数理解析研究所講究録
第308巻 1977年 41-54



# Symplectic Triple Systems と単純リー環

横浜市大　浅野　洋

ここでは，表題の triple system から単純リー環を統一的に構成する方法を述べる。標数0の代数的閉体上では階数2以上の単純リー環はすべてこの方法で得られる。この方法は Freudenthal の $E_8$ 型単純リー環の構成法をモデルにしたもので，同様な試みは Meyberg，Faulkner，Hein 達によってなされてはいるが，いずれにも一長一短があり満足出来る状態とは言い難い。

以下において，triple system はすべて有限次元，基礎体の標数は0と仮定する。

<u>定義1</u>. 零でない交代双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を有する triple system $\mathfrak{K}$ の任意の要素 $x, y, z, u, v$ に対し，次の等式が成立つとき，$\mathfrak{K}$ を symplectic triple system (STS と略記) という．

(S1)　$[xyz]-[yxz]=0$

(S2)　$[xyz]-[xzy]=2\langle y,z\rangle x-\langle z,x\rangle y-\langle x,y\rangle z$

(S3) $[uv[xyz]] = [[uvx]yz] + [x[uvy]z] + [xy[uvz]]$.

定理1 STS $\mathfrak{S}$ が単純である為の必要十分条件は，交代双線形形式が非退化なことである。

(証明) (S2) で $z=x$ とおくと $[xyx]-[xxy] = 3\langle y, x\rangle x$.
$\mathfrak{S}$ の任意の微分 D を作用させて

$$[(Dx)yx]+[x(Dy)x]+[xy(Dx)] - 2[(Dx)xy]-[xx(Dy)] = 3\langle y, x\rangle Dx.$$

左辺を (S2) を用いて変形すれば，$(\langle y, Dx\rangle + \langle Dx, y\rangle)x = 0$.
故に，"$\mathfrak{S}$ の微分は歪対称である。" 特に，次式が成立つ．

(1) $\langle [xyz], w\rangle = \langle [xyw], z\rangle$

次に，$\mathfrak{J}$ が $\mathfrak{S}$ のイデアルであれば，$\mathfrak{J}^{\perp} = \{x\in\mathfrak{S} \mid \langle x, \mathfrak{J}\rangle = 0\}$ もイデアルであることを示す。$\mathfrak{S}\ni x, y$, $\mathfrak{J}^{\perp}\ni z$, $\mathfrak{J}\ni w$ に対し，(1) より $[xyz]\in\mathfrak{J}^{\perp}$. (S2) を用いることによって
$\langle [xzy], w\rangle = 2\langle z, \langle x, w\rangle y\rangle - \langle\langle y, w\rangle x, z\rangle$.
他方 (S2) で $z = w$ とおくと $2\langle y, w\rangle x - \langle w, x\rangle y \in \mathfrak{J}$.
これは $x$ と $y$ を交換しても成立つので，結局 $\langle x, w\rangle y\in\mathfrak{J}$, $\langle y, w\rangle x\in\mathfrak{J}$ が成立つ。 ∴ $[xzy]\in\mathfrak{J}^{\perp}$. 従って $\mathfrak{J}^{\perp}$ がイデアルであることがわかる。

いま $\mathfrak{S}$ が単純と仮定すれば $\mathfrak{S}^{\perp} = 0$. 即ち，$\langle\ ,\ \rangle$ は非退化である。逆に $\mathfrak{S}^{\perp} = 0$ と仮定する。上に示したことより，$\mathfrak{S}\rhd {}^{\forall}\mathfrak{J}$ に対して $\langle\mathfrak{S}, \mathfrak{J}\rangle\mathfrak{S}\subset\mathfrak{J}$ が成立つので，特に

$\mathfrak{k} \supsetneq \mathfrak{j}$ なら $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{j} \rangle = 0$ 。故に $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{k}^{\perp} = 0$ 。従って $\langle , \rangle$ が非退化なら $\mathfrak{k}$ は単純である。

STS $\mathfrak{k}$ に同型な STS $\overline{\mathfrak{k}}$ を考え，直和 $\mathfrak{T} := \mathfrak{k} \oplus \overline{\mathfrak{k}}$ を作る。$\mathfrak{T} \ni t_i := x_i + \overline{y_i}$ $\left( = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と書くこともある$\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ に対して

$$(2) \quad \{t_1 t_2 t_3\} := \begin{pmatrix} [x_1 y_2 x_3] - [x_2 y_1 x_3] - \langle x_1, y_2 \rangle x_3 + \langle x_2, y_1 \rangle x_3 + 2\langle x_1, x_2 \rangle y_3 \\ [x_1 y_2 y_3] - [x_2 y_1 y_3] + \langle x_1, y_2 \rangle y_3 - \langle x_2, y_1 \rangle y_3 - 2\langle y_1, y_2 \rangle x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する。$U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ ，$V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ ，$W\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ によって $\mathfrak{T}$ 上の線形写像を定義すれば，明らかに

$$[U, V] = 2V, \quad [U, W] = -2W, \quad [V, W] = U$$

が成立つ。又，$^{\forall} D \in \mathrm{End}(\mathfrak{k})$ に対し，$\overline{D}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Dx \\ Dy \end{pmatrix}$ と定義すれば，$[\overline{D}, U] = [\overline{D}, V] = [\overline{D}, W] = 0$ が成立つ。

$\mathfrak{k}$ の線形写像 $z \longmapsto [xyz]$ を $L(x, y)$ で表わし，これらによって張られる空間を $L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$，$\mathfrak{k}$ の微分全体を $\mathcal{D}er(\mathfrak{k})$ で表わす。$L(\mathfrak{T}, \mathfrak{T})$，$\mathcal{D}er(\mathfrak{T})$ も同様とする。又，$U, V, W$ によって張られる $\mathfrak{gl}(\mathfrak{T})$ の部分環を $\mathfrak{a}$ で表わす。

<u>補題2</u> (i) $L(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) = \overline{L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})} \oplus \mathfrak{a}$ ，

(ii) $\mathcal{D}er(\mathfrak{T}) \supset \overline{\mathcal{D}er(\mathfrak{k})} \oplus \mathfrak{a}$

特に $\mathfrak{k}$ が単純であれば $\mathcal{D}er(\mathfrak{T}) = \overline{\mathcal{D}er(\mathfrak{k})} \oplus \mathfrak{a}$

(証明)　三項積の定義式(2)より

$$L(t_1, t_2) = \overline{L(x_1, y_2)} - \overline{L(x_2, y_1)} + (\langle x_2, y_1\rangle - \langle x_1, y_2\rangle)U + 2\langle x_1, x_2\rangle V$$
$$- 2\langle y_1, y_2\rangle W$$

従って　$L(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) \subset \overline{L(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})} + \mathfrak{a}$

他方，

$$2\overline{L(x, y)} = L\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right)$$
$$2\langle x, y\rangle U = L\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right) - L\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$2\langle x, y\rangle V = L\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$2\langle x, y\rangle W = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right)$$

従って　$\overline{L(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})} + \mathfrak{a} \subset L(\mathfrak{T}, \mathfrak{T})$．和がリー環としての直和であることも明らかで(i)は示された。

次に，$\mathfrak{R}$ の微分は歪対称であることから $\overline{\mathrm{Der}(\mathfrak{R})} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{T})$.
$[U, L(t_1, t_2)] = 4\langle x_1, x_2\rangle V + 4\langle y_1, y_2\rangle W = L(Ut_1, t_2) + L(t_1, Ut_2)$ だから $U \in \mathrm{Der}(\mathfrak{T})$．同様にして，$V$，$W \in \mathrm{Der}(\mathfrak{T})$。

故に　$\overline{\mathrm{Der}(\mathfrak{R})} \oplus \mathfrak{a} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{T})$

(ii)の後半を示す前に次の系と定理3を証明しておく。

<u>系</u>　$\mathfrak{T}$ は Lie triple system (LTS と略記)である。

(証明) $L(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{R})$ だから定理2により $L(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{T})$.
$\{t_1 t_2 t_3\} = -\{t_2 t_1 t_3\}$ は明らか。Jacobi 律も容易に確めうる。

<u>定理3</u>　$\mathfrak{R}$ を STS，$\mathfrak{T} := \mathfrak{R} \oplus \overline{\mathfrak{R}}$ を上述の LTS とする。

このとき，$\mathfrak{T}$ が単純になる為の必要十分条件は $\mathfrak{k}$ が単純なことである。

（証明） $\forall \mathfrak{j} \lhd \mathfrak{k}$ に対し，$\mathfrak{h} = \mathfrak{j} \oplus \bar{\mathfrak{j}}$ は $\mathfrak{T}$ のイデアルだから必要条件であることはわかる。

逆に，$\forall \mathfrak{h} \lhd \mathfrak{T}$ に対し，$\mathfrak{j} := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ とおく。 $\mathfrak{k} \ni x, y$, $\mathfrak{j} \ni z$ に対して $[xyz] = \{x\bar{y}z\} + \langle x, y\rangle z \in \mathfrak{j}$.

更に，$\bar{z} = W(z) \in L(\mathfrak{T},\mathfrak{T})\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$.

従って $[xzy] = \{x\bar{z}y\} + \frac{1}{2}\{xz\bar{y}\} \in \mathfrak{j}$. 故に $\mathfrak{j} \lhd \mathfrak{k}$.

他方 $\mathfrak{h} \ni \forall t = x + \bar{y}$ に対して，$x = V \circ W(t) \in L(\mathfrak{T},\mathfrak{T})^2 \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$, $\bar{y} = W \circ V(t) \in \mathfrak{h}$ だから

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{k}} \quad , \quad \mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{k}} = \overline{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}}$$

が成立つ。 $\mathfrak{k}$ が単純であると仮定すれば $\mathfrak{j} = 0$ 又は $\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$. 従って $\mathfrak{h} = 0$ 又は $\mathfrak{h} = \mathfrak{T}$ となる。即ち $\mathfrak{T}$ は単純である。

（補題２の証明の続き）

$\mathfrak{k}$ が単純と仮定すれば，系と定理３より $\mathfrak{T}$ は単純LTSである。単純LTSに対しては $\mathrm{Der}(\mathfrak{T}) = L(\mathfrak{T},\mathfrak{T})$ であることが知られているので，補題２のすでに証明した結果と一諸にすれば $\mathrm{Der}(\mathfrak{T}) = \overline{\mathrm{Der}(\mathfrak{k})} \oplus \mathfrak{a}$ , $\mathrm{Der}(\mathfrak{k}) = L(\mathfrak{k},\mathfrak{k})$ をうる。

<u>定義2.</u> STS $\mathfrak{k}$ から得られる LTS $\mathfrak{t} = \mathfrak{k} \oplus \bar{\mathfrak{k}}$ の standard enveloping Lie algebra を $\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ で表わし，$\mathfrak{k}$ の standard enveloping Lie algebra と呼ぶ。

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(\mathfrak{k}) &= \mathfrak{t} \oplus L(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) \\ &= \mathfrak{k} \oplus \bar{\mathfrak{k}} \oplus \overline{L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})} \oplus \mathfrak{a}\end{aligned}$$

<u>定理4</u> STS $\mathfrak{k}$ の standard enveloping Lie algebra を $\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ とするとき，$\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ の単純性は同等である。

（証明） $\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ が単純と仮定すれば $\mathfrak{t}$ が単純で，従って $\mathfrak{k}$ が単純である。逆に，$\mathfrak{k}$ が単純と仮定する。$\mathfrak{g}(\mathfrak{k}) \trianglerighteq {}^{\forall}\mathfrak{l}$，$\mathfrak{l} \ni {}^{\forall}X := x + \bar{y} + \bar{D} + \alpha U + \beta V + \gamma W$ （$\alpha, \beta, \gamma$ はスカラー，$D \in L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$）に対し，$2\beta W = [W, [W, X]] \in \mathfrak{l}$，$-2\gamma V = [V, [V, X]] \in \mathfrak{l}$. もし $\beta \neq 0$ 又は $\gamma \neq 0$ と仮定すれば，$W \in \mathfrak{l}$ 又は $V \in \mathfrak{l}$ となり従って $U \in \mathfrak{l}$ となる。$\mathfrak{l}$ はイデアルだから $[U, \mathfrak{g}(\mathfrak{k})] \subset \mathfrak{l}$。故に $\mathfrak{k} \oplus \bar{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a} \subset \mathfrak{l}$. 而も $\overline{L(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})} \subset [\mathfrak{k}, \bar{\mathfrak{k}}] \subset \mathfrak{l}$ だから $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ となり矛盾. 故に，$\beta = \gamma = 0$. 即ち $X = x + \bar{y} + \bar{D} + \alpha U$. $[U, X] \in \mathfrak{l}$, $[U, [U, X]] \in \mathfrak{l}$ より $x, \bar{y} \in \mathfrak{l}$. $\mathfrak{k} \ni {}^{\forall}z$ に対して，$[x, z] = 2\langle x, z\rangle V \in \mathfrak{l}$, $[\bar{y}, \bar{z}] = 2\langle z, y\rangle W \in \mathfrak{l}$。$V, W \notin \mathfrak{l}$ だから $\langle x, z\rangle = \langle z, y\rangle = 0$. 定理1より $x = y = 0$ となる。更に，$[X, V] = 2\alpha V \in \mathfrak{l}$ より

$\alpha=0$. 再び $\forall z\in\mathfrak{k}$ に対して $[X, z]=\bar{D}z\in\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k}$.
すでに示したことから $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k}=\{0\}$ であるから $D=0$ をうる.
故に $\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ は単純である。

実は，上の定理で $\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ の半単純性を仮定すれば，$\mathfrak{k}$ が単純であることがわかる。

いま $x, y\in\mathfrak{k}$ に対し $xy^*\in End(\mathfrak{k})$ を $z\longmapsto\langle z, y\rangle x$ によって定義する。明らかに $tr\, xy^*=\langle x, y\rangle$。

$R(x, y): z\longmapsto[z\,y\,x]$ と定義するとき，$\mathfrak{q}\ni t_i=\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}$ に対しては

$$R(t_1, t_2)\begin{pmatrix}x_3\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R(x_1, y_2)x_3-x_1y_2^*(x_3)+2y_1x_2^*(x_3)\\ R(y_1, y_2)x_3+y_1y_2^*(x_3)\end{pmatrix}$$

$$R(t_1, t_2)\begin{pmatrix}0\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-R(x_1, x_2)y_3-x_1x_2^*(y_3)\\ -R(y_1, x_2)y_3+y_1x_2^*(y_3)-2x_1y_2^*(y_3)\end{pmatrix}$$

従って，

$$tr\, R(t_1, t_2)=tr\{R(x_1, y_2)-R(y_1, x_2)\}-3\langle x_1, y_2\rangle+3\langle y_1, x_2\rangle$$

よって，LTS $\mathfrak{q}$ の Killing 形式 $\alpha$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\alpha(t_1, t_2):&=\frac{1}{2}tr\{R(t_1, t_2)+R(t_2, t_1)\}\\ &=\frac{1}{2}tr\{R(x_1, y_2)-R(y_1, x_2)+R(x_2, y_1)-R(y_2, x_1)\}\\ &\qquad-3\langle x_1, y_2\rangle+3\langle y_1, x_2\rangle\end{aligned}$$

$\dim\mathfrak{k}=n$ とすれば，(S2) より

$tr\{R(x, y)-R(y, x)\}=2(n+1)\langle y, x\rangle$ となるので，

$$\alpha(t_1, t_2) = (n+4)\{\langle y_2, x_1\rangle + \langle y_1, x_2\rangle\}.$$

いま，$\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ が半単純と仮定すれば，$\mathfrak{g}(\mathfrak{k})$ の Killing 形式は非退化で，その時 $\alpha$ が非退化になることが知られている。従って，上の関係式から，$\langle\ ,\ \rangle$ が非退化になり，定理1より $\mathfrak{k}$ は単純であることがわかる。

さて次に，標数0の代数的閉体上の階数が2以上の単純リー環がすべてこの方法で得られることを示す。

$\mathfrak{g}$ を複素半単純リー環，$\mathfrak{h}$ を1つのカルタン部分環とする。$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する root 系を $\Delta$，定められた順序に関する最高 root を $\rho$，正の root 全体の集合を $\Delta^+$ とする。

$\{H_i, E_\alpha \mid H_i \in \mathfrak{h},\ 0 \neq \alpha \in \Delta\}$ を Chevalley の標準基底とし $H := [E_\rho, E_{-\rho}]$ とおく。$ad(H)$ の固有値 $i$ に属する固有空間を $\mathfrak{g}_i$ とすれば

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

$$\mathfrak{g}_{-2} = \mathfrak{g}_{-\rho}\ ,\quad \mathfrak{g}_{-1} = \sum_{\alpha\in\Delta_1} \mathfrak{g}_{-\alpha}\ ,\quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta_2}(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha})$$

$$\mathfrak{g}_1 = \sum_{\alpha\in\Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha\ ,\quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_\rho$$

たゞし，$\Delta_1 := \{\alpha\in\Delta^+ \mid \rho-\alpha\in\Delta\ ,\ \rho\neq\alpha\}$，$\Delta_2 := \{\alpha\in\Delta^+ \mid \rho-\alpha\notin\Delta\}$

となる。

$\mathfrak{g}_1$ の任意の要素 $X, Y, Z$ に対して

(3) $$[XYZ] := \frac{1}{2}\Big([Z, [Y, [X, E_{-\rho}]]] + [Z, [X, [Y, E_{-\rho}]]]\Big)$$

と定義する。$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ だから $[XYZ] \in \mathfrak{g}_1$. 更に，$\mathfrak{g}_1$ 上の交代双線形形式 $<\ ,\ >$ を

$$[X, Y] = 2<X, Y> E_\rho$$

によって定義する。このとき，$\mathfrak{g}_1$ が STS になることを示す。

(S1) が成立つことは定義式(3)から明らかである。

$[X, [Y, E_{-\rho}]] = 2<X, Y> H + [Y, [X, E_{-\rho}]]$ であるから

(4) $$[XYZ] = [Z, [Y, [X, E_{-\rho}]]] - <X, Y> Z.$$

$[E_\rho, X] = 0$ であるから $[E_\rho, [X, E_{-\rho}]] = -X$. 従って.

$$[XYZ] - [XZY] = 2<Z, Y>[E_\rho, [X, E_{-\rho}]] - <X, Y>Z + <X, Z>Y$$
$$= 2<Y, Z>X - <Z, X>Y - <X, Y>Z$$

よって (S2) も成立つ。(S3) は次のようにも書ける.

$$[L(X,Y), L(U,V)] = L(L(X,Y)U, V) + L(U, L(X,Y)V)$$

従って，(S3) が成立つことを確かめる為には，次式を示せばよい。$[L(X,X), L(Y,Y)] = 2L(L(X,X)Y, Y)$.

(4) を変形することにより

$$L(X,Y) = -\mathrm{ad}\,Y \circ \mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,E_{-\rho} - 2XY^* - 2YX^* - <X, Y> I$$

（I は恒等写像）と書ける。

$$[W, [XYZ]] - [Z, [XYW]] = 2<W, Z>[E_\rho, [Y, [X, E_{-\rho}]]] - 2<X, Y>[W, Z]$$
$$= 4<W, Z><X, Y>E_\rho - 4<X, Y><W, Z>E_\rho$$
$$= 0$$

故に，$<W, L(X,Y)Z> = <Z, L(X,Y)W>$. 即ち $L(X,Y)^* = -L(X,Y)$.

従って， $Y(L(X,X)Y)^* = YY^* \circ L(X,X)^* = -YY^* \circ L(X,X)$ ……①

いま簡単のために， $\tilde{X} := [X,[X,E_{-\rho}]]$ とおく。 (4) より

$L(X,X) = -ad(\tilde{X})|_{\mathfrak{g}_1}$ であるから，

$$ad(L(X,X)Y) = [adY, ad\tilde{X}] \quad \cdots\cdots ②$$

また， $[[X,E_{-\rho}],E_{-\rho}] = 0$ であるから $[\tilde{X},E_{-\rho}] = 0$ .

$$\therefore \quad ad\tilde{X} \circ adE_{-\rho} = adE_{-\rho} \circ ad\tilde{X} \quad \cdots\cdots ③$$

①～③を用いて

$[L(X,X),L(Y,Y)] - \{L(L(X,X)Y,Y) + L(Y,L(X,X)Y)\}$

$= [L(X,X), -(adY)^2 \circ adE_{-\rho} - 4YY^*] + adY \circ ad(L(X,X)Y) \circ adE_{-\rho}$

$\quad + ad(L(X,X)Y) \circ adY \circ adE_{-\rho} + 4(L(X,X)Y)Y^* + 4Y(L(X,X)Y)^*$

$= ad\tilde{X} \circ (adY)^2 \circ adE_{-\rho} - (adY)^2 \circ adE_{-\rho} \circ ad\tilde{X} + adY \circ [adY, ad\tilde{X}] \circ adE_{-\rho}$

$\quad + [adY, ad\tilde{X}] \circ adY \circ adE_{-\rho} = 0$

よって (S3) も成立ち， $\mathfrak{g}_1$ は STS であることがわかる。

次に，STS $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}_1$ の standard enveloping Lie algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ を考える。 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ は $[XYZ] := [[X,Y],Z]$ に関して LTS で，

$$\varphi : \mathfrak{k} \oplus \bar{\mathfrak{k}} \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto X + [E_{-\rho}, Y]$$

は LTS の同型写像になっている。証明には

$$[[E_{-\rho},X],[E_{-\rho},Y]] = -2\langle X,Y\rangle E_{-\rho} \qquad (X,Y \in \mathfrak{g}_1)$$

を用いればよい。この $\varphi$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像 $\tilde{\varphi}$ に次式によって拡張する。

$$\tilde{\varphi}(\overline{L(X,Y)}) = -\frac{1}{2}(adX\,adY + adY\,adX)E_{-\rho}$$

$$\tilde{\varphi}(U) := H \quad , \quad \tilde{\varphi}(V) := E_\rho \quad , \quad \tilde{\varphi}(W) := E_{-\rho} .$$

このとき，$\tilde{\varphi}$が$\tilde{\mathfrak{g}}$から$\mathfrak{g}$の中への同型写像になっていることを確めよう。

$$\left[\tilde{\varphi}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}, \tilde{\varphi}\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}\right] = [X_1 + [E_{-\rho}, Y_1], X_2 + [E_{-\rho}, Y_2]]$$

$$= 2\langle X_1, X_2\rangle E_\rho - 2\langle Y_1, Y_2\rangle E_{-\rho} + [[E_{-\rho}, Y_1], X_2] - [[E_{-\rho}, Y_2], X_1]$$

他方 $\hat{\varphi}(\overline{L(X,Y)}) = -[[E_{-\rho}, Y], X] + \langle X, Y\rangle H$ であるから

$$\tilde{\varphi}\left[\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}\right] = \hat{\varphi}\left(L\left(\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= -[[E_{-\rho}, Y_2], X_1] + [[E_{-\rho}, Y_1], X_2] + 2\langle X_1, X_2\rangle E_\rho - 2\langle Y_1, Y_2\rangle E_{-\rho}$$

故に，$\tilde{\varphi}([t_1, t_2]) = [\hat{\varphi}(t_1), \hat{\varphi}(t_2)] \quad (t_i \in \mathfrak{T})$ …… ④

こゝで，$[\tilde{\varphi}(\overline{L(X,Y)}), Z] = [XYZ]$，

$[\tilde{\varphi}(\overline{L(X,Y)}), E_{-\rho}] = [\tilde{\varphi}(\overline{L(X,Y)}), E_\rho] = 0$

が成立つことを注意しておく。

$$\left[\tilde{\varphi}(\overline{L(X_1,Y_1)} + \alpha U + \beta V + \gamma W), \tilde{\varphi}\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}\right]$$

$$= [\hat{\varphi}(\overline{L(X_1,Y_1)}), X_2 + [E_{-\rho}, Y_2]] + [\alpha H + \beta E_\rho + \gamma E_{-\rho}, X_2 + [E_{-\rho}, Y_2]]$$

$$= [X_1Y_1X_2] + [E_{-\rho}, [X_1Y_1Y_2]] + \alpha(X_2 - [E_{-\rho}, Y_2]) + \beta Y_2 + \gamma[E_{-\rho}, X_2]$$

他方，$\left[\overline{L(X_1,Y_1)} + \alpha U + \beta V + \gamma W, \begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}[X_1Y_1X_2] + \alpha X_2 + \beta Y_2\\ [X_1Y_2Y_2] - \alpha Y_2 + \gamma X_2\end{pmatrix}$ であるから，結局次式が成立つ。

$$\tilde{\varphi}([L(t_1,t_2), t_3]) = [\tilde{\varphi}(L(t_1,t_2)), \hat{\varphi}(t_3)] \quad (t_i \in \mathfrak{T}) \cdots ⑤$$

また，$\hat{\varphi}(\{t_1t_2t_3\}) = [\hat{\varphi}(t_1)\hat{\varphi}(t_2)\hat{\varphi}(t_3)]$ と ④式から，

$$\hat{\varphi}\circ L(t_1,t_2)t_3 = [[\hat{\varphi}(t_1), \hat{\varphi}(t_2)], \hat{\varphi}(t_3)], \qquad \tilde{\varphi}(L(t_1,t_2)) = [\hat{\varphi}(t_1), \hat{\varphi}(t_2)]$$

これを用いて

$$\hat{\varphi}([L(t_1,t_2),\ L(t_3,t_4)]) = [\hat{\varphi}(L(t_1,t_2)),\ \hat{\varphi}(L(t_3,t_4))] \quad \cdots\cdots ⑥$$

を得る。④～⑥によって $\hat{\varphi}$ が準同型写像であることがわかった。次に、$\hat{\varphi}$ が単射であることを確かめる。

$\hat{\varphi}(X+\bar{Y}+\sum\overline{L(X_i,Y_i)}+\alpha U+\beta V+\gamma W)=0$ とする。$\hat{\varphi}(\mathfrak{k})=\mathfrak{g}_1$, $\hat{\varphi}(\bar{\mathfrak{k}})=\mathfrak{g}_{-1}$, $\hat{\varphi}(V)\in\mathfrak{g}_2$, $\hat{\varphi}(W)\in\mathfrak{g}_{-2}$, $\hat{\varphi}(\sum\overline{L(X_i,Y_i)}+\alpha U)\in\mathfrak{g}_0$ だから $X=Y=0$, $\beta=\gamma=0$.

$$0=[\hat{\varphi}(\sum\overline{L(X_i,Y_i)}+\alpha U),\ E_\rho]=2\alpha E_\rho \qquad \therefore\ \alpha=0.$$

$\mathfrak{g}_1\ni{}^\forall Z$ に対し、

$$0=[\hat{\varphi}(\sum\overline{L(X_i,Y_i)}),\ Z]=\sum[X_iY_iZ] \qquad \therefore\ \sum L(X_i,Y_i)=0$$

故に $\mathrm{Ker}\,\hat{\varphi}=\{0\}$. 以上により、$\hat{\varphi}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ から $\mathfrak{g}$ の中への同型写像である。更に、$\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになっている。実際、$\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})=\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}}_0)\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ (たゞし $\hat{\mathfrak{g}}_0$ は $\overline{L(\mathfrak{k},\mathfrak{k})}$ と $U$ を含む部分空間) であるから、${}^\forall i\neq 0$ に対しては

$[\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}}),\ \mathfrak{g}_i]\subset[\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}}),\ \hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})]\subset\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})$ が成立つ。従って $\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})\lhd\mathfrak{g}$ を示すには、$[\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}}_0),\ \mathfrak{g}_0]\subset\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})$ を示せばよい。

$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta_2}(\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha})$ だから、$\mathfrak{h}\ni{}^\forall H_0$ に対しては

$$[\hat{\varphi}(\overline{L(X,Y)}),\ H_0]=\frac{1}{2}\mathrm{ad}H_0(\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y+\mathrm{ad}Y\,\mathrm{ad}X)E_{-\rho}$$
$$=-\hat{\varphi}(\overline{L([H_0,X],Y)})-\hat{\varphi}(\overline{L(X,[H_0,Y])})+\rho(H_0)\hat{\varphi}(\overline{L(X,Y)})\in\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}}).$$

$\mathfrak{g}_\alpha\ni{}^\forall X_\alpha$ $(\alpha\in\Delta_2\cup(-\Delta_2))$ に対しては $[E_{-\rho},E_\alpha]=0$ だから

$$[\hat{\varphi}(\overline{L(X,Y)}),\ X_\alpha]=\hat{\varphi}(\overline{L([X,X_\alpha],Y)})+\hat{\varphi}(\overline{L(X,[Y,X_\alpha])})\in\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}}).$$

よって $[\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}}_0),\ \mathfrak{g}_0]\subset\hat{\varphi}(\hat{\mathfrak{g}})$ が成立つ。

以上によって次の定理が証明された。

定理5　標数0の代数的閉体上の階数2以上の単純リー環はすべてSTSの standard enveloping Lie algebra として得られる。

また定理5の証明から，単純STS $\mathfrak{K}$ の standard enveloping Lie algebra $\mathfrak{g}(\mathfrak{K})$ の拡張されたDynkin図形において，$-\delta$ に対応する点とそれに結ばれた点を除いて得られる図形が，リー環 $\mathfrak{der}(\mathfrak{K})$ の Dynkin 図形であることがわかる。ただし $\mathfrak{g}(\mathfrak{K})$ が $A_n$ 型の場合には，$\mathfrak{der}(\mathfrak{K})$ は1次元の中心 $\mathfrak{z}$ をもち，$\mathfrak{der}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{z} \oplus A_{n-2}$ となる。それ以外の場合には，$\mathfrak{der}(\mathfrak{K})$ は半単純である。

$\mathfrak{A}$ を体 $K$ 上の composion algebra とし，$H_3(\mathfrak{A})$ で $\mathfrak{A}$ に成分をもつ3次エルミート行列全体を表わす。$H_3(\mathfrak{A})$ は $X \circ Y := \frac{1}{2}(XY + YX)$ に関してジョルダン代数になる。

$$(X, Y) := tr(X \circ Y)$$

$$X \times Y := X \circ Y - \frac{1}{2}\{tr(X)Y + tr(Y)X - tr(X)tr(Y)I + (X, Y)I\}$$

と定義する。

$$\mathfrak{K} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & X \\ Y & \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in K,\ X, Y \in H_3(\mathfrak{A}) \right\}$$

$\hat{\mathfrak{k}}$に三項積を次のように定義する。

$$x_i := \begin{pmatrix} \alpha_i & X_i \\ Y_i & \beta_i \end{pmatrix} \qquad [x_1\, x_2\, x_3] := \begin{pmatrix} \alpha & X \\ Y & \beta \end{pmatrix}$$

ただし，

$$\alpha := -(Y_1 \times Y_2, Y_3) + \frac{1}{2}\alpha_1 (X_2, Y_3) + \frac{1}{2}\alpha_2 (X_1, Y_3) + \frac{1}{4}\alpha_3 \{(X_2, Y_1) + (X_1, Y_2)\}$$
$$\qquad - \frac{3}{4}\alpha_1 \beta_2 \alpha_3 - \frac{3}{4}\beta_1 \alpha_2 \alpha_3$$

$$X := \sum_{cyclic} \{2(X_i \times X_j) \times Y_k - \beta_i Y_j \times Y_k\} - \frac{1}{2}\{(X_3, Y_2) - \alpha_2 \beta_3\} X_1$$
$$\qquad - \frac{1}{2}\{(X_3, Y_1) - \alpha_1 \beta_3\} X_2 - \frac{1}{4}\{(X_1, Y_2) + (X_2, Y_1) - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2\} X_3$$

$\beta :=$ ( $\alpha$ で $X_i$ と $Y_i$, $\alpha_i$ と $\beta_i$ をそれぞれ交換し符号を変えたもの)

$Y :=$ ( $X$ で上と同じ操作を行ったもの)

このとき，$\hat{\mathfrak{k}}$ は STS になる。(本講究録の山口先生の項参照，3頁と14頁)．従って，これの standard enveloping Lie algebra が考えられる。$\mathfrak{A}$ として，K自身，Kの2次拡大，一般四元数体，一般ケーリー環をとることにより，それぞれ $F_4$, $E_6$, $E_7$, $E_8$ 型のリー環が得られる。