\tilde\theta$$

が共に (A-I)〜(A-IV) の条件をみたすとする。しかも

$\Lambda(\phi_1)=\Lambda(\phi_2)$ かつ $\sigma(A_1)=\sigma(A_2)$ であり，$\Lambda(\phi)$

が有限性条件 (L) をみたすならば，ある定数 $\gamma\in R$

と，ある定数 $C>0$ があって，$\forall\nu$，f に対し

$$\| A_1(\nu)f-e^{i\nu\gamma}A_2(\nu)f\|_{L^2(R^n)}\leq C\nu^{-1}\|f\|_{L^2(R^n)}$$

有限性の条件 L とは，次の如くである。

χ を，$\Lambda(\phi)$ に対応する正準変換とする。

$$\chi:(x,\xi)\longrightarrow(y,\zeta)$$

とする。$\forall K\subset\{1,2,\cdots,n\}$ に対し，母関数として (x_{K^c},ξ_K) の関数がとれるところを V_K とする。有限性の条件 L というのは，この V_K が有限個の sheets からなっていること。

§3 応用

ある $\delta>0$ があって $|a(x,\theta,y)| \geq \delta > 0$ とする。このとき $B(\nu)$ を適当に (1) の形の変換にとると，

$$A(\nu)\cdot B(\nu) = I + R(\nu)$$

で $\qquad \|R(\nu)\| \leq C\nu^{-1}$ にできる。

従って十分 ν が大きいと $A(\nu)^{-1}$ が存在する。

とくに $a(x,\theta,y) \equiv 1$ のとき，ν が十分大きいと，ある unitary operator $U(\nu)$ があって

$$\|U(\nu) - A(\nu)\| \leq c\nu^{-1}$$

にできる。

このことは，"正準変換にはユニタリ作用素が対応する" という，有名な量子力学の原理に符合している。

§4 証明の概略

定理2の証明のみを概説しよう。

$$\varphi \in \mathcal{D}(R^n), \qquad \int\varphi(x)\,dx = 1,$$

$$\psi \in \mathcal{D}(R^m), \qquad \int\psi(\theta)\,d\theta = 1$$

とする。

$(s,\sigma,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ に対し，

$$a_{s\sigma t}(x,\theta,y) = a(x,\theta,y)\varphi(x-s)\psi(\theta-\sigma)\varphi(y-t)$$

とおき，

$$A_{s\sigma t}(h)f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint a_{s\sigma t}(x,\theta,y)e^{ih\phi(x,\theta,y)} f(y)\,dy\,d\theta$$

とすると，

$$A(h)f(x) = \iiint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} A_{s\sigma t}(h)f(x)\,ds\,d\sigma\,dt$$

である。

$p=(s,\sigma,t)$，$A_{(s\sigma t)}(h) = A_p(h)$ と書く。

次の Cotlar - Stein の補助定理（Calderón - Vaillancourt）を用いる。

補助定理（Cotlar - Stein）

(i) $\|A_p(h)\| \leq C$ となる正定数 C がある。

(ii) 正数値をとる関数 $h(p,p')$ があって

$$\|A_p^*(h)A_{p'}(h)\| \leq h(p,p')^2$$

$$\|A_p(h)A_{p'}^*(h)\| \leq h(p,p')^2$$

$\forall (p,p')$

が成立し，$\sup_p \int h(p,p')\,dp' \leq C$　$\sup_{p'} \int h(p,p')\,dp \leq C$

が成立すれば

$$\|A(h)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する。

このCotlar–Steinの補助定理の仮定 i) ii) が成立することを確めれば良いのだが、そのために次の補助定理を用いる。これがすべての議論の基本となる定理で~~あっ~~ある

補助定理. (A–I)(A–II)(A–III) が成立するとき写像

$$(x, \theta, y) \longrightarrow (z, \eta, y), \quad z = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \theta, y), \ \eta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x, \theta, y)$$

は $\mathbb{R}^{m+2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2n}$ の大域的微分同相を与える。しかもある正定数 δ' があって2つの評価

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \theta, y) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x', \theta', y)\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial \theta}\phi(x, \theta, y) - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta', y)\right|^2 \geqq \delta'(|x-x'|^2 + |\theta-\theta'|^2)$$

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \theta, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \theta', y')\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial \theta}\phi(x, \theta, y) - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x, \theta', y')\right|^2 \geqq \delta'(|y-y'|^2 + |\theta-\theta'|^2)$$

が成立する。

これは良く知られた大域的陰関数定理を用いれば得られる。

補助定理の意味するところは、因子 $e^{i\lambda\phi(x, \theta, y)}$ が、(x, θ, y) が変化すると、速く振動する、ということを、保証している。

証明の詳細、及び、これらの定理から導かれる結果、
及び、擬微分作用素との合成法則については、
我々の論文[ ] を参照されたい。

文献は、次ページにある。

References

[1] Asada, K. and Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with rapidly oscillatory kernels. J. Math. Soc. Japan, vol.27, 1975 pp 628-639.

[2] Birkhoff, G. D., Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), 681-700.

[3] Calderón, A. P. - Vaillancourt, R., A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69 (1972), 1185-1187.

[4] Dirac, P., The principle of quantum mechanics. Third edition. 1947 Oxford,

[5] Eskin, G. I., The Cauchy problem for hyperbolic systems in convolution, Mat. Sbornik, 74 (1967), Translation: Math. USSR Sbornik, 3 (1967), 243-277.

[6] ——— , Degenerate elliptic pseudo-differential equations of prinicpal type, Mat. Sbornik, 82 (1970), Translation: Math. USSR Sbornik, 11 (1970), 539-582.

[7] Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with rapidly oscillatory kernels, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 90-99.

[8] ——— , Fundamental solution of partial differential operators of

Schrödinger's type, I, Proc. Japan Acad. 50 (1974), 566-569, II, 699-701.

[9] ——— , Construction of the fundamental solutions of Schrödinger's equation on the sphere, To appear in J. Math. Soc. of Japan.

[10] Hörmander, L., Fourier integral operators, Acta Math. 127 (1971), 79-18

[11] ——— , Oscillatory integrals and multipliers on FL^p, Arch. för Math. vol 1. (1973) pp 1-11.

[12] Kumanogo, H., A calculus of Fourier integral operators on $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Communications in partial differential equations.

[13] Lax, P. D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. 24 (1957), 627-646.

[14] Leray, J., Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles Séminare Leray, Collège de France, 1972.

[15] Maslov V.P., Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, (Russia French translation, Dunod. (1972)

[16] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, Paris. 2nd ed. (1970

[17] Schwartz, J. T., Nonlinear functional analysis, Gordon-Breach, New Yor 1969.

[18]. Asada. Fujiwara, On some oscillatory integral Transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
日本数学会 Jour に投稿中.