数理解析研究所講究録
第 307 巻 1977 年 102-110

楕円型作用素のスペクトルと局所エネルギーの減衰度

都立大 理数　村田 實

§1. 序

$L_2(\mathbb{R}^n)$ における自己共役作用素

$$H = P(D) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) Q_j(D) .$$

を次の仮定(A)のもとで考えよう。

(A) (1) $P(\xi)$ は m 次実係数楕円型多項式.

(2) $Q_j(\xi)$ ($j=1,\cdots,N$) は次数 $m-2$ 以下の実係数多項式.

(3) $q_j \in W_\infty^{m_j}(\mathbb{R}^n)$ ($m_j = \deg Q_j$, $j=1,\cdots,N$),

$$\sum_{j=1}^{N} q_j(x) Q_j(D) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(D)(\overline{q_j}(x)\cdot) .$$

(4) ある $\rho > \frac{1}{2}$ が存在して. $(1+|x|^2)^\rho q_j(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ($j=1,\cdots,N$).

このとき、初期値問題

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = Hu \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

の解 $e^{itH}\varphi$ の局所エネルギー $\left(\int_K |e^{itH}\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ $(K \subset\subset \mathbb{R}^n)$ は $t\to\infty$ のとき減衰することが知られているが（c.f. [1]）、その減衰度を考察するのが本稿の目的である。

§2. 結果

2.1. 記号. P の危値の全体 $\{P(\xi)\ ;\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \mathrm{grad}\,P(\xi)=0\}$ を $\Lambda(P)$ であらわす。$\Lambda(P)$ は有限集合である。$(P-\lambda\pm i0)^{-1}\cdot$ 及び $\delta(P-\lambda)\cdot$ は次の様に定義される $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ への作用素である。

$$((P-\lambda\pm i0)^{-1}\cdot u,\ v) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\frac{(u\bar{v})(\xi)\,d\xi}{P(\xi)-\lambda\pm i\varepsilon},$$

$$u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\delta(P-\lambda)\cdot = \frac{1}{2\pi i}\{(P-\lambda-i0)^{-1}\cdot - (P-\lambda+i0)^{-1}\cdot\}.$$

右辺の極限は任意の $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\Lambda(P)$ に対して存在して、$\mathbb{R}\setminus\Lambda(P)$ で C^∞-級であるが、$\Lambda(P)$ の近傍ではその特異性に応じて正則性が異なる。

H^s は普通の Sobolev 空間で H^s_ρ は重みつきの Sobolev

空間である。

$$H_\sigma^\sigma = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,;\, \|f\|_{H_\sigma^\sigma} = \|(1+|x|^2)^{\frac{\sigma}{2}} (1-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} f(x)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty \}.$$

X を Banach 空間とする。X-値関数のなす Besov 空間 $B_{p,q}^\sigma(\mathbb{R}^n;X)$ は以下の様に定義される(c.f. [2])。

(i) $\sigma = k+\theta$ ($0<\theta<1$, k: 非負整数)のとき.

$$B_{p,q}^\sigma(\mathbb{R}^n;X) = \{ f \in W_p^k(\mathbb{R}^n;X) \,;\, \|f\|_{B_{p,q}^\sigma} = \|f\|_{W_p^k}$$

$$+ \sum_{|\alpha|=k} \left[\int (|y|^{-\theta} \| D^\alpha f(x+y) - D^\alpha f(x) \|_{L_p})^q \frac{dy}{|y|^n} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \}.$$

(ii) $\sigma = k+1$ (k: 非負整数)のとき.

$$B_{p,q}^\sigma(\mathbb{R}^n;X) = \{ f \in W_p^k(\mathbb{R}^n;X) \,;\, \|f\|_{B_{p,q}^\sigma} = \|f\|_{W_p^k}$$

$$+ \sum_{|\alpha|=k} \left[\int (|y|^{-1} \| D^\alpha f(x+2y) - 2D^\alpha f(x+y) + D^\alpha f(x) \|_{L_p})^q \frac{dy}{|y|^n} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \}.$$

例えば $\sigma > 0$ として.

$$g(\lambda) = \varphi(\lambda) f(\lambda), \quad f(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{\sigma-1}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases},$$

$$\varphi(\lambda) \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 1 \\ 0, & |\lambda| > 2 \end{cases}$$

とおくと. $g(\lambda) \in B_{1,\infty}^\sigma(\mathbb{R}) \setminus W_1^\sigma(\mathbb{R})$。又、$P(\xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$

とすると

$$(\delta(P-\lambda)\cdot u, v) = \begin{cases} \lambda^{\frac{n}{2}-1}\int_{S^{n-1}} (u\bar{v})(\lambda^{\frac{1}{2}}\omega)\,d\omega, & \lambda > 0 \\ 0 & , \lambda < 0. \end{cases}$$

従って. $\varphi(\lambda)(\delta(P-\lambda)\cdot u, v) \in B^{\frac{n}{2}}_{1,\infty}(\mathbb{R}) \setminus W^{\frac{n}{2}}_{1}(\mathbb{R})$.

2.2. 一般固有関数. H のスペクトル密度 $\frac{dE(\lambda)}{d\lambda}$ ($E(\lambda)$ は H に付随する1の分解) の $\Lambda(P)$ の近傍での正則性を調べるのに、次の一般固有関数の概念が重要である。

定義 $\mu \in \Lambda(P)$ とする。$Q_j(\xi)(P(\xi)-\lambda-i0)^{-1}$. ($j=1,\cdots,N$) が μ の近傍で $\mathcal{B}(H^{s}, H^{-s})$-値関数として Hölder 連続であるとする。(ここで s は (A.4) で与えられたもの。) このとき方程式

$$u + \mathcal{F}^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{N} Q_j(\xi)(P(\xi)-\mu-i0)^{-1}\cdot(\widehat{q_j u})(\xi)\Big] = 0$$

の解 $u \in H^{m}_{-s}$ を μ に付随した一般固有関数という。μ に付随する恒等的に零ではない一般固有関数が存在するとき、μ を一般固有値という。

定義から直ちに次のことがわかる: (i) 一般固有関数 u は方程式 $Hu = \mu u$ を distribution の意味で満たす; (ii)

固有関数は一般固有関数である; (iii) μ に付随する（一般）固有関数の全体 E_μ は有限次元ベクトル空間をなす。E_μ は s に依存して定義されているが、多くの場合 s には依存しない。例えば次の定理が成り立つ。

定理　仮定(A) 及び次の仮定(E)が満たされるとする。

(E)　$\alpha + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) > 0$ なる α 及び $1 \leqq p \leqq 2$ が存在して、任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\varphi Q_j (P-\mu)^{-1} \in B_{p,\infty}^{\alpha+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}(\mathbb{R}^n), \quad j=1,\cdots,N.$$

このとき、$2s > \max(\frac{n}{2}-\alpha, 1)$ ならば、μ に付随する一般固有関数は次の評価を満たす。

$$\left(\int_{R \leqq |x| \leqq 2R} |(1-\Delta)^{\frac{m}{2}} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq C R^{-\alpha}, \quad R>0.$$

例　$H = -\Delta + q(x)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ $(n \geqq 3)$ とする。もし実数値関数 q がある $s>1$ に対して $(1+|x|^2)^s q(x) \in L_\infty$ を満たすならば、零に付随する一般固有関数 u は

$$\left(\int_{R \leqq |x| \leqq 2R} |(1-\Delta) u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq C R^{2-\frac{n}{2}}, \quad R>0$$

を満たす。

2.3. 主要定理　仮定(A)及び次の仮定(B), (C)が満たされるとする。

(B) $\Lambda(P)$の近傍で1に等しい関数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が存在して次の(1), (2)が成り立つ。

(1) $\exists \sigma > 0$ & $1 \leqq \exists p \leqq 2$ s.t.

$\varphi\,\delta(P-\lambda)\cdot \in B^{\sigma}_{p,\infty}(\mathbb{R}\,;\mathbb{B}(H^{s}, H^{-s}))$.

(2) $\exists q \geqq p$ s.t. $\sigma - \frac{1}{q} > 0$ &

$\varphi\, Q_j\, \delta(P-\lambda)\cdot \in B^{\sigma}_{q,\infty}(\mathbb{R}\,;\mathbb{B}(H^{s}, H^{-s}))$.

(C) (1) 任意の $\mu \in \Lambda(P)$ は H の一般固有値ではない;

(2) H の固有値は $(\lambda_0, \infty)\setminus\Lambda(P)$ には存在しない（$\lambda_0 = \min P(\xi)$）。

このとき、φ が H の任意の固有関数と直交するならば、次の評価が成り立つ。

$$\left[\int_t^{2t} \left\{\int |e^{i\tau H}\varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-s\theta}\, dx\right\}^{\frac{r}{2\theta}} d\tau\right]^{\frac{\theta}{r}}$$

$$\leqq C_\varepsilon t^{-\sigma\theta} \|\varphi\|_{H^{(1+\varepsilon)\theta}_{s\theta}}, \qquad t>1,\ \frac{1}{r} \leqq 1-\frac{1}{p},$$

$$0 \leqq \theta \leqq 1,\ \varepsilon > 0.$$

但し、C_ε は ε のみに依存する定数。

§3. Schrödinger 方程式

主要定理は仮定(C)のもとでは q 及び φ の $|x|\to\infty$ での減衰度に応じて $e^{itH}\varphi$ の局所エネルギーの $t\to\infty$ での減衰度がよくなることを意味している。

Schrödinger 作用素 $H=-\Delta+q(x)$ in $L_2(R^n)$ $(n\geqq 3)$ を考えよう。ここで q は非負関数である $\rho>1$ に対し $(1+|x|^2)^{\rho}q(x)\in L_\infty(R^n)$ を満たすものとする。このとき仮定(A)及び(C)が成り立つので、$\delta(|\xi|^2-\lambda)\cdot$ の正則性を調べることにより次の評価(i)~(iii)を得る。

(i) $1<\rho\leqq\frac{n}{2}$ のとき、任意の $r\in(2,\infty]$ に対して定数 C_r が存在して

$$\left[\int_t^{2t}\left\{\int|e^{i\tau H}\varphi(x)|^2(1+|x|^2)^{-\rho\theta}dx\right\}^{\frac{r}{2\theta}}d\tau\right]^{\frac{\theta}{r}}$$

$$\leqq C_r\, t^{-(\rho-\frac{1}{2})\theta}\,\|\varphi\|_{H^{(1+\varepsilon)\theta}_{\rho\theta}},\qquad t>1.$$

(ii) $\frac{n}{2}<\rho\leqq\frac{n+1}{2}$ のとき、定数 C が存在して

$$\left[\int_t^{2t}\left\{\int|e^{i\tau H}\varphi(x)|^2(1+|x|^2)^{-\rho\theta}dx\right\}^{\frac{r}{2\theta}}d\tau\right]^{\frac{\theta}{r}}$$

$$\leqq C\, t^{-(\rho-\frac{1}{2})\theta}\,\|\varphi\|_{H^{(1+\varepsilon)\theta}_{\rho\theta}},\qquad t>1,\ \left(\tfrac{n+1}{2}-\rho\right)^{-1}\leqq r\leqq\infty.$$

(iii) $s > \frac{n+1}{2}$ のとき，定数 C が存在して

$$\left[\int |e^{itH}\varphi(x)|^2 (1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}\theta} dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C t^{-\frac{n}{2}\theta} \|\varphi\|_{H^{(1+\varepsilon)\theta}_{\frac{n+1}{2}\theta}}, \qquad t > 1.$$

注意　S. Steinberg [4] はある $\alpha > 0$ に対し $q(x)e^{\alpha|x|} \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ となる場合を考察して次の結果を得ている：仮定(C.1)のもとで，φ が H の任意の固有関数に直交する "いい" 関数ならば

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |e^{itH}\varphi(x)|^2 e^{-\alpha|x|} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C t^{-1}$$

が成りたつ。

参考文献

[1] Kuroda, S. T., Scattering theory for differential operators, I, II, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 75–104, 222–234.

[2] Muramatu, T., On Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a

general region, Pull. R.I.M.S., Kyoto Univ., 9 (1974), 325-371.

[3] Murata, M., Rate of decay of local energy and spectral properties of elliptic operators, submitted to J. Math. Soc. Japan or Japanese J. Math..

[4] Steinberg, S., Local time decay for solutions of the Schrödinger equation and the wave equation, Arch. Rath. Mech. Anal., 54 (1974), 134-147.