数理解析研究所講究録
第 307 巻 1977 年 122-129

非柱状領域での Navier-Stokes 方程式について

広大理　井上淳

ここでは，脇本実氏（広大理）との共著 'On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain.' の解説を試みる．（詳細は上記の論文を参照されたい．）

水槽の中に何匹かの金魚が泳いでいるとき，そのまわりの水の流れが如何なる方程式に支配されているか考えよう．もし金魚どうしがぶつからず，又，金魚も仮想的に C^∞ の体側をもち，水槽自身も C^∞ に滑らかとしよう．すなわち，$\Omega(t)$ を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし，境界 $\partial\Omega(t)$ は滑らかとする．Q_∞ を $Q_\infty = \bigcup_{0<t<\infty} (\Omega(t)\times\{t\})$ と定義する．$u = (u^1(x,t), u^2(x,t), \cdots, u^n(x,t))$ を $(x,t)\in Q_\infty$ での流体の速度，$p = p(x,t)$ をその点での圧力とすると，上の金魚の泳ぐ様子は，$n=3$ として，以下に述べる初期境界値問題に従うと考えられている．

$$
(\mathrm{Pr.N.C})\begin{cases}
\dfrac{\partial u^i}{\partial t} - \nu \Delta u^i + u^j \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial p}{\partial x^i} = f^i & \text{in } Q_\infty \\
\dfrac{\partial u^i}{\partial x^i} = 0 & \text{in } Q_\infty \\
u^i = b^i & \text{on } \bigcup_{0<t<\infty} (\partial\Omega(t) \times \{t\}) \\
u^i\big|_{t=0} = u_0^i & \text{in } \Omega(0).
\end{cases}
$$

ここで 同じ添字が一つの項にあらわれた場合は，その添字について1からn迄加え合わせることを意味するとする。

$\Omega(t)$ が時間に依存しない場合以下の事柄が知られている．

(i) Leray, Hopf による'弱解'の大域的存在定理．(この解の一意性は，もう40年来未解決で，我々の挑戦を拒みつづけている．)
(ii) (a) Kiselev-Ladyzenskaya による，初期値 u_0 の H^2-norm が十分小さい場合の'強解'の大域的存在，(b) Kato-Fujita による，u_0 の $H^{\frac{1}{2}}$-norm が十分小さい場合の'強解'の大域的存在，又，ここでは考察しないが (iii) Ito, Fujita-Kato による古典解の存在などが主たる仕事として数えあげられる． $\Omega(t)$ が t に依存する場合については，Fujita-Sauer が penalty method によって弱解を構成しているだけで，一意性をもつ解の大域的存在定理は，今迄なかったように思える．

我々は，微分幾何の初等的理論 (i.e. vector field の変換則) を用いて問題を，時間に依存しない領域 $\tilde{\Omega}$ で，変係数の非線型方程式に変換し，更に その方程式を線型放物型方程式の基本解を用いて，積分方程式とし，それを Kato-Fujita

の用いた函数中を使って iteration で解く．ここでは，単に積分方程式を解くことにとどめ，それを変数変換すると，Q_∞ での問題の一意性をもった解（勿論 u_0 は小さい）になっていることは証明しない．

<u>仮定 A.1</u>　$\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω 及び level preserving diffeomorphism $\Phi: \overline{Q_\infty} \longrightarrow \overline{Q_\infty}$，$Q_\infty = \Omega \times (0, \infty)$ があって

$$\det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right) = 1 \qquad \text{for} \quad (x, t) \in \overline{Q_\infty}.$$

但し，$(y, s) = \Phi(x, t) = (\varphi^1(x,t), \varphi^2(x,t), \cdots, \varphi^n(x,t), t)$．

<u>仮定 A.2</u>　微係数 $\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l}$，$\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^j \partial t}$　$(1 \leq i, j, k, l \leq n)$ は $\overline{Q_\infty}$ で有界とする．

<u>注意</u>　上の金魚の問題の場合，水槽の水の出入りはないものとすると，$\int_{\Omega(t)} dx$ は時間に無関係．更に，金魚がぶつからないとは，$\Omega(t)$ は t に関し互いに diffeomorphic．又，t に関し滑めらかとするならば，<u>仮定 A.1</u> を満たす Φ は存在すると思われる．J. Moser は $\Omega(t)$ として compact Riemann manifold without boundary の場合について上の事実を証明した．我々の場合　境界があるので少々異なると思われる．（この点がまだ未解決なのは，ひとえに筆者の不勉強なる為．）

<u>仮定 B</u>　$b = 0$．

<u>注意</u>　この仮定は，上の金魚の場合は全く不自然である．しかし，$b \neq 0$ の場合，β という solenoidal (i.e. $\frac{\partial \beta^i}{\partial x^i} = 0$)

vector field で $\beta|_{\partial\Omega(t)}=b$ なるものが存在すると仮定するならば，単に技術的な問題になると思われるので，簡単の為 $b=0$ とした．又，金魚の例のときは b として金魚の動きがとれるのだが，その場合，β が存在するか否かは，次回にまわしたい．(今のところの計算では O.K.)

以下，この仮定の下で考察する．

1 変数変換 ： Φ の逆変換を Ψ，$(x,t)=\Psi(y,s)=(\psi^1(y,s),\psi^2(y,s),\dots,\psi^n(y,s),s)$ と書く．このとき，明らかに

$$(J_\Psi\circ\Phi)\cdot J_\Phi=E \qquad E=(\delta_{ij}),\quad J_\Phi=\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right),\quad J_\Psi=\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial y^j}\right)$$

がなりたつが，以後，これを単に

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^k}=\delta_{ik}$$

という工合に書く．

記号： $g^{ij}=\dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial y^j}{\partial x^k}$，$g_{ij}=\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^j}$，$\Gamma^k_{ij}=\dfrac{1}{2}g^{kl}\left(\dfrac{\partial g_{il}}{\partial y^j}+\dfrac{\partial g_{jl}}{\partial y^i}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^l}\right)$

Prop 1

$$\left\{\begin{array}{l}
(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}\\[4pt]
\Gamma^k_{ij}=\dfrac{\partial y^k}{\partial x^l}\dfrac{\partial^2 x^l}{\partial y^i\partial y^j}\\[8pt]
\det J_\Phi=\mathrm{const}\ \Rightarrow\ \Gamma^k_{ik}=0\\[4pt]
\dfrac{\partial^2 x^k}{\partial y^i\partial y^j}=\Gamma^l_{ij}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^l}
\end{array}\right.$$

今，vector $\tilde{u}(y,s)$ を $\tilde{u}(x,t)$ より $\tilde{u}=J_\Phi\cdot u$ で定義する．

i.e. $\tilde{u}^i=\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}u^j$

このとき 次の Prop. は重要.

<u>Prop 2</u> Q_∞ が仮定(A 1) を満たすとする. このとき

$$\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial y^i} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i}$$

<u>Thm 3</u> 仮定(A) の下で (Pr. N C) は 以下の (Pr. Tr) に変換される.

$$(\mathrm{Pr.Tr})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial s} - \nu[L(y.s:D_y)\tilde{u}]^i + [M(y.s:D_y)\tilde{u}]^i + [N(y.s:D_y)\tilde{u}]^i \\ \qquad\qquad - g^{ij}\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j} = \tilde{f}^i \quad \text{in } \tilde{Q}_\infty \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial y^i} = 0 \\ \tilde{u}^i\big|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0 \\ \tilde{u}^i\big|_{t=0} = \tilde{u}_0^i \end{cases}$$

但し, $[L(y.s:D_y)\tilde{u}]^i = \dfrac{\partial}{\partial y^j}\left(g^{jk}\dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x^k}\right) + 2g^{kl}\Gamma^i_{jk}\dfrac{\partial \tilde{u}^j}{\partial y^l}$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial y^k}\left(g^{kl}\Gamma^i_{jl}\right) + g^{kl}\Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km}\right\}\tilde{u}^j,$$

$$[M(y.s:D_y)\tilde{u}]^i = \frac{\partial y^j}{\partial t}\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial y^j} + \left\{\Gamma^i_{jk}\frac{\partial y^k}{\partial t} + \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial s\,\partial y^j}\right\}\tilde{u}^j,$$

$$[N(y.s:D_y)\tilde{u}]^i = \tilde{u}^j\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial y^j} + \Gamma^i_{jk}\tilde{u}^j\tilde{u}^k.$$

<u>2. (Pr. Tr) について</u> 以後 $(y.s.\tilde{\Omega})$ をあらためて $(x.t.\Omega)$ と書く. $\mathbb{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$, $\mathbb{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega) = \{\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \operatorname{div}\varphi = 0\}$, $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ = closure of $\mathbb{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ in $\mathbb{L}^2(\Omega)$. $P: \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ 直交射影. $g = (g^{ij})$ の逆行列を h と書き, (Pr. Tr) の第一式に掛ける.

更に，その式に P を施こすと．結果は $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ の中での次の方程式となる．

(*) $\quad Ph\dfrac{du}{dt} - \nu PhLu + PhMu + PhNu = Phf.$

<u>Prop 4</u> $\;Ph$ は $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ から $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ への 1-1, onto, symmetric bounded linear operator となる．勿論 $\mathbb{L}^2(\Omega)$ から $\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ への operator でもある．

$\mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)$ の中に，時間 t に依存する内積 $(\ ,\ )_{H(t)}$ を

$$(u, v)_{H(t)} = (u, h(t)v) \qquad u, v \in \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega)(\equiv H)$$

で定義する．このとき，$-(Ph)^{-1}PhLu$ は $H(t)$ の中で形式的に自己共役であって，その Friedrichs extension を $A(t)$ と書く．$D(A(t)) = \mathbb{H}^1_0 \cap \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{L}^2_\sigma$ などの性質は，既存の理論と同様に導かれる．(*) に $(Ph)^{-1}$ を施こすことにより

(**) $\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\nu A(t)u + B(t)u + F(t, u) + (Ph)^{-1}Phf \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

但し $\begin{cases} B(t)u = -(Ph)^{-1}PhMu \\ F(t, u) = -(Ph)^{-1}PhNu \end{cases}$

$-\nu A(t) + B(t)$ が生成する evolution operator を $U_\nu(t, s)$ と書くと，(**) は次のように書きかえられる．

(***) $\quad u(t) = U_\nu(t, 0)u_0 + \displaystyle\int_0^t U_\nu(t, s)F(s, u(s))\,ds$

$$+ \int_0^t U_\nu(t, s)(Ph(s))^{-1}Ph(s)f(s)\,ds.$$

3. (***) の解　以下は Kato-Fujita と同じなので結果だけ記す.

定理　m を $0<m<2<n<2m+2$, $2m \neq n$ なる数とし, $p=\frac{m}{2}$, $q=\frac{n-2m+2}{4}$ と定める. このとき C という定数があって

$$\nu^{2-2(p+q)} \|u_0\|_{H^{2(p+q)-2}} + \beta_0 \sup_{0<t<\infty} t^{p+q-2} \|f(t)\|_{L^2} < \frac{1}{4\beta_0 C}$$

但し $\beta_0 = \max\left(B(1-p, p+q-1), B(1-q, p+q-1)\right)$, $B(\cdot,\cdot)$ は beta function, となるものとする. このとき (***) の解 $u(t)$ で (i) $u(t) \in C([0,\infty) : \mathbb{L}^2_\sigma(\Omega))$ (ii) $u(t) \in C((0,\infty) : \mathbb{H}^{2\alpha})$ かつ $\|u(t)\|_{H^{2\alpha}} = o(t^{\frac{n-2}{4}-\alpha})$ $(t \to 0)$ が $\frac{n-2}{4}<\alpha<1$ で成立するものがある.

注意　m の制限から, この方法では, 次元は $n=2,3,4,5$ にのみ (但し $n=2$ は例外的に扱う) 適用できる.

文献

E. Hopf : Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen grundgleichungen. Math. Nachr. 4 (1950-51) 213-231.

H. Fujita - T. Kato : On the Navier-Stokes initial value problem I. Arch. Rat. Mec. Anal. 16 (1964) 269-315

H. Fujita - N. Sauer : On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 17 (1970) 403-420

A. Inoue - M. Wakimoto : On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain

to appear

S. Ito : The existence and the uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equation

J. Fac Sci. Univ. Tokyo 9 (1961) 103-140

T. Kato - H. Fujita : On the nonstationary Navier-Stokes system

Rendiconti Sem. Math Univ. Padova 32 (1962) 243-260

O.A. Ladyzenskaya : The mathematical theory of viscous incompressible flow   Gordon-Breach   New York   1963

J Leray : Sur les mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace ,   Acta Math 63 (1934) 193-248

J. Möser : On the volume elements on a manifold

Trans Amer. Math Soc. 120 (1965) 286-294