数理解析研究所講究録
第 309 巻 1977 年 80-85

CABLE KNOTS OF FIBRED KNOTS ARE FIBRED

東大理 大川哲介

§1. 定理の Statement.

$L = \cup K_i$ を μ-components link, L' を L の $(p_1, q_1; p_2, q_2; \cdots p_\mu, q_\mu)$ -型 cable link とする. さらに, $p_1 = p_2 = \cdots = p_\mu = p$, $q_i \neq \Sigma_{j \neq i}\, lk(K_i, K_j)$ を仮定する. (lk は linking number を示す) 以後この記号及び仮定を通して使う. 以上の仮定のもとに, 次の諸定理が成立する

定理 1. L が fibred なら L' も fibred である.

系　iterated torus knot は fibred である

定理 2. $lk(K_i, K_j) = 0$ $(i<j)$ なる仮定をさらに付け加える. L, L' の Seifert 行列を各々 $\Gamma(L)$, $\Gamma(L')$ とすると, $\Gamma(L')$ は次の様になる.

$$\Gamma(L') = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \Gamma(L), & \Gamma(L) & \cdots & \Gamma(L) \\ \Gamma(L)^*, & \Gamma(L) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Gamma(L)^*, & \Gamma(L)^*, & \cdots & \Gamma(L) \end{array}\right)}_{p} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} p$$

$$\oplus (B_{p,q_1}) \oplus (B_{p,q_2}) \oplus \cdots \oplus (B_{p,q_\mu})$$

ここで，$*$ は転置行列，$\oplus$ は対角和，B_{p,q_i} は (p,q_i) 型 torus link の Seifert 行列を表わす.

系　さらに L, L' を共に knot とする. L, L' の Alexander polynomial を各々 $\Delta_L, \Delta_{L'}$ とすると，次の式が成立する. $q = q_1$ とする.

$$\Delta_{L'}(t) = \Delta_L(t^p) \frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}$$

§2. 記号及び規約

$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $\partial D^2 = S^1$,

$\varphi_{p,q,i} : S^1 \to D^2 \times S^1$,

$\varphi_{p,q,i}(z) = \left(\frac{1}{2} z^{q/r} \zeta^i, \frac{1}{2} z^{p/r}\right)$, $(i = 0, 1, \cdots r-1)$

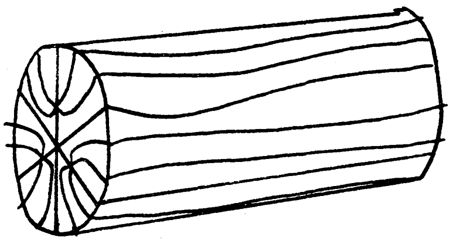
ここで $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$, $r = \mathrm{G.C.D.}(p,q)$, $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/p}$

$\varphi_{p,q} = \cup_i \varphi_{p,q,i}$ を $D^2 \times S^1$ に於ける (p,q) 型

torus link と呼ぶ. $F_{p,q} : (D^2 \times S^1 - \mathrm{Im}\, \varphi_{p,q}) \to S^1$

$$F_{p,q}(z, t) = \mathrm{Arg} \frac{2^{p-q} z^p t^{-q} - 1}{2^{p-q} t^{-q} - 1} \quad (\mathrm{Arg}: 偏角)$$

すると, $F_{p,q}$ は fibration である. $p=3$ の場合を図示すると,
右図の如くとなる.



$: D^2 \times S^1$

$L = \cup_i K_i$, $K_i : S^1 \to S^3$, $(i = 1, 2, \cdots \mu)$: μ-components link, $N = \cup N_i$, $N_i : D^2 \times S^1 \to S^3$ を L の正則近傍で $K_i(S^1) = N_i(0 \times S^1)$ なるものとする.

定義. $T = (p_1, q_1; p_2, q_2; \cdots ; p_\mu, q_\mu) \in \mathbb{Z}^{2\mu}$, $p_1, p_2, \cdots p_\mu > 0$, さらに $N_i(1 \times S^1)$ が K_i の longitudes であるとする. $(i = 1, 2, \cdots \mu)$ このとき, $L' = \cup N_i \circ \varphi_{p_i, q_i}$ を L の T-型の cable link と云う.

§3. 定理の証明

定理 1 の証. 仮定より,

$$k_i = q_i - \sum_{j \neq i} lk(K_i, K_j) \neq 0$$

$\pi : S^3 - \mathrm{Im}\,L \to S^1$ を 仮定により存在する fibration, とすると, L' は $lk(N_i(1\times S^1), K_i)$ を適当に取ることにより, $L' = \cup N_i \circ \varphi_{p_i, k_i}$ の様にも表わすことが出来る. ここで 2つの fibration: $g_p \circ \pi \circ N_i |_{\partial D^2 \times S^1}$ と $F_{p_i, k_i} |_{\partial D^2 \times S^1}$ は $(g_p(z) = z^p)$, compatible であるから 最初から一致していたものと考えて良い. これらを つなぎ合わせることによって L' の fibration を得る. **Q.E.D.**

<u>定理 2 の証明</u> S を L の Seifert surface, $S_0 = Cl(S - \mathrm{Im}\,N)$, S_i $(i=1,2,\cdots p)$ を S_0 の small deformations とする. (一つの向きにより自然な順番にとる) これらは $Cl(S^3 - \mathrm{Im}\,N)$ の中にあり, かつ 互いに disjoint とする. さらに

$$\partial\left(\bigcup_{i=1}^{\mu} N_i (F^{-1}_{p, g_i}(1))\right) = \bigcup_{j=1}^{p} \partial S_j$$

と仮定して良い. すると

$$S' = \left(\bigcup_{i=1}^{\mu} N_i (F^{-1}_{p, g_i}(1))\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} S_j \right)$$

は L' の Seifert surface となる.

$M_{1i} = H_1(S_i)$, $(i=1,2\cdots p)$

$M_{2i} = H_1(N_i(F^{-1}_{p, g_i}(1)))$, $(i=1,2,\cdots \mu)$ とする.

但しホモロジーは全て$\mathbb{Z}$係数とする. すると,

$H_1(S') = (\oplus_{i=1}^{p} M_{1i}) \oplus (\oplus_{i=1}^{\mu} M_{2i})$,

$\langle M_{1i}, M_{2j} \rangle = 0 \ (\forall i \forall j)$, $\langle M_{2i}, M_{2j} \rangle = 0 \ (i \neq j)$

となる. 但し, $\langle x, y \rangle = lk(x, i^{+}(y))$, i^{+}は+方向への押出しとする。さらに$\langle , \rangle$の意味を考えることにより, $\langle M_{1i}, M_{1j} \rangle$に対する関係行列は, $i \leqq j$のとき$\Gamma(L)$, $i > j$のとき$\Gamma(L)^{*}$と同一視される. 但し$\Gamma(L)$はLのSeifert行列, $\Gamma(L)^{*}$はその転置を表わす. 最後に$\langle M_{2i}, M_{2i} \rangle$の部分であるが, これはknot K_iがtrivialな位置にあるとしても, そのincident行列は不変であるから(p, q_i)一型tous linkのSeifert行列と一致する. **Q.E.D.**

系の証明は初等的な計算であるから省略する.

§4. 応用

$f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$を原点において既約な多項式, $S_{\varepsilon}^{2n-1} = \{ p \in \mathbb{C}^n \mid |p| = \varepsilon \}$ ($\varepsilon > 0$: 十分小), とする. するとknot $S^3_{\varepsilon} \cap \{ z \in \mathbb{C}^2 \mid f(z) = 0 \} \subset S^3$はiterated tous knotとなり, 一般にはtous knotとならない. 定理1により, このknot KのSeifert行列はreducibleだから, $K' = \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid f(z_1, z_2) + z_3^2 + z_4^2 = 0 \} \cap S^7$についてもそうで

ある. これは A'Campo の問題 に対する否定的な例を与える.

References

1. N. A'Campo, Some Problems in Topology, Edited by M. Kato, Manifold Tokyo, 1973, p.4-21

2 Lê Dũng Tráng, Sur les noeds algebraiques, Compo. Math ; 25(1972) pp. 283~321

3 J. Stallings. On fibering certain 3-manifolds, Topology of 3-manifolds, Prentis-Hall, (1962) pp. 95~100

4. M. Yamamoto, Regular projections, and Seifert matrices of iterated torus knots, to appere

Note. 定理1はSimonにより, 定理2は Hacon により (knot の場合) 独立に得られていることが最近わかった.

5. J. Simon Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 140~142