数理解析研究所講究録
第309巻 1977年 38-51

On irregular branched coverings of knots

関学 理学部 西田 治

一般に topological space K の n-fold covering space を決定するという問題は K の基本群から n次対称群 S_n への transitive な representation を決定する問題に帰着する。このとき Kの基本群の representation による像を monodromy group と呼ぶ[1]。

ここでは 特に knot k の covering space $\tilde{M}-\tilde{K}\to S^3-k$ について考察する。さらに coveing space $\tilde{M}-\tilde{K}\longrightarrow S^3-k$ に対応して branched covering space $\tilde{M}\longrightarrow S^3$ が存在して それは unique である[2]。この様な branched cover を考えるのは 1つには得られた manifold $\tilde{M}$ について考察するため。もう1つには $\tilde{M}$ から knot k の invariant を作ることが期待できるためである。

今までに knot の covering space として order n の cycle $(0,1,\cdots,n-1)$ で生成される S_n の transitive

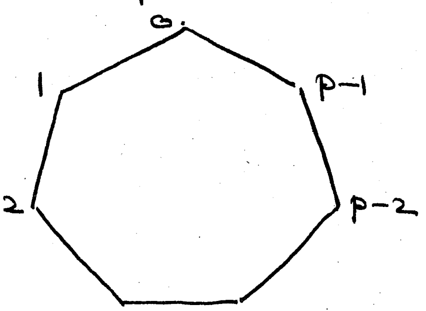
な subgroup を monodromy group とする covering space について多くの考察がなされている。これが一般に n-fold cyclic cover と呼ばれているもので、多くの invariant がこれに関連して知られている。

その他の representation の例もいくつか知られているが一般に representation を決定することは、非常にむずかしい問題である。ここでは特別な representation として dihedral representation について述べる。

最初に dihedral group D_p (p : odd) について説明する。その presentation は次の様に与えられる

$$D_p = < u, y \,;\, u^p=1,\ y^2=1,\ yuy=u^{-1} >$$

この群は正p角形の合同変換によって与えられ



$$u = (0, 1, \cdots, p-1)$$
$$y = (1, p-1)(2, p-2)\cdots\left(\tfrac{p-1}{2}, \tfrac{p+1}{2}\right)$$

という対応によって S_p の transitive な subgroup とみなすことが出来る。

以後 $G=\pi_1(S^3-k)$ knot group として onto な homomorphism $\phi : G \longrightarrow D_p$ が与えられたとき、$D_p \subset S_p$

とみなし、対応する branched covering space を作ったものが、irregular dihedral branched cover と呼ばれるものである。

D_p に対応する irregular dihedral branched cover を作ったとき その branch line は $\frac{p+1}{2}$ components の link となる。そのうち 1つの component は branch index が 1で、他の $\frac{p-1}{2}$ の component は branch index が 2となる。これらの link 間の linking number が knot の invariant として有効であることはすでに知られている [3] [5]。

今、$\phi: G \longrightarrow D_p$ onto homo が与えられているとする。

まて、D_p を abelianize すると $Z_2 = \langle y ; y^2 = 1 \rangle$, commutator subgroup は $D_p' = Z_p = \langle u ; u^p = 1 \rangle$ となり、split する short exact sequence

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow D_p \rightleftarrows Z_2 \longrightarrow 0$$

が得られる。同様に G に対しても split する short exact sequence が得られ、次の diagram が得られる。

$$\text{(A)} \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{\beta} & G & \underset{i}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi|_{G'}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_p & \xrightarrow{\delta} & D_p & \underset{d}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \text{commutative}$$

ここで Reyner [6] の2つの定理を引用する。

<u>Theorem</u>

$\phi : G \longrightarrow H$ a metabelian homomorphism

the index of H' in H is n

$\Longrightarrow$ we can factor this homomorphism as

$$G \longrightarrow G/([G^n, G'] G'') \dashrightarrow H$$

<u>Theorem</u>

$$G'/([G^n, G'] G'') = H_1(\Sigma_n)$$

Σ_n : the n-fold cyclic branched covering space

この2つの定理を diagram (A) に適用すると、次の commutative diagram が得られる。

(B)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G' \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[dd, "\phi|G'"] & G \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[dd, "\phi"] & Z \arrow[r] \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[dd, "f"] \arrow[d, phantom, "\langle t ; \rangle"] & 0 \\
H_1(\Sigma_2) \arrow[dr, "\psi"'] & & & \; & \\
0 \arrow[r] & Z_p \arrow[r, "\delta"] & D_p \arrow[r, shift left, "r"] & Z_2 \arrow[r] \arrow[l, shift left, "d"] & 0
\end{tikzcd}$$

$\langle u ; u^p = 1 \rangle$ $\qquad\qquad\qquad$ $\langle y ; y^2 = 1 \rangle$

この diagram (B) において homomorphism $\alpha, \beta, \gamma, \delta, f, j, \chi$ は unique に決まる。残りの ϕ, ψ, i のうち、逆に i, ψ を与えて diagram (B) を構成する representation ϕ を作りたい。次の定理がそれである。

<u>定理</u> $\forall i, \psi \mapsto \exists \phi$

証明

$\forall g \in G$ とすると $g = g' x^n$ $(x = i(t))$ と書ける

$\phi : G \to D_p$ を

$$\phi_g = \phi_{g'x^n} = \psi\chi(g') \cdot f\alpha(x^n)$$

と定義するとき、ϕ が homomorphism になるとき、この ϕ が diagram (B) を構成する representation であることは明らかである。故に、ϕ が homomorphism であることを証明する。

$x g' x^{-1} \in G'$ に対し

$$\phi_{xg'x^{-1}} = \psi\chi(xg'x^{-1})$$
$$= \psi(\chi(x) \cdot \chi(g') \cdot \chi(x)^{-1})$$

2-fold cyclic branched cover の性質より

$$\chi(x) \cdot \chi(g') \cdot \chi(x)^{-1} = \chi(g')^{-1}$$

故に

$$\phi_{xg'x^{-1}} = (\psi\chi(g'))^{-1} = \phi_{g'}{}^{-1}$$

$$\phi_{g_1'x^m}\phi_{g_2'x^n} = \phi_{g_1'}\cdot\phi_x^{\ m}\cdot\phi_{g_2'}\cdot\phi_x^{\ n}$$
$$= \phi_{g_1'}\cdot\phi_{g_2'}^{(-1)^m}\cdot\phi_x^{\ m+n}$$
$$\phi_{g_1'x^m g_2'x^n} = \phi_{g_1'x^m g_2'x^{-m}\cdot x^{m+n}}$$
$$= \phi_{g_1'}\ \phi_{x^m g_2' x^{-m}}\cdot\phi_x^{\ m+n}$$
$$= \phi_{g_1'}\cdot\phi_{g_2'}^{(-1)^m}\phi_x^{\ m+n}$$

故に ϕ は homomorphism

証明終り.

diagram と representation は1対1に対応しているから. すべての representation は i と ψ を決めることによってすべて得られる。次にかってな i, ψ に対して covering space の equivalence との関係を考えてみる。

定理 $\phi, \phi' : G \longrightarrow D_p$ onto homo

$\phi|_{G'} = \phi'|_{G'}$

$\Longrightarrow$ 対応する covering space $\tilde{M}$ と $\tilde{M}'$ は homeomorphic

証明

$i(t) = x_0$, $i'(t) = x_1$ とすると

$x_1 = a x_0 a^{-1}$ $\quad a \in G'$ と書け

$\phi_{x_0} = j(t) = \phi'_{x_1}$ となる。

$\forall g = g' x_0^{\ n} \in G$, $\quad g' \in G'$ に対し

$$\begin{aligned}
\phi'_g &= \phi'_{g' x_0^n} \\
&= \phi'_{g'}{}_{a^{-1} x_1^n a} \\
&= \phi'_{g'} \cdot \phi'^{-1}_a \cdot \phi'^{n}_{x_1} \cdot \phi'_a \\
&= \phi_a^{-1} \cdot \phi_{g'}\ \phi^n_{x_0} \cdot \phi_a \\
&= \phi_a^{-1} \cdot \phi_g \cdot \phi_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_1(\tilde{M} - \tilde{K}) &= \{ g \in G \mid j\phi_g = j \} \\
&= \{ g \in G \mid j\phi_a \phi_a^{-1} \phi_g \phi_a = j\phi_a \} \\
&= \{ g \in G \mid (j\phi_a)\phi'_g = (j\phi_a) \} \\
&= \pi_1(\tilde{M}' - \tilde{K}')
\end{aligned}$$

証明終り

この定理より representation は i の選び方，すなわち meridian generator の指定によらないことがわかる。よって，ψ の選び方だけですべての representation を作ることが出来る。

<u>**定理**</u> $\phi, \phi' : G \longrightarrow D_p$ onto homo

$i(t) = i'(t)$

$\omega : \phi(G') \cong \phi'(G')$ automorphism

such that $\forall g' \in G' \quad (\phi_{g'})^\omega = \phi'_{g'}$

$\Longmapsto$ 対応する covering space $\tilde{M}$ と $\tilde{M}'$ は homeomorphic

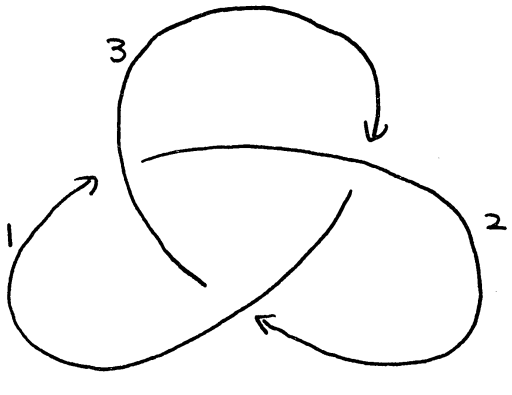
証明

$$\begin{aligned}\pi_1(\tilde{M}-\tilde{K}) &= \{\, g\in G \mid o\phi_g = 0 \,\}\\ &= \{\, g\in G \mid \phi_g = 1 \text{ or } \phi_g = y \,\}\\ &= \{\, g\in G \mid \phi'_g = 1 \text{ or } \phi'_g = y \,\}\\ &= \pi_1(\tilde{M}'-\tilde{K}')\end{aligned}$$

証明終り

さらにこの定理より $\psi : H_1(\Sigma_2) \longrightarrow Z_p$ の選び方は Z_p の automorphism の範囲で選べばよいことが分った。

次に具体的な例に対する計算結果を示す。実際の計算はFox［4］による。たとえば terifoil knot によってそれを示すと.



$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \,;\, x_1 = x_3x_2x_3^{-1},\ x_2 = x_1x_3x_1^{-1},\ x_3 = x_2x_1x_2^{-1} \rangle$$

Alexander matrix

$$A(t) = \left\| \begin{matrix} 1 & -t & -1+t \\ -1+t & 1 & -t \\ -t & -1+t & 1 \end{matrix} \right\|$$

$A(t)$ に $t=-1$ を代入すると

$$A(-1) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

これは $H_1(\Sigma_2)$ の relation matrix そのものであることが知られている。この場合 $H_1(\Sigma_2) = Z_3$ であることが分る。これより $\phi : G \longrightarrow D_p$ が存在するために $\psi : H_1(\Sigma_2) \longrightarrow Z_p$ が存在する p は 3 の約数でなければならず $p=3$ のみであることが分る。次に $A(-1)$ を係数とする連立方程式を 3 を法として解く。すなわち

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 2\gamma &\equiv 0 \\ -2\alpha + \beta + \gamma &\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 3) \\ \alpha - 2\beta + \gamma &\equiv 0 \end{aligned}$$

これは homomorphism $H_1(\Sigma_2) \longrightarrow Z_3$ を求めていることにほかならず、この解が onto な homomorphism となるためには、α, β, γ の最大公約数が 1 とならなければならない。実際にこの方程式の解を求めると、自明な解を

のそいて. 次の6種類ある

α	β	γ
0	1	2
0	2	1
1	0	2
1	2	0
2	0	1
2	1	0

$\alpha\equiv 0$, $\beta\equiv 1$, $\gamma\equiv 2$ という解は次の representation を表わしている。

$$x_1 \longrightarrow y \qquad x_2 \longrightarrow uy \qquad x_3 \longrightarrow u^2 y$$

ここで $\alpha\equiv 0$ は x_1 を meridian に指定することを示し. meridian の指定は任意であるから. x_1 を meridian と決めるなら $\alpha\equiv 0$ となる解だけを考えればよい。すなわち残りの4つの解は 2つの representation のいずれかと equivalent な representation を表わす解である。次に $\alpha\equiv 0$ となる2つの representation を比較する。

$\alpha\equiv 0$, $\beta\equiv 1$, $\gamma\equiv 2$ $\quad x_1\to y \quad x_2\to uy \quad x_3\to u^2y$

$\alpha\equiv 0$, $\beta\equiv 2$, $\gamma\equiv 1$ $\quad x_1\to y \quad x_2\to u^2y \quad x_3\to uy$

この2つは $u\longrightarrow u^2$ なる Z_3 の automorphism で移っている。一般に p を法として何倍かの関係にある2つの解

は equivalent な representation を表わしている。

以上より trefoil knot の dihedral cover は unique で、それは

$$\phi : G \longrightarrow D_3$$

$$x_1 \longrightarrow y = (1,2), \quad x_2 \longrightarrow uy = (0,2) \quad x_3 \longrightarrow u^2y = (0,1)$$

に対応する covering space である。

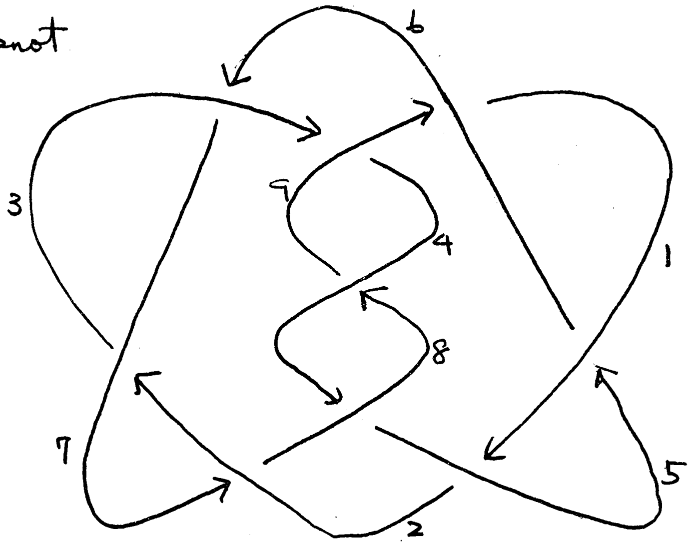
一般に $H_1(\Sigma_2) = Z_n$ となるとき

$n = \Delta(-1)$ 　　$\Delta(t)$: Alexander polynomial

であるが $\phi : G \longrightarrow D_p$ が存在する p は $\Delta(-1)$ の約数で それぞれの p に対して $Z_{\Delta(-1)} \to Z_p$ は automorphism の範囲で unique であるから dihedral cover も unique である。さらに $\Delta(-1)$ の約数 p に対して onto homomorphism $D_{\Delta(-1)} \longrightarrow D_p$ が存在してそれは automorphism の範囲で unique であるから。p として $\Delta(-1)$ 以外にとれるとき $\phi : G \longrightarrow D_p$ は写像の合成 $G \longrightarrow D_{\Delta(-1)} \longrightarrow D_p$ によって $G \longrightarrow D_{\Delta(-1)}$ から求められる。これは $\Delta(-1)$ に対する連立方程式の解を p を法として計算することによって簡単に得られる。

次に $H_1(\Sigma_2)$ の torsion が現れる例を示す

9_{35} knot



の場合 $H_1(\Sigma_2) = Z_3 \oplus Z_9$ となる

$\psi : H_1(\Sigma_2) \longrightarrow Z_p$ を持つ p は 9 と 3 である。

automorphism の範囲で ψ を求めると

$$\underset{a_1}{Z_3} \oplus \underset{a_2}{Z_9} \longrightarrow \underset{b}{Z_9} \qquad \underset{a_1}{Z_3} \oplus \underset{a_2}{Z_9} \longrightarrow \underset{c}{Z_3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 \to 1 & a_2 \to b \\ a_1 \to b^3 & a_2 \to b \\ a_1 \to b^6 & a_2 \to b \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{ll} a_1 \to 1 & a_2 \to c \\ a_1 \to c & a_2 \to 1 \\ a_1 \to c & a_2 \to c \\ a_1 \to c^2 & a_2 \to c \end{array}$$

である。一方 方程式から求めた解のうち equivalent なものを除いていくと、上の結果に対応した次のような representation が得られた。

D_9	0,	1,	0,	7,	5,	4,	5,	6,	8
	0,	1,	3,	4,	5,	4,	2,	0,	8
	0,	1,	6,	1,	5,	4,	8,	3,	8
D_3	0,	1,	0,	1,	2,	1,	2,	0,	2
	0,	0,	1,	2,	0,	0,	2,	1,	0
	0,	1,	1,	0,	2,	1,	1,	1,	2
	0,	1,	2,	2,	2,	1,	0,	2,	2

現在 方程式を解く部分は computer を使い Reidemaisters Table に関して、すべての representation を求めてある。さらに、それぞれの representation に対し、その branched Line の Linking number を computer を使って計算中である。

Reference

[1] Seifert - Threlfall : LEHRBUCH DER TOPOLOGIE
Leipzig, 1934

[2] Fox : Covering spaces with singularities, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Pr., 1957, 243-257

[3] 〃 : Metacyclic invariants of knots and links Canad. J. Math., 22 (1970), 193-201

[4] 〃 : A quick trip through knot theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics Prentice-Hall, 1963, 120-167

[5] Perko : On covering spaces of knots, Glasnik Mat., 9 (1974) 141-145

[6] Reyner : On Metabelian and Related Invariants of knots Princeton Ph. D. thesis 1972