数理解析研究所講究録
第307巻 1977年 60-62



# 連続関数の空間での放物型方程式

阪大理　田辺広城

## 境界値問題

$$\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), \quad x\in\Omega,$$

$$\sum a_{ij}(x)\nu_j \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \qquad x\in\partial\Omega$$

を考える．ここに $\Omega$ は Browder の意味で一様に $C^2$ 級，局所的に $C^4$ 級な $R^n$ の中の領域，$a_{ij}$, $a_i$, $a$ は実数値関数，$\{a_{ij}(x)\}$ は一様に正定符号，$a \leqq 0$，$a_{ij}\in B^0(\bar\Omega)$，$a_i\in L^\infty(\Omega)$，$a\in L^\infty(\Omega)$，$a_{ij}|_{\partial\Omega}\in B^1(\partial\Omega)$．ここに $B^k(\Omega)$ は $\Omega$ で $k$ 回連続微分可能，$k$ 階迄の導関数はすべて有界な関数の全体である．$\bar\Omega$ で連続，$\infty$ で零に等しい関数の全体を $\dot C(\bar\Omega)$，$u\in\dot C(\bar\Omega)$ に対して $|u| = \max|u(x)|$ とおく．

$D(A) = \{u :$ すべての $1<p<\infty$ に対し $u\in W_p^2(\Omega)$,

$\sum a_{ij}\nu_j\, \partial u/\partial x_i|_{\partial\Omega} = 0$, $Lu\in\dot C(\bar\Omega)\}$,

$u\in D(A)$ に対し $Au = Lu$,

とおく．ただし超関数の意味で

$$L = \Sigma a_{ij}\, \partial^2/\partial x_i \partial x_j + \Sigma a_i \partial/\partial x_i + a,$$

$\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ は法線ベクトルである．$A$ は $\dot{C}(\bar{\Omega})$ で解析的半群を生成することの一証明を述べる．

$A_p$ $(1<p<\infty)$ を

$$D(A_p) = \{u \in W_p^m(\Omega) : \Sigma a_{ij} \nu_j \partial u/\partial x_i |_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$A_p u = Lu$$

によって定義される作用素とする．形式的共役が構成出来る場合は $e^{tA_p}$ の核 $G(t,x,y)$ に関して

$$0 \leqq G(t,x,y) \leqq \frac{C}{t^{n/2}} \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right),$$

$u \in \dot{C}(\bar{\Omega})$ に対し $t \to 0$ のとき $\Omega$ で一様に

$$\int_\Omega G(t,x,y)u(y)\,dy \to 0,$$

更に $G(t,x,y)$ は $e^{tA}$ の核であることも分るから望みの結果が得られる．一般の場合は係数を $a_{ij}^{(k)} \in B^2(\bar{\Omega})$, $a_i^{(k)} \in B^1(\bar{\Omega})$， $\bar{\Omega}$ で一様に $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$， $B^1(\partial\Omega)$ で $a_{ij}^{(k)}|_{\partial\Omega} \to a_{ij}|_{\partial\Omega}$， $a_i^{(k)}$ は一様有界，殆ど至る所 $a_i^{(k)} \to a_i$ となる様に近似する． $a_{ij}$ 等を $a_{ij}^{(k)}$ で置き換えた作用素を $A^{(k)}$ とする． $u$ が $L^p(\Omega) \cap \dot{C}(\bar{\Omega})$ に属すれば $\exp(tA_p^{(k)})u \to \exp(tA_p)u$ （$L^p$ で強収束）， $|\exp(tA_p^{(k)})u| \leqq C|u|$ から所要の結果を得る． $D(A)$ が稠密であることは $\tilde{a}_{ij}(x)$

を $B^1(\overline{\Omega})$ に属し, $\partial\Omega$ では $a_{ij}(x)$ に等しく, $\{\tilde{a}_{ij}(x)\}$ が一様に正定符号であるような関数, $L$ を

$$\tilde{L}=\sum\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

で置き換えて定義される作用素を $\tilde{A}$, $\tilde{A}_p$ 等と表わすと $D(\tilde{A}_p)=D(A_p)$, $\tilde{L}$ の形式的共役が作れるから $e^{t\tilde{A}_p}$ の核に関して前頁の $G(t,x,y)$ に関することと同様のことが成立することからわかる.