

単純な Heegaard 分解について

神戸大 教養部 柳川高明

V, W を solid torus, M を可符号 3次元多様体とし,
 $M = V \cup W, V \cap W = \partial V = \partial W$ である Heegaard
 分解 $\{V, W, M\}$ を考える。 V, W 各々の標準的 meridian
 系 $(v_1, v_2, \dots, v_n), (w_1, w_2, \dots, w_n)$
 (図1参照) についての条件 (s) を次のように定める。

(s) 各 $i (1 \leq i \leq n)$ に対し, $v_i \cap w_j$ が w_j
 $(1 \leq j \leq n)$ は高々 3個であり, それら 3個は互に異なっ
 ている。

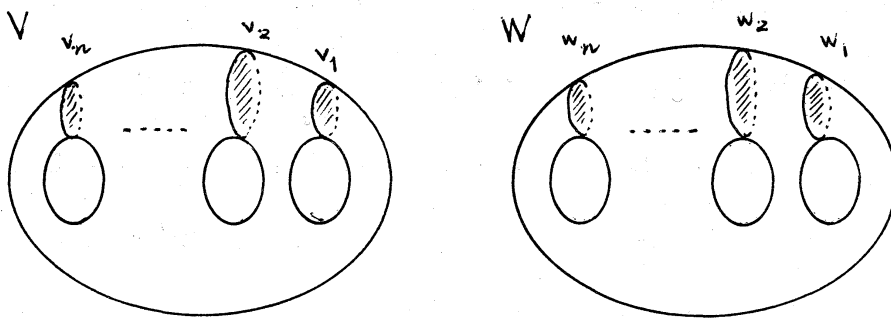


図 1

命題 任意の可符号円3次元多様体 M に対して、単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が存在する。

上の命題は、 M の任意の Heegaard 分解を Waldhausen の方法によって genus を増してやることにより容易に証明しうる、(WALDHAUSEN 参照)。

W の標準的な longitude 系 (x_1, x_2, \dots, x_n) を図2のように定める。各 x_j 上の1点と ∂W 上の定点 p とを結ぶ

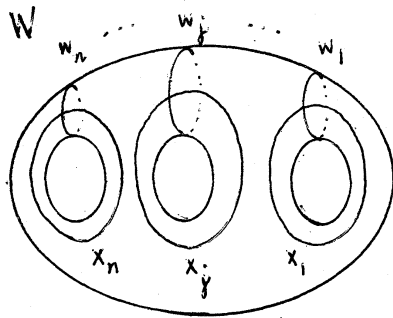


図2

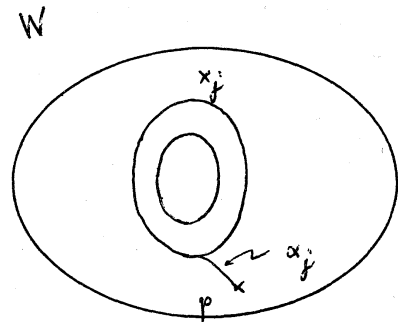


図2'

弧 α_j に適当に方向を与えたものを、同じく x_j で表すことになると、 $\pi_1(W)$ は (x_1, x_2, \dots, x_n) を生成元とする free group (rank n) であり、閉曲線 ∂V_i の表す $\pi_1(W)$ の元 (v_i) はこれら x_1, x_2, \dots, x_n で表される。このとき、 $|(v_i)|$ を $(v_i) \in x_1, x_2, \dots, x_n$ で表した場合の x_i の個数とする。例えば $(v_i) = x_1 x_2^{-1} x_3$ のとき、

$|(v_i)| = 3$ である。このとき、次の命題は明らかである。

命題 M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ では、
 各 i ($1 \leq i \leq n$) について、 $|(v_i)| \leq 3$ であるとしてよい。
 さらに、 (v_i) は $\pi_1(W)$ の元として $(v_i) = x_j^{\lambda} x_k^{\mu} x_l^{\nu}$
 ($j \neq k \neq l \neq j$, λ, μ, ν は $1, 0, -1$) である。

補題 1 M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が
 $|(v_i)| = 1$ なる v_i ($1 \leq i \leq n$) をもっているならば、
 M の単純な Heegaard 分解 $\{V', W', M\}$ で V' の
 genus $< V$ の genus であるものを作ることができる。

証明 $|(v_1)| = 1$ としておく。 $(v_1) = x_1$ と仮定してよい。
 W を w_1, w_2, \dots, w_n で切り開いてできる球 B の表面には、
 $2n$ 個の円板 $w_1', w_1'', w_2', w_2'', \dots, w_n', w_n''$ がある。このとき、
 ∂v_1 は B の表面上で w_1' と w_1'' を $w_2', w_2'' \dots w_n', w_n''$ と交わらずに結ぶ弧となつてゐるから、 B から B への
 homeomorphism で w_1'' を動かして、 ∂v_1 を標準的な位置
 (図 3 参照) に移すことができる。このとき、他の ∂v_i
 ($i \neq 1$) と $w_1', w_1'', w_2', w_2'', \dots, w_n', w_n''$ の交点 (実は、
 ∂v_i をなす有限個の弧の端点) の位置は最終的には変化しな

ii.

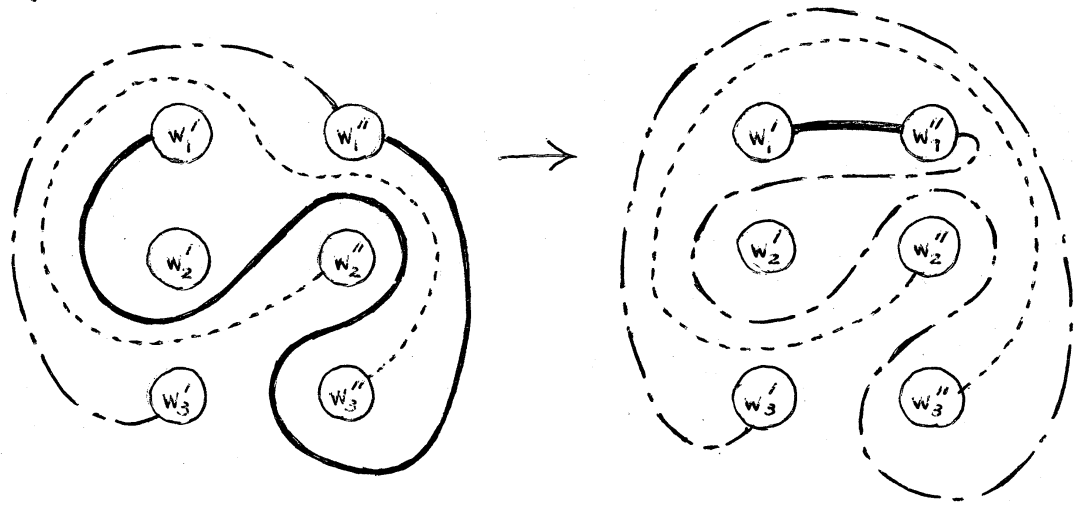
— αV_1 の弧- - - - - 他の αV_i の弧 (または, その一部)

図 3.

先に切り開いた所を貼り合せて W に戻すと, 元の $\alpha V_1, \alpha V_2, \dots, \alpha V_n$ は W の表面上の閉曲線の系 u_1, u_2, \dots, u_n , (u_i が αV_i の移されたもの) に移ったことになる.

各 u_i と w_j との交点 は $u_i \cap w_j = v_i \cap w_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) であり, u_1 は X_1 と重なっていると考えれば, $N(v_1, V)$ と W に貼ることにより, 新しい Heegaard 分解 $\{V', W', M\}$ と $V' = \alpha\{V - N(v_1, V)\}$, $W' = W \cup N(v_1, V)$ とし得ることができ, V' の genus $< V$ の genus である.

注意 $u_i \cap w_j = v_i \cap w_j$ に注目すると $\pi_1(W)$ の元として, u_i の表す元 $(u_i) = (v_i)$ であり, $\pi_1(W')$ の元として, u_i

V' の meridian 系 (v_2, v_3, \dots, v_n) は $(v_i) = x_j^\lambda x_k^\mu x_l^\nu$
 ($j \neq k \neq l \neq j$, λ, μ, ν は $0, 1, -1$ であり x_1 は 1 と考える) の
 形で表される。

補題 2 M の単純な Heegaard 分解 $\{V, W, M\}$ が条件
 (a), (b), (c) を満たしているならば, M の単純な Heeg-
 -aard 分解 $\{V', W', M\}$ が条件 (d) を満たすものを作る
 ことができる。

$$(a) \quad n = g(V) = 3 \quad (b) \quad |(v_1)| = |(v_2)| = 2$$

(c) $(v_1), (v_2)$ に共通な元は唯一つ (それを x_1 とする),

(d) 閉曲線 v_1, v_2 は標準的な位置にある (図 4 参照)

証明は 先の補題 1 と同様な手順でできる。例えば, (v_1)
 $= x_1 x_2$ $(v_2) = x_2 x_3^{-1}$ の場合, W を w_1, w_2, w_3 で切り開い
 B を作り, まず v_1 を標準的な位置に動かす。その結果
 v_2 は新しく v_2' に動いてしまおうが $v_1 \cap v_2 = \emptyset$ であり
 条件 (c) が満たされているから, 標準的な位置に動かされてあ
 る v_1 を固定したまま v_2' を標準的な位置に動かすことができる。
 一般に $n > 3$ の場合であっても, 条件 (c) をもう少し
 し精密に述べれば, v_1, v_2, \dots, v_m ($m < n$) が同時に標準的な
 位置にあるような単純な Heegaard 分解を作りうる。

←

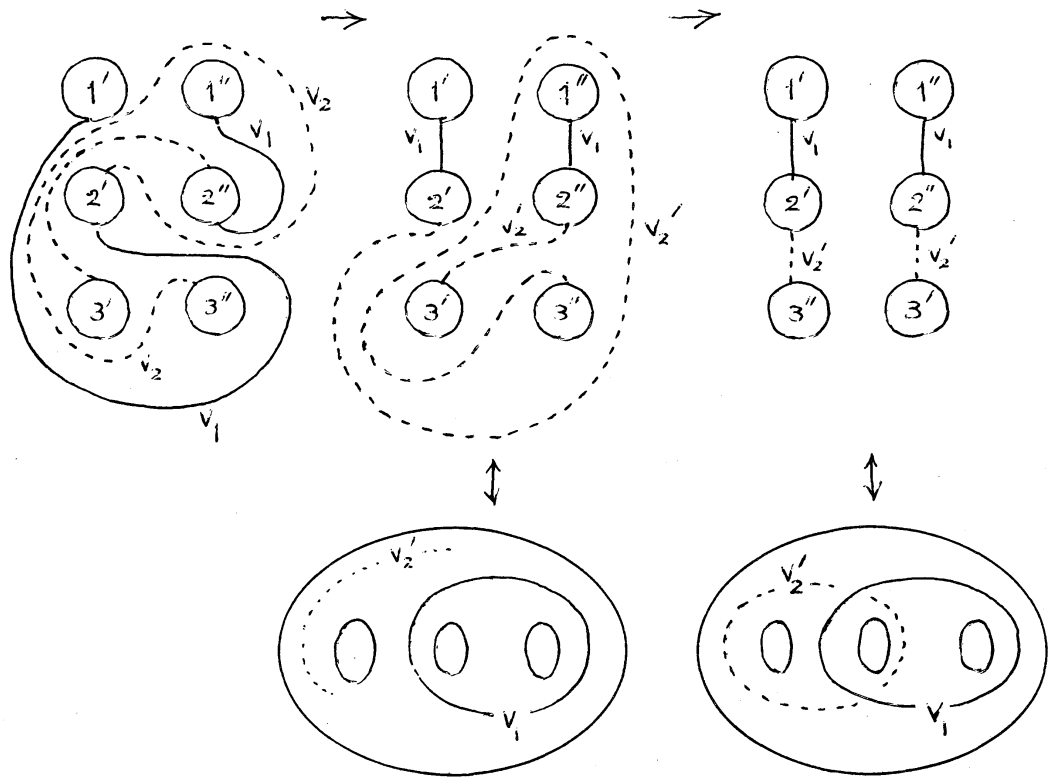


図 4

補題3 $\pi_1(M) = 1$ の多様体 M が genus 2 の単純な Heegaard 分解をもつば $M = S^3$ である。

$\pi_1(M) = (x_1, x_2 \mid (v_1) = 1, (v_2) = 1)$ であり, $(v_1), (v_2)$ は $x_1 x_2, x_1 x_2^{-1}, x_1, x_2$ のどれかであり, $\pi_1(M) = 1$ となるには, $|(v_i)| = 1$ となる v_i が存在する ことが判るから 補題 1 により, genus 1 の Heegaard 分解をもつ多様体となり, $M = S^3$ である ことが結論される。

定理 $\pi_1(M) = 1$ の多様体 M が genus 3 の単純な Heegaard 分解をもつならば, $M = S^3$ である。

証明は次の各場合 (I), (II) の (i) ~ (iii) にわけて考える。

(I) $|(\nu_i)| = 1$ である ν_i が存在する場合. この場合は補題 1 により, genus 2 の場合に戻着し, 補題 3 により $M = S^3$ である。

(II) $|(\nu_i)| > 1$ ($i = 1, 2, 3$) の場合, この場合,

$$\pi_1(M) = (X_1, X_2, X_3 \mid (\nu_1) = 1, (\nu_2) = 1, (\nu_3) = 1)$$

であり, $(\nu_1), (\nu_2), (\nu_3)$ は次の 14 個の語の中のどれかである。

$$X_1 X_2, X_1 X_2^{-1}, X_1 X_3, X_1 X_3^{-1}, X_2 X_3, X_2 X_3^{-1},$$

$$X_1 X_2 X_3, X_1 X_2 X_3^{-1}, X_1 X_2^{-1} X_3, X_1 X_2^{-1} X_3^{-1}, X_1 X_3 X_2, X_1 X_3 X_2^{-1}$$

$$X_1 X_3^{-1} X_2, X_1 X_3^{-1} X_2^{-1} \quad (\text{以上 14 個})$$

(i) $|(\nu_i)| = 3$ ($i = 1, 2, 3$) の場合, $\pi_1(M) = 1$ とはなりえない。

(ii) $|(\nu_i)| = 3$, ($i = 1, 2$), $|(\nu_3)| = 2$ の場合, も同じく $\pi_1(M) = 1$ とはなりえない。

(iii) $|(\nu_1)| = 3$, $|(\nu_i)| = 2$ ($i = 2, 3$) の場合, $\pi_1(M) = 1$ となる場合は ν_2, ν_3 にはそれぞれ補題 2 を適用するとおぼろげに, $V' = \mathcal{C}(V - N(\nu_2 V) \cup N(\nu_3 V))$, $W' = W \cup N(\nu_2 V) \cup N(\nu_3 V)$ とし, genus 1 の Heegaard 分解

$\{V', W', M\}$ が与えられる, 且の結果 $M = S^3$ である。

(iv) $|(\nu_i)| = 2$ ($i = 1, 2, 3$) の場合, $\pi_1(M) = 1$ とはな
りえない。以上。

一般に, genus が高 n の場合でも 単純な Heegaard 分解
 $\{V, W, M\}$ が $|(\nu_i)| \leq 2$ ($i = 1, 2, \dots, n, n = g(V)$) を
満たしている場合は, $\pi_1(M) = 1$ ならば $M = S^3$ であ
る。と次のようにして判る。すなわち, $|(\nu_i)| = 1$ ($i =$
 $1, 2, \dots, n$) ならば $X_{j_i} \rightarrow (1, 2)$ ($j_i = 1, 2, \dots, n$) に
よって $\pi_1(M) \rightarrow S_2$ が onto-map となる $\pi_1(M) \neq 1$
であるから, 少なくとも一つ $|(\nu_i)| = 1$ となる ν_i が存在
し, 補題 1 を用いて, 逐次 Heegaard 分解の genus を下げ
て行くことができる。

WALDHAUSEN, F.: Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre,

Topology 7 (1968), 195-203