数理解析研究所講究録
第308巻 1977年 32-40

Jordan triple systemにおける射影変換について

熊本工業大　厚山健次

Jordan algebrasの拡張された代数である Quadratic Jordan triple systems において，複比がKの射影変換は具体的に $\varphi(a,b;K) = I + (K-1)L(a,b) + (K-1)^2 P(a)P(b)$ と表わせる．この写像はO.Loos の Jordan pairs [5, P43] の写像 $\phi(t) = \beta(e_R^+, (1-t)e_R^-)$ と本質的に同じものである

まず1.1において，リー群での折り返し積から，Jordan algebras の折り返し写像 $\varphi(a,a;-1)$ をつくる．そして特殊ユニタリー群 $SU(n)$ でのその写像の例を1.2で，例外Jordan algebra での例を1.3でのべる．最後に Jordan triple systems において射影変換 $\varphi(a,b;K)$ の性質を調べる．

1.1.　リー群Gにおいて折り返し積・を，$x\cdot y = xy^{-1}x$ $x, y \in G$ で定義すると，この積は3つの性質 (i) $x\cdot x = x$, (ii) $x\cdot(x\cdot y) = y$, (iii) $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot(x\cdot z)$ をみたす

ので，群Gは O.Loos [3] の意味で reflection space にな
る．そしてもし，群Gの involutive な元の集合Sと適当な
多様体Mが存在して $S = \exp M$ となるとき，部分 reflection
space S での折り返し積 $x \cdot y = xyx$ によって多様体M
にも折り返し積・が導入できる． $x = e^{sX}$, $y(t) = e^{tY} \in S$,
$X, Y \in M$ のとき，

$$(*) \qquad X \cdot Y = \frac{d}{dt} x y(t) x \Big|_{t=0} = xYx \quad (= \varphi(X, X; -1)Y)$$

とすればよい．

1.2. 群Gが特殊ユニタリー群 $SU(n)$ のときには，多様体
Mは ${}^t\bar{A} = A$, $A^2 = A$, $tr(A) = 1$ なる $n \times n$ 行列Aの全体
がつくる $n-1$ 次元複素射影空間であり，群Gの involutive
な元がつくる reflection space S の元は，$I + (e^{i\theta} - 1)A$,
$A \in M$, なる形をしている． $e^{i\theta A} = I + (e^{i\theta} - 1)A$ と $e^{itX} =$
$I + (e^{it} - 1)X$, $A, X \in M$, がともに reflection space S
の元であるので，上の (*) 式から，射影空間M上における
点Aによる点Xの折り返し積

$$A \cdot X = X + 2(e^{i\theta} - 1) A \circ X + (e^{i\theta} - 1)^2 P(A)X$$

を得る．ただし， $A \circ X = \frac{1}{2}(AX + XA)$, $P(A)X = (2L^2(A) - L(A^2))X$
$= AXA$, $L(A)X = A \circ X$ である．そして，この折り返し写像

$$\varphi(A; k) = I + 2(k-1) L(A) + (k-1)^2 P(A)$$

に関して,

(i) $\varphi(A;-1)$ は射影空間Mの特殊ユニタリー群 $SU(n)$ への埋めこみ写像である.

(ii) 射影空間 M は折り返し積 $A\cdot X=\varphi(A;-1)X$ によって O.Loos の意味の対称空間になる〔4〕.

(iii) $\varphi: A\to\varphi(A;-1)$ は射影空間Mから特殊ユニタリー群への折り返し積に関する homomorphism である.

1.3. 写像 $\varphi(A)X=X-4A\circ X+4P(A)X$ を例外 Jordan algebra で考える(K. Atsuyama〔1〕).

$\mathfrak{C}$を実数体R上のケーリー代数とする. Jをすべての3×3 Hermite行列

$$X=X(\xi,u)=\begin{pmatrix}\xi_1 & u_3 & \overline{u_2}\\ \overline{u_3} & \xi_2 & u_1\\ u_2 & \overline{u_1} & \xi_3\end{pmatrix}\qquad \xi_i\in R,\ u_i\in\mathfrak{C}$$

のつくる27次元のベクトル空間とする. JにJordan積∘を, $X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$ によって定義する. さらに, トレースを $tr(X)=\xi_1+\xi_2+\xi_3$, $X=X(\xi,u)\in J$, で定め, 内積を $(X,Y)=tr(X\circ Y)$ とする。16次元のケーリー射影平面Πは, $X^2=X$, $tr(X)=1$ となるJの元Xの集合である. Jの自己同型写像のつくる群F_4は, 型F_4の52次元例外

単純リー群になる．そしてケーリー射影平面Πの元Aに対しては，$P(A)X=(2L^2(A)-L(A^2))X=A(A,X)$ がなりたつので，射影平面Πの元Aで定義された写像 $\varphi(A)X=X-4A\circ X+4A(A,X)$，$X\in J$，はつぎの性質をもつことがわかる．

(i) $\varphi(A)$ はベクトル空間S_Aに関する折り返し写像である．ただし，S_A は $A\circ X=A(A,X)$ をみたす$X\in J$の全体が張る11次元の実ベクトル空間である．

(ii) $\varphi(A)^2=1 \qquad A\in\Pi.$

(iii) $\alpha\varphi(A)\alpha^{-1}=\varphi(\alpha A) \qquad A\in\Pi,\ \alpha\in F_4.$

(iv) 群F_4 は $\varphi(A)$，$A\in\Pi$，で生成される．

(v) $e^{2\pi i A}=\varphi(A) \qquad A\in\Pi.$

(vi) ケーリー射影平面Πの上で，点Aによる点Bの折り返し積を $A\cdot B=\varphi(A)B$ と定義すれば，Πは O.Loos の意味の対称空間になる．

(vii) φはケーリー平面Πから例外群F_4への折り返し積に関する homomorphism である．

(viii) φはケーリー平面Πの例外群F_4への埋めこみ写像である（I. Yokota [6]）．

2. Quadratic Jordan triple systems において $\varphi(a,b;k)$

が複比 κ の射影変換であることをのべる.

$(\mathfrak{A}, P)$ が可換環 $\Phi \ni 1$ 上の *quadratic* Jordan triple system (q.J.t.s) であるとはつぎの性質がみたされるときである. $\mathfrak{A}$ は Φ-加群で3個の積で閉じている. P は $\mathfrak{A}$ の元に endomorphism ($\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ の元) を対応させる $P(kx) = k^2 P(x)$ $k \in \Phi$ なる写像である. そして, $L(x,y)z = \{xyz\} = P(x,z)y \overset{\mathrm{def.}}{=} (P(x+z) - P(x) - P(z))y$ で定義される $L : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ は, P とともに4つの公理をみたす. (i) $L(x,y)P(x) = P(x)L(y,x)$ (ii) $L(P(x)y, y) = L(x, P(y)x)$ (iii) $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$ (iv) 前の3つの公理は任意の Φ のスカラー拡大においてもなりたつ.

$P(a)b = a$, $P(b)a = b$ なる性質をみたす $\mathfrak{A}$ の元の対 (a,b) は regular pair とよばれる. これは idempotent の拡張された概念である.

$\mathfrak{A}$ の非退化な線形変換 α が $\mathfrak{A}$ の構造群 $St(\mathfrak{A})$ の元であるとは, ある非退化な線形変換 ${}^t\alpha$ が存在して, $\alpha P(x) = P(\alpha x){}^t\alpha$, ${}^t\alpha P(x) = P({}^t\alpha x)\alpha$, $x \in \mathfrak{A}$, なるときをいう. α が構造群の元ならば, $\alpha L(x,y)\alpha^{-1} = L(\alpha x, {}^t\alpha y)$ がなりたつ.

regular pair $(a,b) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ と (複比) $\kappa \in \Phi$ で射影変換 $\varphi(a,b;\kappa) = I + (\kappa-1)L(a,b) + (\kappa-1)^2 P(a)P(b)$ を定義して

その性質を調べる．O.Loos が[5]で行なったようにこの写像で q.J.t.s. $\mathfrak{A}$ の Peirce 分解も可能である．その結果は，$E_0 = 1 - L(a,b) + P(a)P(b)$，$E_{\frac{1}{2}} = L(a,b) - 2P(a)P(b)$，$E_1 = P(a)P(b)$，とするとき，$E_0 + E_{\frac{1}{2}} + E_1 = 1$ であり，$E_0, E_{\frac{1}{2}}, E_1$ は orthogonal projection となるので，q.J.t.s. $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A} = E_0\mathfrak{A} + E_{\frac{1}{2}}\mathfrak{A} + E_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{A}_1$ と分解される．また regular pair (b,a) による Peirce 分解を $*$ をつけて区別すると，$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*_0 + \mathfrak{A}^*_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{A}^*_1$ であり，(a,b) と (b,a) による2つの Peirce 分解の積の関係は $\{\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}^*_j \mathfrak{A}_k\} = \mathfrak{A}_{i-j+k}$ となる（ただし，$i-j+k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ のときは積の値は零とする）．

(i) regular pair (a,b) に関する Peirce 分解を $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{A}_1$ とするとき，$\mathfrak{A}$ の任意の元 $x = x_0 + x_{\frac{1}{2}} + x_1$ に対して $\varphi(a,b;\kappa)x = x_0 + \kappa x_{\frac{1}{2}} + \kappa^2 x_1$ となる．したがって特に2つの性質 $\varphi(a,b;\kappa)\varphi(a,b;\kappa_1) = \varphi(a,b;\kappa\kappa_1)$，$\varphi(a,b;-1)^2 = 1$ を得る．

(ii) $\varphi(a,b;\kappa)a = \kappa^2 a$

(iii) $\varphi(a,b;\kappa)$ のつくる群は $\mathfrak{A}$ の構造群 $St(\mathfrak{A})$ の正規部分群になる．$St(\mathfrak{A})$ の元であることは，$\varphi = \varphi(a,b;\kappa)$ に対して $\varphi\{xyz\} = \{\varphi x\ {}^t\varphi y\ \varphi z\}$ （ただし ${}^t\varphi = \varphi(b,a;\kappa^{-1})$）

がなりたつことからわかる.

証)(構造群 $St(\mathfrak{A})$ の正規部分群になることをいう.)$\alpha\varphi(a,b;k)\alpha^{-1}$ $=\varphi(\alpha a,{}^t\alpha b;k)$, $\alpha\in St(\mathfrak{A})$ がなりたつことを示す.

$\varphi(\alpha a,{}^t\alpha b;k)\alpha x=\alpha x+(k-1)L(\alpha a,{}^t\alpha b)\alpha x+(k-1)^2P(\alpha a)P({}^t\alpha b)\alpha x$ $=\alpha\varphi(a,b;k)x$

(iv) *exp* に意味があるときには, $e^{tL(a,b)}=\varphi(a,b;e^t)$ がなりたつ. 証明には, 等式 $L^n(a,b)=L(a,b)+(2^n-2)P(a)P(b)$ を使えばよい.

(v) *regular pair* $(a,b)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ がつくる集合は積

$$(a,b)\cdot(c,d)=(\varphi(a,b;-1)c,\ \varphi(b,a;-1)d)$$

によって *reflection* space になる.

証) 簡単に $\varphi(a,b;-1)=\varphi$, $\varphi(b,a;-1)={}^t\varphi$ と書く. $P(\varphi c){}^t\varphi d=\varphi P(c)d=\varphi c$, 同様に $P({}^t\varphi d)\varphi c={}^t\varphi P(d)c={}^t\varphi d$ がなりたつので, $(\varphi c,{}^t\varphi d)$ が *regular pair* であることがいえる. つぎに *reflection* space になるための3つの公理の成立を示す. まず上の性質の (ii) から, $(a,b)\cdot(a,b)=(\varphi a,{}^t\varphi b)=(a,b)$. つぎに上の性質(i)から,
$(a,b)\cdot((a,b)\cdot(c,d))=(a,b)\cdot(\varphi c,{}^t\varphi d)=(\varphi\varphi c,{}^t\varphi{}^t\varphi d)=(c,d)$. 最後に上の性質(iii)から,
$((a,b)\cdot(c,d))\cdot((a,b)\cdot(e,f))=(\varphi c,{}^t\varphi d)\cdot(\varphi e,{}^t\varphi f)=$
$(\varphi(\varphi c,{}^t\varphi d;-1)\varphi e,\ \varphi({}^t\varphi d,\varphi c;-1){}^t\varphi f)=(\varphi\cdot\varphi(c,d;-1)e,\ {}^t\varphi\cdot\varphi(d,c;-1)f)=$

$(a,b)\cdot(\varphi(c,d;-1)e,\ \varphi(d,c;-1)f)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$.

(vi) $\varphi:(a,b)\longrightarrow\varphi(a,b;-1)$ なる写像は regular pair の集合がつくる reflection space から折り返し積 $xy^{-1}x$ を持つ構造群への homomorphism である.

証) 上の性質(iii)から,

$$\varphi((a,b)\cdot(c,d))=\varphi(a,b;-1)\varphi(c,d;-1)\varphi(a,b;-1)$$

を得る.

(vii) 1.3の例外 Jordan algebra の例においては, $\varphi(a,b;\kappa)$ は, H. Freudenthal [2] の Perspectivity $\Pi^{\kappa}_{A,B}$ の代数化になっている. したがってこのときには, $\varphi(a,b;-1)$ は型 E_6 例外リー群 (non-compact) の involutive な生成元であり, regular pair の集合はこの E_6 例外群で不変な対称空間となる. またケーリー射影平面 Π の上では, $\varphi(a,b;-1)$ は, 点 a, 軸(無限遠直線) b に関する involutive な射影変換であり, regular pairs (a,b) は (点, 直線) という対であると考えることができる.

References

[1] Atsuyama, K., On the embedding of the Cayley plane into the exceptional Lie group of type F_4, Kōdai Math. Sem. Rep. 28 (1977), 129-134.

[2] Freudenthal, H., Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. IV, Indag. Math. 17 (1955), 277-285.

[3] Loos, O., Spiegelungsräume und homogene symmetrische Räume, Math. Z. 99 (1967), 141-170.

[4] Loos, O., Symmetric Spaces. I, W.A. Benjamin, New York-Amsterdam, 1969.

[5] Loos, O., Jordan pairs, Springer lecture notes 460, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[6] Yokota, I., Embeddings of projective spaces into elliptic projective Lie groups, Proc. Japan Acad. 35 (1959), 281-283.