

## いくつかの単純な絡み輪の分岐被覆空間

神戸大 理      鈴木 晋一  
                         細川 藤次

3次元球面  $S^3$  の、結び輪 (knots) や 絡み輪 (links) 上で分岐する分岐被覆空間 (branched covering spaces) は、3次元多様体論との関係等もあって、極めて重要であり、また興味深い研究対象である。しかしながら、これまで巡回分岐被覆空間 (cyclic branched coverings — 定義は後に与える) 以外のものはほとんど取扱われていない。近年やっと結び輪について dihedral coverings 等が研究されているが、絡み輪については具体的な例すらもほとんど知られていない。本稿は、2つの成分のごく基本的な絡み輪について、その分岐被覆空間の例もできるだけ見易い形で提供する：ことを目的とする。

この機会に、結び輪や絡み輪の分岐被覆空間の背景を簡単にまとめておいた。最後にこの分野の文献表を付してある。ほとんど遺漏はないと思うが、補足していただければ幸いである。(Riemann面に関するものは、含んでいない。)

## § 1. Terminology, Preliminary, etc.

1.1. Fox [16]:  $M, N$  を連結で局所連結な Hausdorff 空間とし、  
 $\pi: M \rightarrow N$  を全射連続写像とする。

$B_\pi = \{x \in M \mid x \text{ において } \pi \text{ が局所同相写像ではない}\}$   
 とおくと、 $B_\pi$  は  $M$  の閉部分集合である。

$\pi(B_\pi) = B \subset N$ ,  $\pi^{-1}(B) = \tilde{B} \subset M$   
 とおく。明らかに:  $B_\pi \subset \tilde{B}$  が成立つ。

$\pi: M \rightarrow N$  が、分岐集合  $B$  (downstair) と  $\tilde{B}$  (upstair) を持つ 分岐被覆 であるとは、次の 2 条件を満たすときをいう:

(i)  $N$  の開集合の原像の成分が、 $M$  の位相の基である。

(ii)  $\pi|_{M-\tilde{B}}: M-\tilde{B} \rightarrow N-B$  が被覆空間である。

このとき、対  $(M, \pi)$  を、 $B$  上で分岐する  $N$  の 分岐被覆空間 ともいう。また (ii) を 随伴する非分岐被覆空間 とよぶ。

随伴する非分岐被覆  $\pi|_{M-\tilde{B}}: M-\tilde{B} \rightarrow N-B$  が  $n$  重被覆のとき、 $\pi: M \rightarrow N$  を  $n$  重分岐被覆; 正則  $\alpha$  のとき 正則 (regular) とよぶ。点  $x \in \tilde{B}$  が 分岐指数  $d$  を持つとは、 $x$  の近くで  $\pi$  が  $d$  対 1 の写像となっている場合をいう。この数は  $\tilde{B}$  の連結成分上で一一定の値をとる。

1.2. Fox [16]: 連結で局所連結な Hausdorff 空間  $N$  と、いたるところ稠密でない閉部分集合  $B$  に対し、 $B$  上で分岐する  $N$  の有限分岐被覆空間  $(M, \pi)$  は、 $N-B$  の有限被覆空間によつ

て一意的に定まる。◀

この命題において、“有限”性は本質的である。最初に述べたように、 $\pi$  では  $N$  を 3次元球面  $S^3$  とし、 $B$  として 2成分絡み輪  $L = k_1 \cup k_2$  とし、 $L$  上で分岐する  $S^3$  の有限分岐被覆空間  $(M, \pi)$  を考察したい。少し背景を述べることにする。

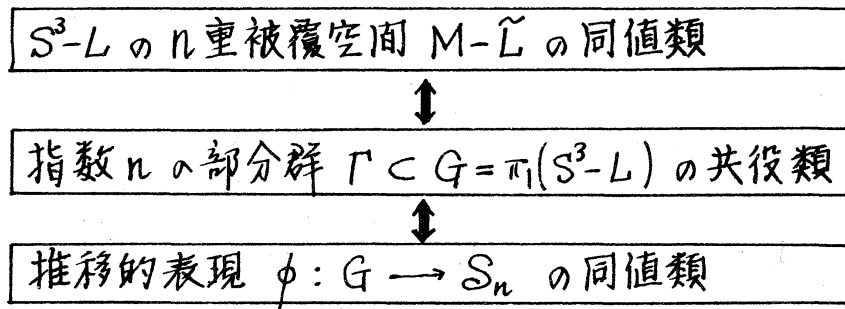
1.3. Fox [16]:  $N$  を有限単体的複体,  $B$  を  $N$  の部分複体とする。  $B$  と  $\tilde{B}$  を分岐集合とする  $N$  の分岐被覆  $\pi: M \rightarrow N$  において、もし  $\tilde{B}$  の各点で有限の分岐指数を持つならば、 $M$  も単体的複体で、 $\tilde{B}$  はその部分複体となる。◀

1.4. Fox [16]:  $N$  をコンパクトな PL  $n$ -多様体,  $B$  を  $N$  の局所平坦な  $(n-2)$ -部分多様体とする。  $B$  と  $\tilde{B}$  を分岐集合とする分岐被覆  $\pi: M \rightarrow N$  において、もし  $\tilde{B}$  の各点で有限の分岐指数を持つならば、 $M$  も PL 多様体で、 $\tilde{B}$  は局所平坦な  $(n-2)$ -部分多様体である。◀

1.5. Church-Hemmingsen [13]:  $M, N$  をコンパクトな PL  $n$ -多様体とし、 $\pi: M \rightarrow N$  を位数 (degree) 有限の全射開写像とする。もし  $B = \pi(B_\pi) \subset N$  が局所的に順 (tame) な有限部分複体ならば、 $B_\pi, \tilde{B}, B$  はいずれもその各点で  $n-2$ 次元である。◀

この辺の背景に興味のある方は、Fox [16], Church-Hemmingsen [12, 13], Hopf [38] 等を参照されたい。

この結果, 順な絡み輪  $L$  が与えられたとき,  $L$  上で分岐する  $S^3$  の有限分岐被覆空間  $(M, \pi)$  において,  $M$  はコンパクトな 3次元多様体であり, upstairs の分岐集合  $\tilde{L}$  は有限個の単純閉曲線となる. また  $\pi$  は単体的写像であるとしてよい. 以後 (分岐) 被覆空間は連結であるとする. 1.2 で述べたように,  $(M, \pi)$  を調べるには  $S^3-L$  の有限被覆空間を調べればよい. 被覆空間の一般論から次が知られる:



ここで  $S_n$  は  $n$  次対称群を示す.  $S^3-L$  の被覆空間が与えられたとき, 上の対応を簡単に述べると次のようになる:

- ①  $L$  に方向を与えて, 普通に  $G = \pi_1(S^3-L)$  の有限表示を作る.
- ② 1点  $* \in S^3-L$  を選び,  $n$  個の点  $\pi^{-1}(*)$  に  $1, 2, 3, \dots, n$  と符号を付ける.
- ③  $\alpha \in G$  に対し,  $\sigma_\alpha \in S_n$  を次のように対応させる:  
 $\alpha$  のリフトを 1 から出発するものの終点を  $h_1$   
                   "          2                  "                   $h_2$

$\alpha$  のリフト  $i_n$  から出発する  $\alpha$  の終点を  $i_n$  とするとき、 $\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ . この対応  $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$  により表現  $\phi: G \rightarrow S_n$  を得る.

④ 部分群  $\Gamma \subset G$  として、 $\Gamma_1 = \{\alpha \in G \mid \sigma_\alpha(1) = 1\}$  をとればよい. この  $\Gamma_1$  は必ずしも正規部分群ではない.  $\Gamma_i = \{\alpha \in G \mid \sigma_\alpha(i) = i\}$  とおけば、 $\Gamma_i$  と  $\Gamma_j$  は共役で、

$$\ker \phi = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_i$$

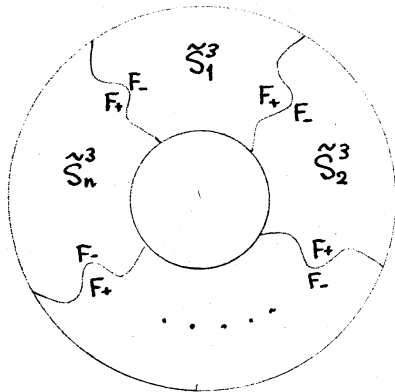
であることはよく知られる.

Seifert-Threlfall [70, pp. 201-203] や Rolfsen [64, 10F5~6] でいうように、 $G$  の有限表示から推移的表現  $\phi: G \rightarrow S_n$  を全て求める Algorithm が存在するが、なかなか容易でない.

1.6. 巡回分岐被覆空間は次の表現に対応する.  $L$  を  $\mu$  成分の絡み輪とし、 $Z_n$  を巡回置換  $\tau = (1 2 \cdots n)$  によって生成される位数  $n$  の巡回群とする.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(S^3 - L) & & H_1(S^3 - L) & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ G & \xrightarrow{\sigma} & Z \oplus \cdots \oplus Z & \xrightarrow{\gamma} & Z_n \subset S_n \\ \text{Hurewicz} & & \downarrow \tau_i & & \downarrow \tau \\ & & & & \gamma(\tau_i) = \tau \end{array}$$

ここで  $\phi: G \rightarrow S_n$  を合成  $\gamma \circ \sigma$  とすればよい. この表現に対応する分岐被覆空間  $M$  は、よく知られるように次の方法で構成することが出来る:  $L$  に連結な有向 2 次元多様体 (Seifert 曲面)  $F$  を張り、 $F$  で  $S^3$  を切り開く:  $\tilde{S}^3$  とおく.



$\partial \tilde{S}^3$  は  $F$  と同相な 2 つの曲面  $F_+$  と  $F_-$  の和である。  $\tilde{S}^3$  のコピーを  $n$  個  $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_2^3, \dots, \tilde{S}_n^3$  用意し、  $\tilde{S}_i^3$  の  $F_+$  と  $\tilde{S}_{i+1}^3$  の  $F_-$  を自然な同相写像で貼り合わせると  $M$  が得られる。

§2. 分岐集合の状態からの分類

絡み輪  $L$  上で分岐する  $S^3$  の有限分岐被覆空間  $(M, \pi)$  を分類しようとするとき、正則か否かというような普通の被覆空間の分類の他に、upstair の分岐集合  $\tilde{L}$  の状態からの分類が考えられる。もちろんここに挙げるのは一つの試みにすぎないが、後に挙げる具体例をながめる際の基準にもなる。

次の記法を採用する：

$$\begin{array}{c}
 M \supset \tilde{L} = \tilde{k}_1 \cup \dots \cup \tilde{k}_\mu \quad : \text{upstair 分岐集合} \\
 \begin{array}{c} n \text{重} \\ \text{分岐} \\ \text{被覆} \end{array} \quad \pi \downarrow \\
 S^3 \supset L = k_1 \cup \dots \cup k_\mu \quad : \text{downstair 分岐集合 } (\mu\text{-成分の絡み輪})
 \end{array}$$

$\tilde{k}_i = \pi^{-1}(k_i) = \bigcup_{j=1}^{m_i} \tilde{k}_{ij}$  ( $\tilde{k}_{ij}$  は連結成分,  $1 \leq m_i < n$ )

すると、各  $i, j$  について、  $\pi|_{\tilde{k}_{ij}} : \tilde{k}_{ij} \rightarrow k_i$  は円周の被覆空間である。  $c(\tilde{k}_{ij})$  によってこの被覆度数を、  $t(\tilde{k}_{ij})$  によって  $\tilde{k}_{ij}$  の点における  $\pi$  の分岐指数を表わす。 1.1 より次は容易に確かめられる。

2.1. 各  $i$  について次が成立する:

$$\sum_{j=1}^{m_i} b(\tilde{k}_{ij}) \cdot c(\tilde{k}_{ij}) = n.$$

$b(\tilde{k}_{ij}) = 1$  なる成分  $\tilde{k}_{ij}$  が存在する場合には.

$$\tilde{k}_{ij} \notin B_\pi = \{x \in M \mid x \text{ において } \pi \text{ が局所同相でない}\}$$

だから,  $\tilde{L} \neq B_\pi$  であり, 分岐被覆空間の特徴付けの一つの重要な基準となろう. Alexander [1] によって定式化され.

近年 Montesinos [50, 51, 54], Hilden [34, 35] 等によって再証明が与えられた定理: 任意の 3次元閉多様体  $M$  は, ある結び輪  $L$  上で分岐する  $S^3$  の 3重分岐被覆空間となる……に於いては.

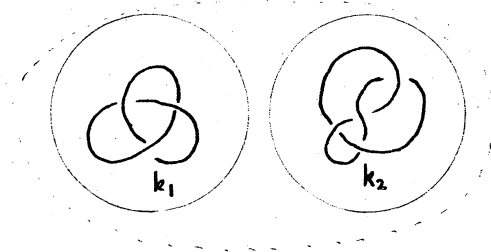
一般に  $\tilde{L} = \tilde{k}_1 \cup \tilde{k}_2$  であって  $b(\tilde{k}_1) = 2, b(\tilde{k}_2) = 1, c(\tilde{k}_1) = c(\tilde{k}_2) = 1$  となり, もちろん正則ではない.


2.2.  $c(\tilde{k}_{ij})$  と  $m_i$  を中心とした分類の試み.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{すべての } i, k \text{ について} \\ m_i = m_k \\ \text{(knots は 等しい)} \\ \text{こちら} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{すべての } i \text{ について} \\ c(\tilde{k}_{ij}) = c(\tilde{k}_{ik}) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \forall_i m_i = 1 \\ \forall_i c(\tilde{k}_{ii}) = 1 \text{ (巡回被覆)} \\ \forall_i c(\tilde{k}_{ii}) \neq 1 \end{array} \right.$
		$\left\{ \begin{array}{l} \forall_i m_i \neq 1 \\ \forall_i c(\tilde{k}_{ij}) = 1 \\ \forall_i c(\tilde{k}_{ij}) \neq 1 \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{l} \text{すべての } i \text{ について} \\ j \neq l \text{ が存在して} \\ c(\tilde{k}_{ij}) \neq c(\tilde{k}_{il}) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{この場合は} \\ m_i \neq 1 \\ \exists i, j c(\tilde{k}_{ij}) = 1 \\ \forall i, j c(\tilde{k}_{ij}) \neq 1 \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} i \text{ と } k \text{ が存在して} \\ m_i \neq m_k \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ある } i \text{ が存在して, } m_i = 1 \\ \text{すべての } i \text{ について } m_i \neq 1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{これから先は?} \\ \text{この場合は全て正則でない.} \end{array} \right.$

2.3. 演習: 分離した 2 成分の絡み輪を用いて、上の表のど

の程度が埋まるか確かめてもら  
ん。



§3. 絡み輪  $L =$   上に分岐する分岐被覆空間。

$k_1$  と  $k_2$  に絡み数 1 で絡む小さな単純閉曲線 (いわゆる経線)  $x$  と  $y$  を選べば、

$$G = \pi_1(S^3 - L) = \langle x, y \mid xy = yx \rangle.$$

これは、自明な結び輪の無限巡回群の場合を除いて、 $G$  が可換群となる唯一の例外である。具体例から始めよう。

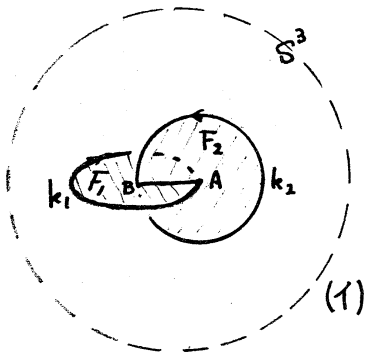
$\tau = (123456)$  を巡回置換とし、表現

$$\begin{aligned} 3.1. \quad \phi : G &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 \ltimes S_6 \\ x &\longmapsto \tau^2 = (135)(246) \\ y &\longmapsto \tau^3 = (14)(25)(36) \end{aligned}$$

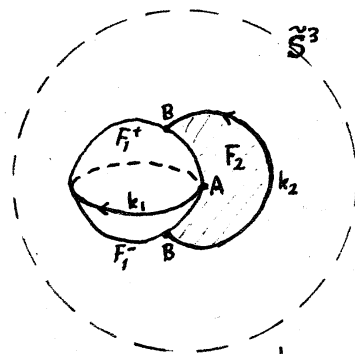
を考える。これは明らかに推移的である。この表現に対応する分岐被覆空間  $(M, \pi)$  を作るが、 $\pi$  は自明だからいちいち述べないことにする。

まず  $k_1$  と  $k_2$  に円板  $F_1$  と  $F_2$  を張る。  $k_1 \cap F_2 = A$ ,  $k_2 \cap F_1 = B$  とそれぞれ下図のように 1 点ずつで交わり、  $F_1 \cap F_2$  は  $A = B$  を結ぶ線分である。

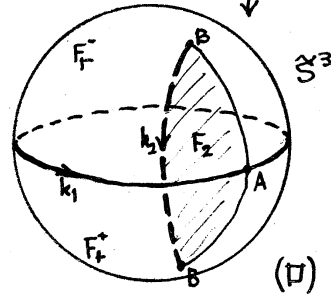




$F_1 \subset S^3$  を cut

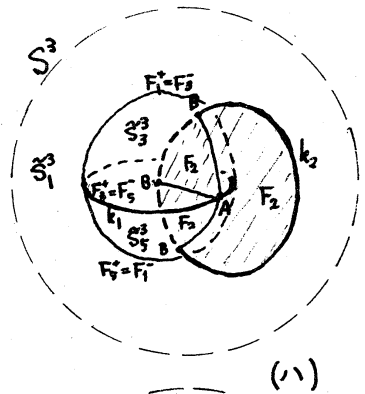


$F_1 \cup F_1^+$  の表にあるように書くと

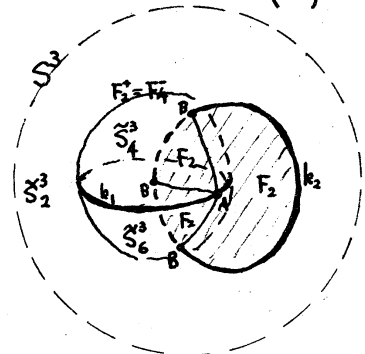
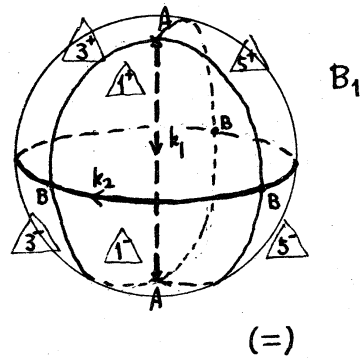


右の  $S^3$  のコピーを 6 枚  $S_1^3, S_2^3, \dots, S_6^3$   
 用意して、 $S_1^3, S_3^3, S_5^3$  と  $S_2^3, S_4^3, S_6^3$   
 の境界を (1, 3, 5), (2, 4, 6) の順に貼り合わせると。

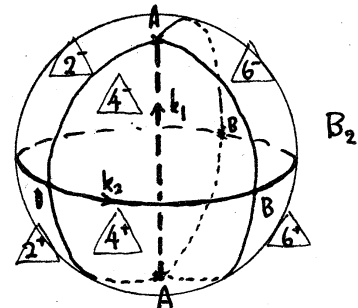
下图のように 2 つの  $S^3$  を得られる:



3枚の  $F_2$  を合せて  
 1枚の円板:  
 これで  $S^3$  を cut して  
 境界が表にあるように  
 書くと



3枚の  $F_2$  を合せて  
 1枚の円板:  
 これで  $S^3$  を cut して  
 境界が表にあるように  
 書くと



$B_1$  の境界  $\partial B_1$  は、 $F_2$  を cut して得られる 三角形状の円板が 6枚 (図で  $\triangle 1, \triangle 1, \triangle 3, \triangle 3, \triangle 5, \triangle 5$  で示す) 組合さうており、 $B_2$  の境界  $\partial B_2$  も、6枚の円板 (図で  $\triangle 2, \triangle 2, \triangle 4, \triangle 4, \triangle 6, \triangle 6$  で示す) から成る。ここで  $(14)(25)(36)$  の法則で、 $\triangle 1^+$  と  $\triangle 4^-$ 、 $\triangle 1^-$  と  $\triangle 4^+$ 、 $\triangle 2^+$  と  $\triangle 5^-$ 、 $\triangle 2^-$  と  $\triangle 5^+$ 、 $\triangle 3^+$  と  $\triangle 6^-$ 、 $\triangle 3^-$  と  $\triangle 6^+$  を貼り合せて、求める  $M$  が得られる。  $M \cong S^3$  であって、 $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1$ 、 $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$  とおくと、構成から

$$c(\tilde{k}_1) = 2, \quad b(\tilde{k}_1) = 3, \quad c(\tilde{k}_2) = 3, \quad b(\tilde{k}_2) = 2$$

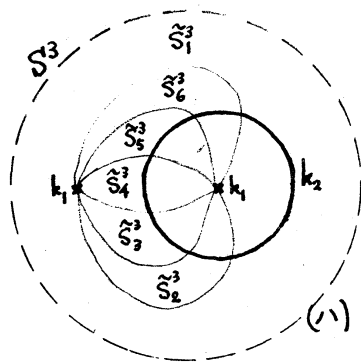
となる。

$$3.2. \quad \phi : G \longrightarrow Z_6 < S_6$$

$$x \longmapsto \tau = (123456)$$

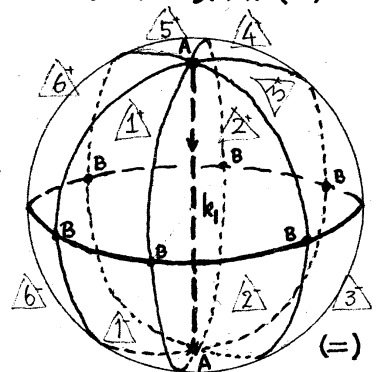
$$y \longmapsto \tau^2 = (135)(246)$$

この表現も明らかに推移的である。3.1の(ロ)のコピーを6回用意し、 $(123456)$ の順に貼り合せると、3.1の(イ)に対応して下図左の略図を得るから、6枚の  $F_2$  を合せてできる



円板で  $S^3$  を cut して 3.1の(=)に対

6枚の  $F_2$  を合せて  
この円板で cut  
境界が表にきわよく  
書くと



応して右図を得る。3.1の場合と同じ

ようにこの球体の表面上の三角形状の12枚の円板を、 $\triangle 1^+$  と  $\triangle 3^-$

$\triangle 3^+$  と  $\triangle 5^-$ ,  $\triangle 5^+$  と  $\triangle 1^-$ ,  $\triangle 2^+$  と  $\triangle 4^-$ ,  $\triangle 4^+$  と  $\triangle 6^-$ ,  $\triangle 6^+$  と  $\triangle 2^-$  を貼り合わせることによって求める  $M$  を得る。  $M$  は作り方からすぐわかるように  $L(3,1)$ ..... レンズ空間..... である。  $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1$ ,  $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$  とおくと、構成から

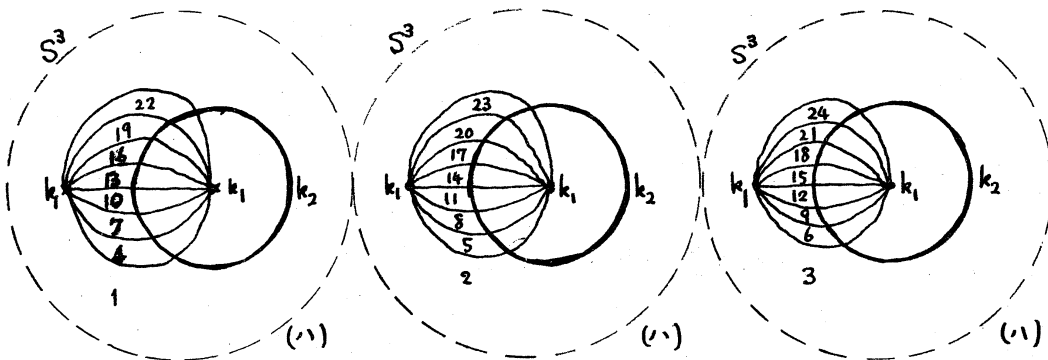
$$c(\tilde{k}_1) = 1, \quad b(\tilde{k}_1) = 6, \quad c(\tilde{k}_2) = 2, \quad b(\tilde{k}_2) = 3$$

である。

もう少し大きい数でもう一つ例を挙げよう。

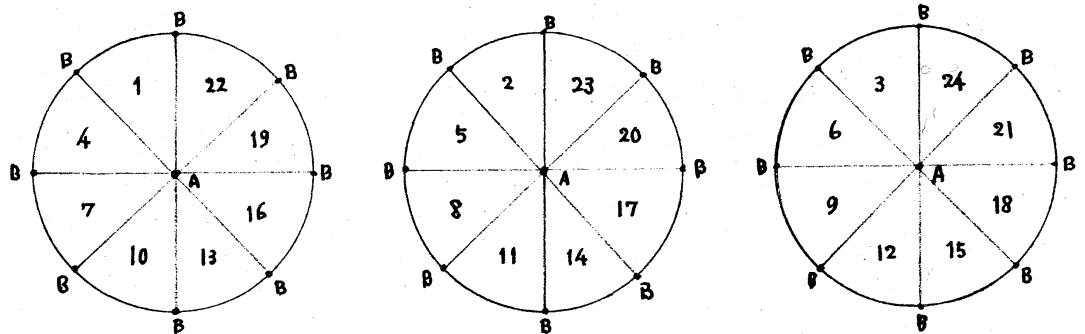
3.3.  $\phi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_{24} < S_{24}$   
 $x \longmapsto \tau^3 = (1471013161922)(2581114172023)(3691215182124)$   
 $y \longmapsto \tau^4 = (159131721)(2610141822)(3711151923)(4812162024)$   
 $\tau = (12345 \dots \dots \dots 21222324)$

これも推移的表現で、3.1 (ロ) のコピーを 24 個用意する。これを 3 組に分けて  $\tau^3$  に従って貼り合わせる。3.1 (ハ) に対応する図を 3.2 の (イ) にならって書けば下図のようになる。



各  $S^3$  の中で、8 枚の  $F_2$  が合わさって 1 枚の円板になっているので、これに沿って  $S^3$  を cut して、境界が表にくるように書くと 3.1 (=), 3.2 (=) のような図が 3 個得られるが、もう


下図のように省略してもよからう。



これら3個の球体の表面にある  $2 \times 24$  個の三角形の円板を  $\mathbb{R}^4$  に従って貼り合わせる。この場合  $M$  は  $S^3$  になって、  
 $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1, \pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$  とおくと、

$$c(\tilde{k}_1) = 3, \quad b(\tilde{k}_1) = 8, \quad c(\tilde{k}_2) = 4, \quad b(\tilde{k}_2) = 6$$

となる。

これから絡み輪  についてまとめてみよう。

$$3.4. \quad G = \langle x, y \mid xy = yx \rangle \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_n \ltimes S_n$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \tau^p \\ y & \xrightarrow{\quad} & \tau^q \end{array}$$

但し  $\tau = (1\ 2\ 3\ \dots\ n-1\ n)$ 。この表現を固定する。  $p$  と  $q$  は  $\text{mod } n$  で考えてよいから  $1 \leq p \leq q < n$  としてよい。

①  $\phi: G \rightarrow S_n$  が推移的表現  $\iff \text{g.c.d.}(p, q) = 1$ .

②  $\phi: G \rightarrow S_n$  が推移的. i.e.  $(p, q) = 1$  とする。

$$\tau^p = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{a_1}, \quad \tau^q = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{a_2}$$

のように分解する。ここに  $\sigma_i, \omega_j$  は巡回置換で、 $\sigma_i$  と  $\sigma_k$  は同じ文字を含まず、また  $\omega_i$  と  $\omega_k$  も同じ文字を含まない。

このとき、 $\sigma_1, \dots, \sigma_{a_1}$  の各  $k$  に含まれる文字の数は  $b_1 = n/a_1$  であり、 $\omega_1, \dots, \omega_{a_2}$  の各  $h$  に含まれる文字の数は  $b_2 = n/a_2$  となる。 $\pi_1^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1$ ,  $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$  はいずれも連結 (すなわち 2.2 で  $m_1 = m_2 = 1$ ) であって

$$c(\tilde{k}_1) = a_1, \quad b(\tilde{k}_1) = b_1, \quad c(\tilde{k}_2) = a_2, \quad b(\tilde{k}_2) = b_2$$

が成立する。

③ 従って特に ② で、 $n = pqr$ ,  $(p, q) = 1$ , とすると、

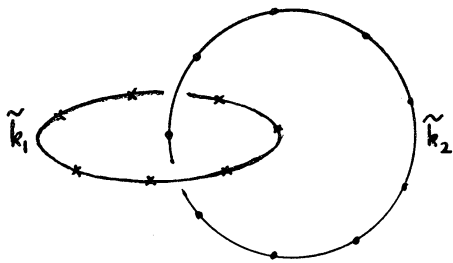
$$c(\tilde{k}_1) = p, \quad b(\tilde{k}_1) = qr, \quad c(\tilde{k}_2) = q, \quad b(\tilde{k}_2) = pr.$$

④ 更に  $n = pqr$  で  $p = 1, q > 1, r > 1$  であるとき、例 3.2 から予想されるように

$$M \cong L(n, q) = L(r, 1) \quad (\text{レンズ空間})$$

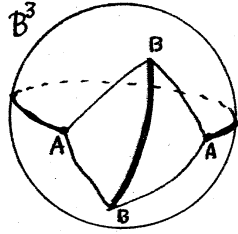
となる。但し  $r = 2$  のときは、実射影空間である。

⑤ 更に特別な場合で  $n = pq$ ,  $(p, q) = 1$  の場合は例 3.1 から予想されるように  $M \cong S^3$  で、 $(\tilde{k}_1 \cup \tilde{k}_2 \subset M)$  は最初の絡み輪  $(k_1 \cup k_2 \subset S^3)$  と同じ knot type である。実際:  $a$  被覆は次のように考えられる:  $\tilde{k}_1$  を  $p$  等分,  $\tilde{k}_2$  を  $q$  等分する。



$\tilde{k}_1$  に  $q$  枚の円板を,  $\tilde{k}_2$  を  $q$  等分点を含むように,  $\tilde{k}_2$  に  $p$  枚の円板を  $\tilde{k}_1$  の  $p$  等分点を含むように張る。よって  $p+q$  枚の円板は、 $S^3$  を  $pq$  個の球体に分割

するが、その各々は下図左のような四面体とみれる。一方、



$S^3$  を  $k_1$  と  $k_2$  に張った円板  $F_1$  と  $F_2$  で cut (3.1 の (1) 参照) すると、これと同じものが得られるはずである。

3.5. 演習: 階数 2 の自由加群  $G = \langle x, y \mid xy = yx \rangle$  の部分群は  $G(a, b) = \langle x^a, y^b \mid x^a y^b = y^b x^a \rangle$  の形をした部分群であることが知られる。より一般に、 $G$  の基底  $u_1, u_2$  と、正整数  $e_1, e_2$  が存在し  $G(a, b)$  の基底として  $e_1 u_1, e_2 u_2$  であり  $e_1 \mid e_2$  となるものがとれる。これから、 $G$  の  $S_n$  の推移的表現として、3.4 の表現  $\phi$  を考えれば十分であること、および、そのとき  $\ker \phi$  はどのような部分群になっているかを調べよ。

§4. 絡み輪  $L = \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_{k_1, k_2}$  上で分岐する分岐被覆空間。

$k_1$  と  $k_2$  の絡み数  $lk(k_1, k_2) = 2$  である。

$$G = \pi_1(S^3 - L) = \langle x, y \mid xyxy = yxyx \rangle$$

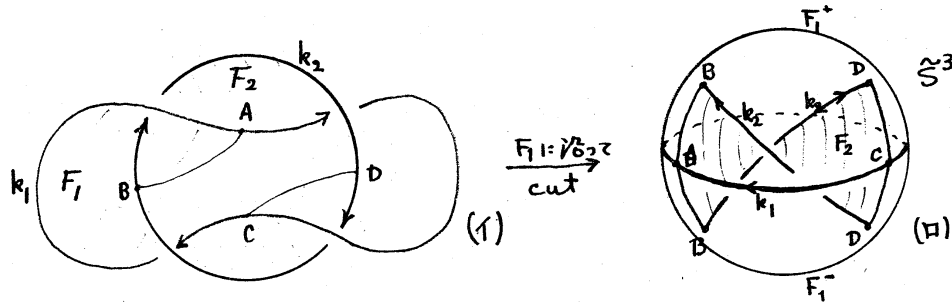
$$4.1. \quad \phi: G \longrightarrow \mathbb{Z}_6 \subset S_6$$

$$x \longmapsto \tau^2 = (135)(246)$$

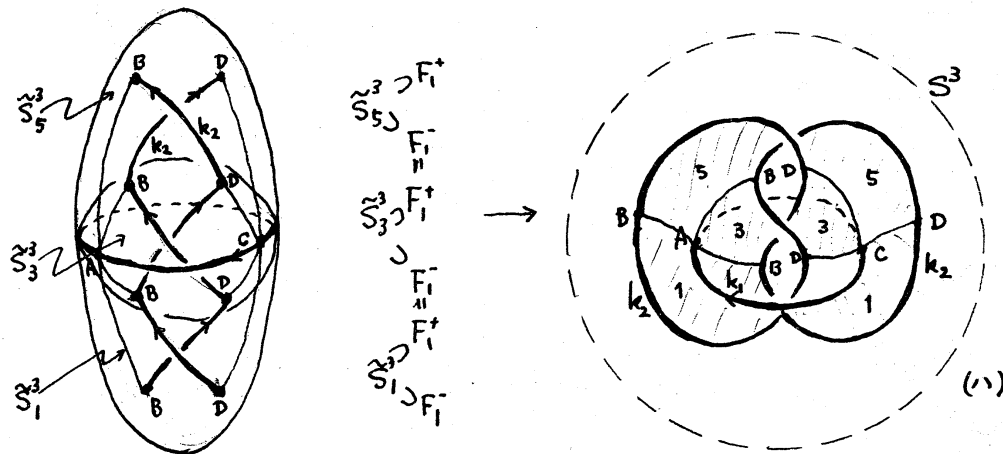
$$y \longmapsto \tau^3 = (14)(25)(36)$$

この単純な推移的表現から考察してみよう。  $L$  を次図のように書いて、 $k_1$  と  $k_2$  に円板  $F_1$  と  $F_2$  を張り、交線の  $\overline{AB}$  と

$\overline{CD}$  になるようにする。  $F_1$  を  $S^3$  を cut すると下図:



$S^3$  のコピーを6個  $S_1^3, S_2^3, \dots, S_6^3$  を用意し、2組に分けて (1 3 5) と (2 4 6) の順に貼り合わせる:



これは  $F_1 \subset \partial S_1^3$  と  $F_1^+ \subset \partial S_5^3$  を貼り合わせる前の図

$F_1^- \subset \partial S_1^3$  と  $F_1^+ \subset \partial S_5^3$  も貼り合わせたもの

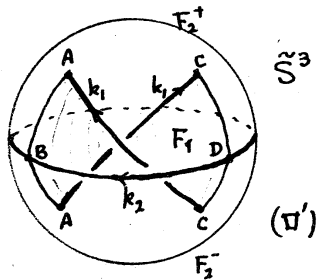
上右図(i)の中の数値は、 $S_1^3, S_3^3, S_5^3$  の中の  $F_2$  を示す。これら3枚のひねれた円板が合わさって、 $k_2$  (三葉結び目) が bound する種数1の曲面になっている。これと全く同じものが (2 4 6) の組で出来ている。これらを  $F_2$  の方で cut して (1 4)(2 5)(3 6) の法則に従って貼り合わせるのだが、これは 1.6 の巡回分岐被覆空間の構成と一致するから、三葉結

び目  $k_2$  ( (ハ) の図で ) 上で分岐する  $S^3$  の 2重巡回分岐被覆空間が得られる。このとき  $\pi^{-1}(k_1)$  は 2本の単純閉曲線  $\tilde{k}_{11} \cup \tilde{k}_{12}$  となり、 $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$  とおくと次が確かめられる:  $M=L(3,1)$  (Rolfsen [64, 302p]),

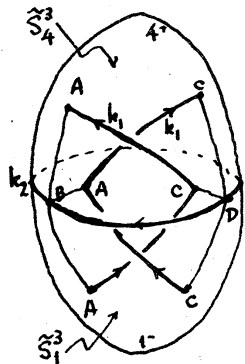
$$c(\tilde{k}_{11}) = c(\tilde{k}_{12}) = 1, \quad b(\tilde{k}_{11}) = b(\tilde{k}_{12}) = 3, \quad c(\tilde{k}_2) = 3, \quad b(\tilde{k}_2) = 2.$$

次に同じ分岐被覆空間を  $k_2$  の方から始めて考察してみよう。

図(1) から、 $S^3$  を  $F_2$  に沿って cut して下図左の (ロ') を得る:

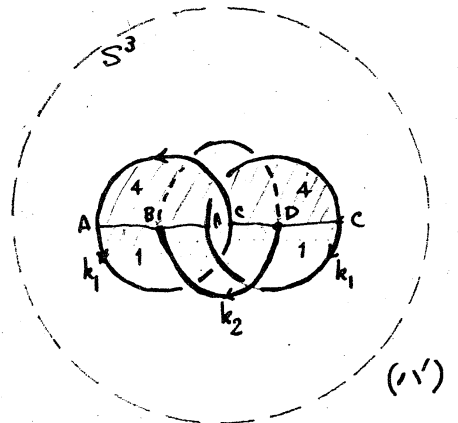


$S^3$  のコピーを 6 枚  $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_2^3, \dots, \tilde{S}_6^3$  を用意し 3 組  $\tilde{S}_1^3$  と  $\tilde{S}_4^3, \tilde{S}_2^3$  と  $\tilde{S}_5^3, \tilde{S}_3^3$  と  $\tilde{S}_6^3$  に分けて  $F_2^+$  と  $F_2^-$  を (14), (25), (36) の法則で貼り合わせる:



左は  $F_2^+ \cap \tilde{S}_1^3$  と  $F_2^+ \cap \tilde{S}_4^3$  を貼り合わせる前の図。

右はこの部分も貼り合わせて完成した図。



(ロ') の中の数字は、 $\tilde{S}_1^3$  と  $\tilde{S}_4^3$  の中の  $F_1$  を示す。これら 2枚の  $F_1$  が合成されて絡み輪  $\textcircled{1}$  を境界とする曲面となっているのがわかる。これと同じものが他に 2つ (25) と (36) の組から得られている。これらを  $F_1$  で cut して (135) と (246) の法則に従って貼り合わせるのであるが、これも  $\textcircled{1}$  上で分岐す

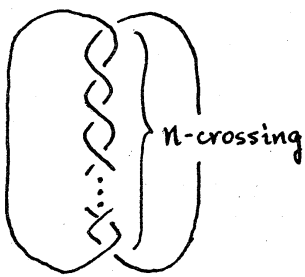


る  $S^3$  の 3 重巡回分岐被覆空間である。

この結果、絡み輪  $L$  上で分岐する、 $\phi: G \rightarrow \mathbb{Z}_6$  に対応する分岐被覆空間  $M$  は、三葉結び輪上で分岐する 2 重巡回分岐被覆空間として、また絡み輪  $(\bigcirc)$  上で分岐する 3 重巡回分岐被覆空間として得られたことになる。

$$\begin{aligned}
 4.2. \quad \phi: G &\longrightarrow \mathbb{Z}_{2n} < S_{2n} \\
 x &\longmapsto \tau^2 = (1\ 3\ 5 \cdots 2n-1)(2\ 4\ 6 \cdots 2n) \\
 y &\longmapsto \tau^n = (1\ n+1)(2\ n+2)(3\ n+3) \cdots (n\ 2n)
 \end{aligned}$$

この推移的表現に対応する分岐被覆空間  $M$  は、4.1 の考察から容易に予想されるように絡み輪

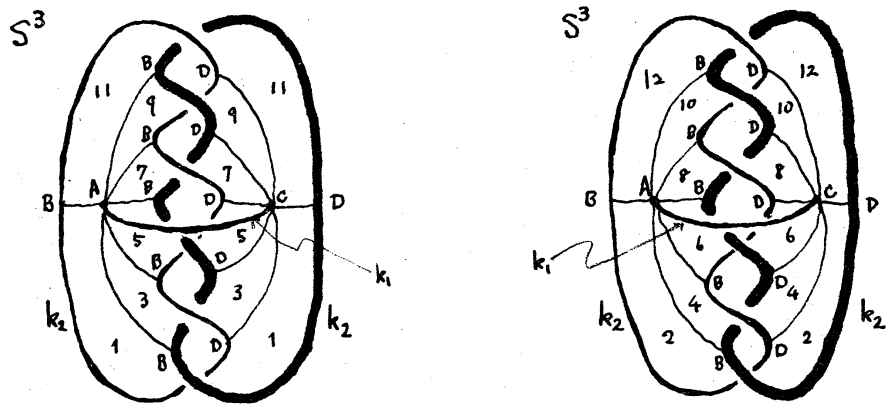


上で分岐する 2 重巡回分岐被覆空間として、また絡み輪  $(\bigcirc)$  上で分岐する  $n$  重巡回分岐被覆空間として得られる。  
 $n$  が奇数のときは左図は結び輪、偶数のときは 2 成分の絡み輪となる  $(2, n)$  型トーラス絡み輪)。従って、 $n$  が奇数の場合には、分岐被覆空間  $M$  はレンズ空間の  $L(n, 2)$  である。upstair の分岐集合  $\pi^{-1}(k_1) \cup \pi^{-1}(k_2)$  の状態については、各自調べてごらん。

もう一つ具体例を挙げよう。

$$\begin{aligned}
 4.3. \quad \phi: G &\longrightarrow \mathbb{Z}_{12} < S_{12} \\
 x &\longmapsto \tau^2 = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11)(2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12) \\
 y &\longmapsto \tau^3 = (1\ 4\ 7\ 10)(2\ 5\ 8\ 11)(3\ 6\ 9\ 12) \\
 &\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)
 \end{aligned}$$

これも明らかに推移的表現である。4.1(II)のコピーを12回用意して、2組に分け、(1 3 5 7 9 11)と(2 4 6 8 10 12)の法則で  $F_1^+$  と  $F_1^-$  を貼り合せると、 $S^3$  が2つ。4.1(ハ)に対応して次の図が得られる:



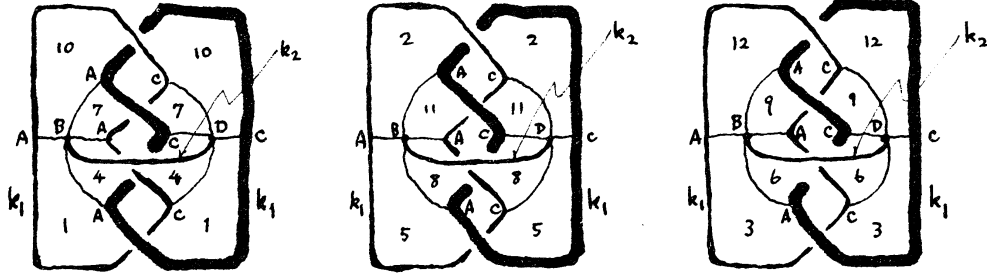
数字は  $\tilde{S}_i^3$  の中の  $F_2$  を  $i$  で示してある。これらの  $S^3$  を  $F_2$  で cut して、法則 (1 4 7 10), (2 5 8 11), (3 6 9 12) で貼り合せるのであるが、今度は巡回被覆にはならない。一見して2本ある  $k_2$  が1本になることに注意すると、 $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_{11} \cup \tilde{k}_{12}$ ,  $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_2$  において、次がわかる:

$$c(\tilde{k}_{11}) = c(\tilde{k}_{12}) = 1, \quad b(\tilde{k}_{11}) = b(\tilde{k}_{12}) = 6, \quad c(\tilde{k}_2) = 3, \quad b(\tilde{k}_2) = 4.$$

残念ながら、分岐被覆空間  $M$  がどんな多様体なのかは、今のところ判らない。

今度も寄り道をして、同じ  $L$  上の分岐被覆空間を  $k_2$  の方からながめてみよう。4.1(ロ')のコピーを12回用意して3組に分け、(1 4 7 10), (2 5 8 11), (3 6 9 12)の法則で貼り合せ

ると、4.1(バ)に対応して次の3つの  $S^3$  が得られる:



この場合も、図中の数字  $i$  は、 $i$  番目のコピーの中の  $F_1$  を示す。これから3個の  $S^3$  を  $F_1$  で cut して、法則 (1 3 5 7 9 11) (2 4 6 8 10 12) で貼り合せたのであるが、巡回被覆ではない。3ヶ所に1本ずつある  $k_2$  が1本になることに注意。

4.4. ここで §4 のまとめを試みよう。

$$G = \langle x, y \mid xyxy = yxyx \rangle \xrightarrow{\phi} Z_n \subset S_n$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \tau^p \\ y & \xrightarrow{\quad} & \tau^q \end{array}$$

但し  $\tau = (1 2 3 \dots n)$ 。この表現を固定すると次が言える。

但し 3.4 と同じように  $1 \leq p \leq q < n$  とする。

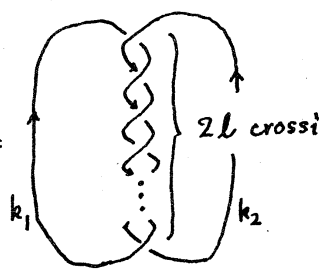
①  $\text{g.c.d.}(p, q) = 1$  ならば、 $\phi: G \rightarrow S_n$  は推移的である。逆が言えるかどうかは、今のところ判らない。群の形から言えそうでもあるし、上の 4.3 の例からもっと複雑な推移的表現もありそうである。

②  $(p, q) = 1$  とする。3.4 ② と同じように

$$\tau^p = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{a_1}, \quad \tau^q = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{a_2}$$

と、同じ文字を含まない巡回置換の積に書き、 $\sigma_i$  に含まれる文字の数を  $b_1 = n/a_1$ ,  $\omega_j$  に含まれる文字の数を  $b_2 = n/a_2$  とおく。  $\pi^{-1}(k_1)$  の各成分の分岐指数  $b(\tilde{k}_{1i}) = b_1$ ,  $\pi^{-1}(k_2)$  の各成分の分岐指数  $b(\tilde{k}_{2i}) = b_2$  が言える。  $a_i$  が奇数のとき  $\pi^{-1}(k_i)$  は連結で、 $c(\tilde{k}_i) = a_i$ ,  $a_i$  が偶数のとき  $\pi^{-1}(k_i) = \tilde{k}_{i1} \cup \tilde{k}_{i2}$  となり、 $c(\tilde{k}_{i1}) = c(\tilde{k}_{i2}) = a_i/2$  である ( $i=1,2$ )。

③特に  $n=pq$ ,  $(p,q)=1$  ならば、 $M$  は  $(2,q)$  型トーラス絡み輪上で分岐する  $S^3$  の  $p$  重巡回分岐被覆空間として、また、 $(2,p)$  型トーラス絡み輪上で分岐する  $S^3$  の  $q$  重巡回分岐被覆空間として得られる。

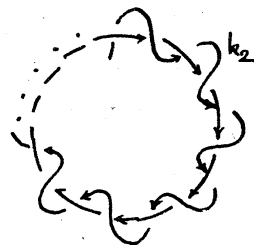
§5. 絡み輪  $L =$    $2l$  crossing 上で分岐する分岐被覆空間。  
絡み数  $lk(k_1, k_2) = l$ .

この場合

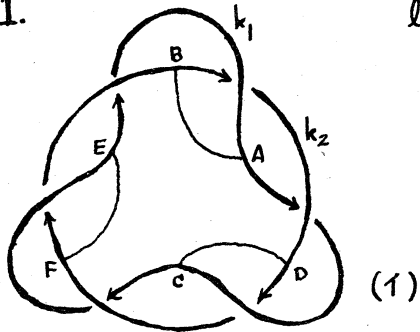
$$G = \langle x, y \mid \underbrace{xyxy \cdots xy}_{xy \text{ } l \text{ 回}} = \underbrace{yx yx \cdots yx}_{yx \text{ } l \text{ 回}} \rangle = \pi_1(S^3 - L)$$

なる表示を得る。  $l=1$  が §3 の例、 $l=2$  が §4 の例である。

$L$  は  $(2,2l)$  型のトーラス絡み輪だから右図のように描いた方が見易い。  $l=3$  の場合を調べれば、§4 と合せて一般の場合も予想が立つ。



5.1.

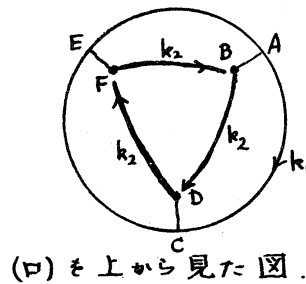
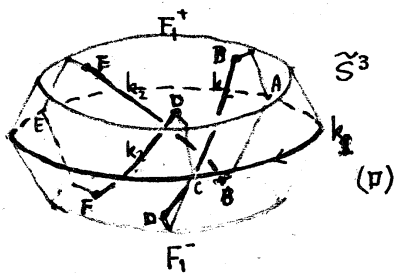


$l=3$  の場合を考察しよう。

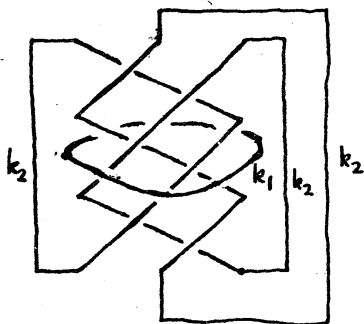
$$\phi: G = \langle xy \mid xyxyxy = yxyxyx \rangle$$

$$\begin{array}{c} x \quad y \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \tau^3 = (14)(25)(36) \\ \downarrow \\ \tau^2 = (135)(246) \\ \downarrow \\ \mathbb{Z}_6 \end{array}$$

絡み輪  $L$  に 2 枚の円板  $F_1$  と  $F_2$  を  $\partial F_1 = k_1, \partial F_2 = k_2$  とするよ  
うに、しかも  $F_1 \cap F_2$  が上図 (1) の線分  $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$  だけにな  
るように張る。  $F_2$  で  $S^3$  を cut して、境界が表になるよう  
に書くと：



前節の (1'') と書き方を変えたがわかっていただけよう。こ  
れと同じ  $\tilde{S}^3$  のコピーを 6 個  $\tilde{S}_1^3, \tilde{S}_2^3, \dots, \tilde{S}_6^3$  用意し、2 組に  
分けて、 $(135)$  と  $(246)$  の法則で  $F_1^+$  と  $F_1^-$  を貼り合わせる：



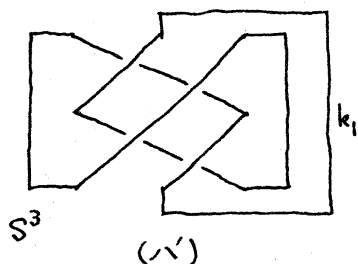
(1''')  $(3,3)$  トーラス絡み輪

$S^3$  の中に左の絡み輪が入った図が  
2 つ得られる。少々複雑だが、3  
枚の  $F_2$  はこの図の 3 本の  $k_2$  を  
境界とする連結な曲面になってい  
ることがわかる。この 2 つの  $S^3$  を

$F_2$  の方で cut して,  $(14), (25), (36)$  の法則で貼り合せたのであるが, これは前頁の 3 成分の絡み輪上で分岐する  $S^3$  の 2 重巡回分岐被覆空間である.  $\pi^{-1}(k_1) = \tilde{k}_1$ ,  $\pi^{-1}(k_2) = \tilde{k}_{21} \cup \tilde{k}_{22} \cup \tilde{k}_{23}$  であって, 次の成立する.

$$c(\tilde{k}_1) = 2, \quad b(\tilde{k}_1) = 3, \quad c(\tilde{k}_{21}) = c(\tilde{k}_{22}) = c(\tilde{k}_{23}) = 1, \\ b(\tilde{k}_{21}) = b(\tilde{k}_{22}) = b(\tilde{k}_{23}) = 2.$$

今度も同じ分岐被覆空間を  $k_2$  の方から考えてみよう. (四) の  $\tilde{S}^3$  のコピーを 6 個用意し, 3 組に分けて  $(14), (25), (36)$  の法則で貼り合せた. 一つだけ書いてみると:



これは  $(3,2)$  型, すなわち  $(3,1)$  型のトーラス結び輪である. このコピーを 3 つ,  $F_1$  の方で cut して法則  $(135), (246)$  で貼り合せると

$(3,1)$  型トーラス結び輪 (三葉結び輪) 上で分岐する  $S^3$  の 3 重巡回分岐被覆空間であり,  $M$  は Rolfsen [64, pp. 304-305] に解説してある.

少々乱暴だが, 紙数も少なくなったところで, 一般の場合をみよう.

$$5.2. \quad G = \langle x, y \mid \overbrace{xyxy \cdots xy}^{xy \text{ の } l \text{ 回}} = \overbrace{yx yx \cdots yx}^{yx \text{ の } l \text{ 回}} \rangle \xrightarrow{f} Z_n \subset S_n$$

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \tau^p \\ y & \longmapsto & \tau^q \end{array}$$

$1 \leq p \leq q < n$  なる表現を固定しよう.

①  $\text{g.c.d.}(p, q) = 1$  のとき,  $\phi$  は推移的である。4.4①と同じように, この他に推移的表現があるか否かは不明である。

②  $(p, q) = 1$  とし, 4.4②と同じように

$$\tau^p = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{a_1}, \quad \tau^q = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{a_2}$$

と同じ文字を含まない巡回置換の積に分解し,  $b_1 = n/a_1$ ,

$b_2 = n/a_2$  とおく,  $\pi^{-1}(k_1)$  の各成分の分岐指数は  $b_1$  で,

$\pi^{-1}(k_2)$  の各成分の分岐指数は  $b_2$  となる。

③  $n = pq$  で  $(p, q) = 1$  のときは,  $M$  は  $(l, q)$  型トラス絡み輪上で分岐する  $p$  重巡回分岐被覆空間としても,  $(l, p)$  型トラス絡み輪上で分岐する  $q$  重巡回分岐被覆空間としても得られる。

この他, 上記の  $a_1, a_2, b_1, b_2, l$  を用いて, 分岐集合の様子を多少述べることはできるが, 今回はここまでにしたい。

## References for Branched Covering Spaces

- [ 1 ] Alexander, J.W.: *Note on Riemann spaces*, Bull.Amer.Math.Soc., 26 (1920), 370-372.
- [ 2 ] Antonelli, P.L.: *Structure theory for Montgomery-Samelson fiberings between manifolds, I & II*, Canad.J.Math., 21(1969),170-179, & ibid. 180-186.
- [ 3 ] Bankwitz, C. & Schumann, H.G.: *Über Viergeflechte*, Abh.Math.Sem. Univ.Hamburg, 10(1934), 263-284.
- [ 4 ] Birman, J.S. & Hilden, H.M.: *The homeomorphism problem for  $S^3$* , Bull.Amer.Math.Soc., 79(1973), 1006-1009.
- [ 5 ] ————— : *Heegaard splittings of branched coverings of  $S^3$* , Trans.Amer.Math.Soc., 213(1975),315-352.
- [ 6 ] Blanchfield, R.C.: *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann.of Math., 65(1957), 340-356.
- [ 7 ] ————— & Fox, R.H.: *Invariants of self-linking*, Ann. of Math., 53(1951), 556-564.
- [ 8 ] Borel, A.: *SEMINAR ON TRANSFORMATION GROUPS*, Ann.of Math.Studies #46, Princeton Univ.Pr., 1960.
- [ 9 ] Burde, G.: *On branched coverings of  $S^3$* , Canad.J.Math., 23 (1971), 84-89.
- [ 10 ] Cappell, S.E. & Shaneson, J.L.: *Cyclic branched covering spaces, Knots, Groups and 3-Manifolds*, Ann.of Math.Studies #84, Princeton Univ.Pr., 1975, 165-173.
- [ 11 ] Church, P.T.: *Differentiable open maps on manifolds*, Trans.Amer. Math.Soc., 109(1963), 87-100.
- [ 12 ] ————— & Hemmingsen, E.: *Light open maps on  $n$ -manifolds*, Duke Math.J., 27(1960), 527-536.



- [13] Church, P.T. & Hemmingsen, E.: *Light open maps on  $n$ -manifolds, II*, Duke Math.J., 28(1961), 607-624.
- [14] Fox, R.H.: *Free differential calculus II, The isomorphism problem of groups*, Ann.of Math., 59(1954), 196-210, MR15,931.
- [15] ——— : *Free differential calculus III, Subgroups*, Ann.of Math., 64(1956), 407-419.
- [16] ——— : *Covering spaces with singularities*, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S.Lefschetz, Princeton Univ.Pr., 1957, 243-257.
- [17] ——— : *On knots whose points are fixed under a periodic transformation of the 3-sphere*, Osaka Math.J., 10(1958), 31-35.
- [18] ——— : *Congruence classes of knots*, *ibid.* 37-41.
- [19] ——— : *The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one*, Ann.of Math., 71(1960), 187-196.
- [20] ——— : *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, Prentice-Hall, 1962, 120-167.
- [21] ——— : *Construction of simply connected 3-manifolds*, *ibid.* 213-216.
- [22] ——— : *Two theorems about periodic transformations of the 3-sphere*, Michigan Math.J., 14(1967), 331-334.
- [23] ——— : *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad.J.Math., 22(1970), 193-201.
- [24] ——— : *A note on branched cyclic coverings of sphere*, Revista Mat.Hisp.-Amer., 32(1972), 158-166.
- [25] Giffen, C.H.: *The generalized Smith conjecture*, Amer.J.Math., 88 (1966), 187-198.
- [26] Goeritz, L.: *Die Betti'schen Zahlen der zyclischen Überlagerungs-räume der Knotenaussenräume*, Amer.J.Math., 56(1934), 194-198.

- [27] Gordon, C.McA.: *Knots whose branched cyclic coverings have periodic homology*, Trans.Amer.Math.Soc., 168(1972), 357-370.
- [28] ————— : *A short proof of a theorem of Plans on the homology of the branched cyclic coverings of a knot*, Bull.Amer.Math.Soc., 77(1971), 85-87.
- [29] ————— & Heil, W.: *Simply-connected branched coverings of  $S^3$* , Proc.Amer.Math.Soc., 35(1972), 287-288.
- [30] Hartley, R. & Murasugi, K.: *Covering linkage invariants*, Canad.J.Math., (to appear).
- [31] ————— : *Homology invariants*, (preprint).
- [32] Hemmingsen, E.: *Open simplicial mappings of manifolds on manifolds*, Duke Math.J., 32(1965), 325-331.
- [33] ————— & Reddy, W.: *Montgomery-Samelson coverings on manifolds*, Duke Math.J., 38(1971), 635-640. MR46#4524.
- [34] Hilden, H.M.: *Every closed, orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of  $S^3$* , Bull.Amer.Math.Soc., 80(1974), 1243-1244.
- [35] ————— : *Three-fold branched coverings of  $S^3$* , Amer.J.Math., 98(1976), 989-997.
- [36] Hirsch, U.: *Über offene Abbildungen auf 3-Sphäre*, Math.Z., 140(1974), 203-230.
- [37] ————— & Neumann, W.D.: *On cyclic branched coverings of spheres*, Math.Ann., 215(1975), 289-291.
- [38] Hopf, H.: *Über den Defekt stetiger Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Rend.Mat.e Appl.(5), 21(1962), 273-285.
- [39] Hosokawa, F. & Kinoshita, S.: *On the homology group of branched cyclic covering spaces of links*, Osaka Math.J., 12(1960), 331-355.

- [40] Kauffman, L.H.: *Cyclic branched covers and  $O(n)$ -manifolds*, Proc. Conf.Transformation Groups, Lecture Notes in Math. #298, Springer, 1972, 416-429.
- [41] ————— : *Branched coverings, open books and knot periodicity*, Topology, 13(1974), 143-160.
- [42] Kinoshita, S.: *On Wendt's theorem of knots*, Osaka Math.J., 9(1957), 61-66.
- [43] ————— : *On Wendt's theorem of knots, II*, Osaka Math.J., 10 (1958), 259-261.
- [44] ————— : *On knots and periodic transformations*, Osaka Math.J., 10(1958), 43-52.
- [45] ————— : *On irregular branched covering spaces of a kind of knots*, Notices Amer.Math.Soc., 14(1967), 924.
- [46] Levine, J.: *Polynomial invariants of knots of codimension two*, Ann. of Math., 84(1966), 537-554. MR34#808.
- [47] Lickorish, W.B.R.: *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann.of Math., 76(1962), 531-538.
- [48] Milnor, J.W.: *Infinite cyclic coverings*, Topology of Manifolds, Prindle,Weber and Schmidt, 1968, 115-133.
- [49] Montesinos, J.M.: *Reducción de la conjetura de Poincaré a otras conjeturas geométricas*, Revista Mat.Hisp.-Amer., 32(1972), 33-51.
- [50] ————— : *Una nota a un Teorema de Alexander*, *ibid.* 167-187.
- [51] ————— : *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$* , Bull.Amer.Math.Soc., 80(1974), 845-846.
- [52] ————— : *Representaciones de enlaces en relacion con recubridores dobles ramificados*, Collectanea Math., 25 (1974), 145-157.

- [53] Montesinos, J.M.: *Surgery on links and double branched covers of  $S^3$* , Knots, Groups and 3-Manifolds, Ann. of Math. Studies #84, Princeton Univ. Pr., 1975, 227-259.
- [54] ————— : *Three-manifolds as 3-fold branched covers of  $S^3$* , Quart. J. Math. Oxford(2), 27(1976), 85-94.
- [55] Montgomery, D. & Samelson, H.: *A theorem on fixed points of involutions in  $S^3$* , Canad. J. Math., 7(1955), 208-220.
- [56] Perko, K.A. Jr.: *On covering spaces of knots*, Glasnik Mat., 9(1974), 141-145.
- [57] ————— : *Octahedral knot covers*, Knots, Groups and 3-Manifolds, Ann. of Math. Studies #84, Princeton Univ. Pr., 1975, 47-50.
- [58] ————— : *On dihedral covering spaces of knots*, Invent. Math., 34(1976), 77-82.
- [59] Plans, A.: *Contribution to the study of the homology groups of the cyclic ramified coverings corresponding to a knot*, Rev. Acad. Ci. Madrid., 47(1953), 161-193. (Spanish), MR15,147.
- [60] Reddy, W.: *Montgomery-Samelson coverings on spheres*, Michigan Math. J., 17(1970), 65-67. MR41#1054.
- [61] ————— : *Branched coverings*, Michigan Math. J., 18(1971), 103-114. MR46#4526.
- [62] Riley, R.: *Homomorphisms of knot groups on finite groups*, Math. Comp. 25(1971), 603-619.
- [63] ————— : *Parabolic representations of knot groups I*, Proc. London Math. Soc. (3), 24(1972), 217-242.
- [64] Rolfsen, D.: *KNOTS AND LINKS*, Publish or Perish, Inc., 1976.
- [65] Schubert, H.: *Knoten mit zwei Brüchen*, Math. Z., 65(1956), 133-170.
- [66] Sebastiani, M. & Thom, R.: *Un resultat sur la monodromie*, Invent. Math., 13(1971), 90-96.

- [67] Seifert, H.: *Über das Geschlecht von Knoten*, Math. Ann., 110(1934), 571-592.
- [68] ————— : *Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerung*, Abh. Math. Sem. Univ. Hambrug, 11(1935), 84-101.
- [69] ————— : *Schlingknoten*, Math. Z., 52(1949), 62-80.
- [70] ————— & Threlfall, W.: *LEHRBUCH DER TOPOLOGIE*, Leipzig, 1934.
- [71] Shinohara, Y. & Summers, D.W.: *Homology invariants of cyclic coverings with applications to links*, Trans. Amer. Math. Soc., 163 (1972), 101-121.
- [72] Smith, P.A.: *Transformations of finite period*, Ann. of Math., 39 (1938), 127-164.
- [73] ————— : *New results and old problems in finite transformation groups*, Bull. Amer. Math. Soc., 66(1960), 401-415.
- [74] Summers, D.W.: *Polynomial invariants and the integral homology of coverings of knots and links*, Invent. Math., 15(1972), 78-90.
- [75] ————— : *Smooth  $Z_p$ -actions on sphere which leave knots point-wise fixed*, Trans. Amer. Math. Soc., 205(1975), 193-203.
- [76] Tucker, A.W.: *Branched and folded coverings*, Bull. Amer. Math. Soc., 42(1936), 859-862.
- [77] Viro, O. Ja.: *Linking, 2-sheeted branched coverings, and braids*, Math. USSR, Sbornik, 16(1972), 223-236. (English translation)
- [78] ————— : *Branched coverings of manifolds with boundary and link invariants I*, Math. USSR Izvestija, 7(1973), 1239-1256.
- [79] Waldhausen, F.: *Über Involutionen der 3-Sphäre*, Top., 8(1969), 81-91.
- [80] Wendt, H.: *Die gordische Auflösung von Knoten*, Math. Z., 42(1937), 680-696.
- [81] Whitehead, J.H.C.: *On doubled knots*, J. Lond. Math. Soc. 12(1937), 63-71.
- [82] Zeeman, E.C.: *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc., 115(1965), 471-495.