数理解析研究所講究録
第 309 巻 1977 年 97-115

8の字結び目の surgery で出来る homology spheres

筑波大学 高橋 元男

[6] において，私は，8の字結び目の surgery で出来る Bing の空間([1]参照)が，2つの相異なる3結び目の 2-fold branched covering として表されることを示した．同様な例は Birman, González-Acuña, Montesinos [2] によって，また Akbult によっても得られているという．本稿では上の結果を拡張して，8の字結び目の surgery で得られるすべての homology spheres が相異なる2つの結び目の 2-fold branched covering として表されることを示す．

8の字結び目の surgery で homology sphere が出来るのは，8の字結び目の regular neighbourhood をくりぬいて，その meridian を図1の様な loop になるように貼りかえた時である．

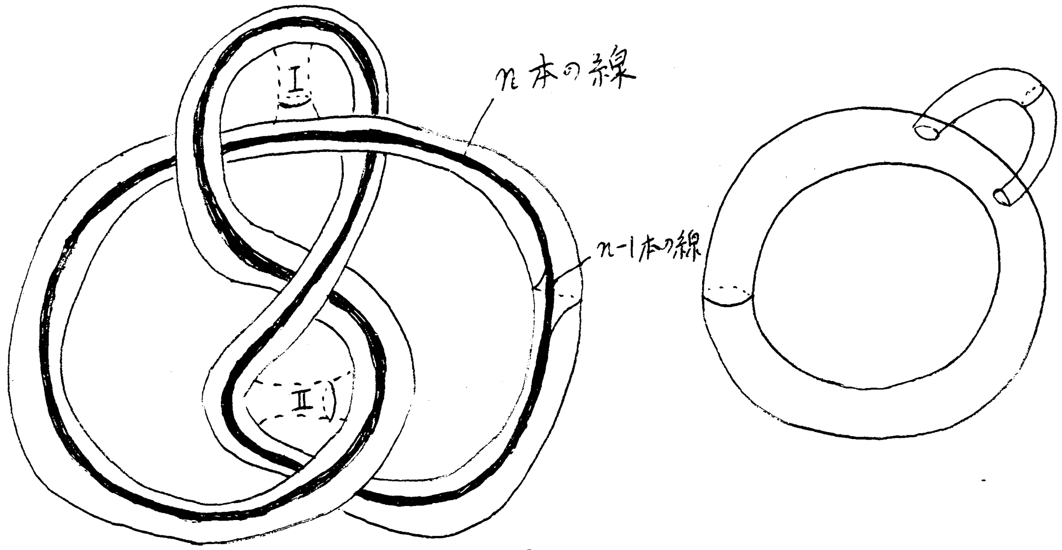


図1

そこで，この様にして得られる空間Mの genus 2 の Heegaard 分解を作ろう．それは2通りの方法で出来る．1つは，図1のIの handle をくりぬき，既にくりぬいた，8の字結び目の regular neighbourhood につけ加えることによって，もう1つはIの handle の代りにIIの handle をつけ加えることによってである．

この時，図の様なもう1つの meridian が出来る．先ず第1の場合について，2つの meridian がどの様に変るか調べて見よう。

Iの handle をくりぬいたことにより（S^3からの）補集合は図2の様になる．それを更に変形していくの図3になる．図3の下方の twist をとると図4の様になる．

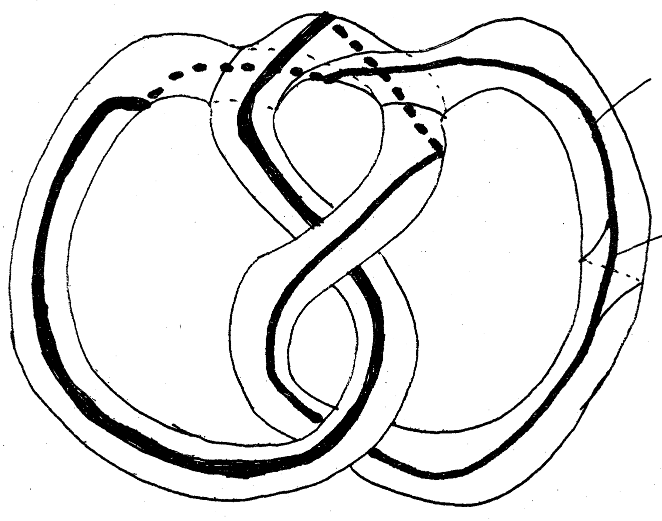


図 2

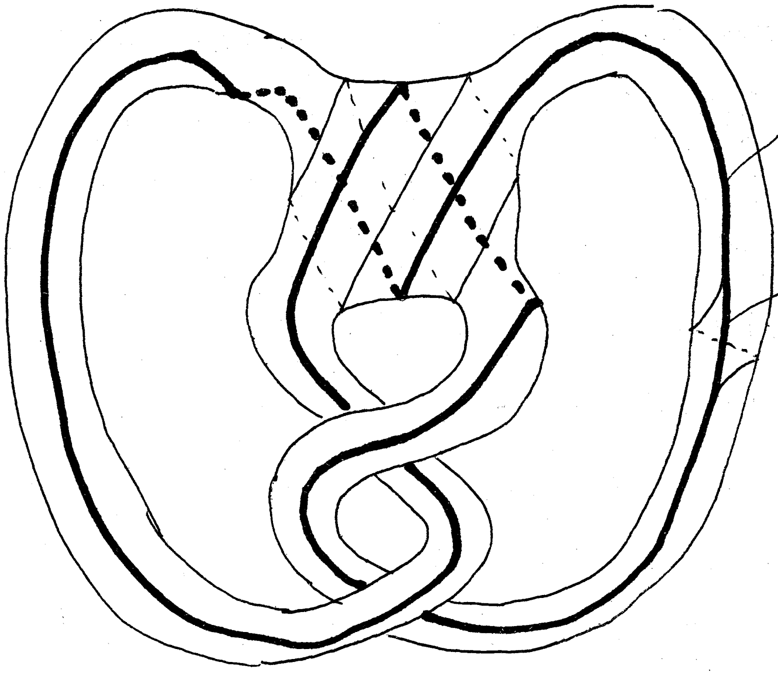


図 3

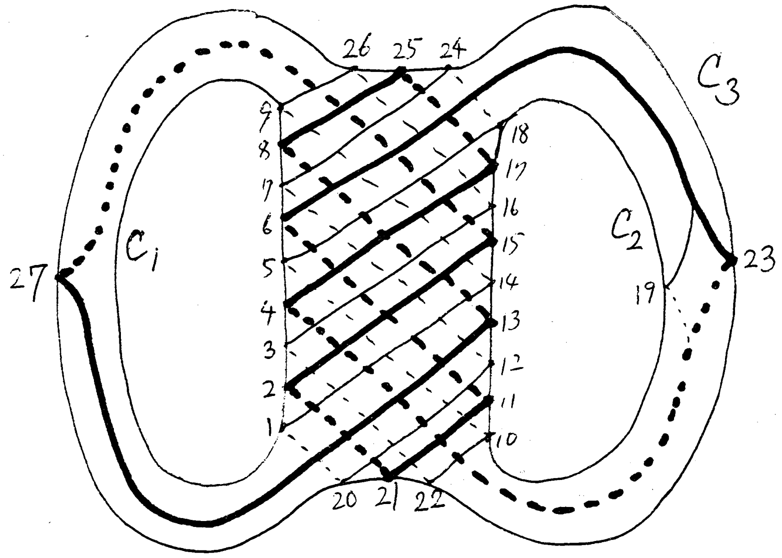
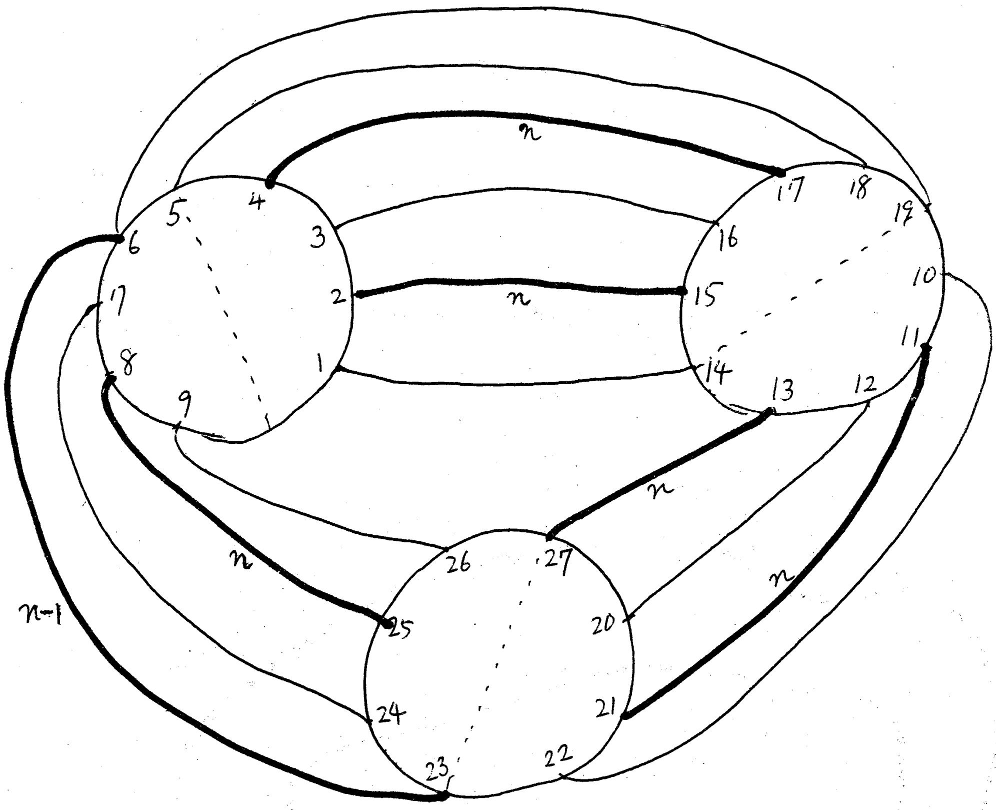


図4

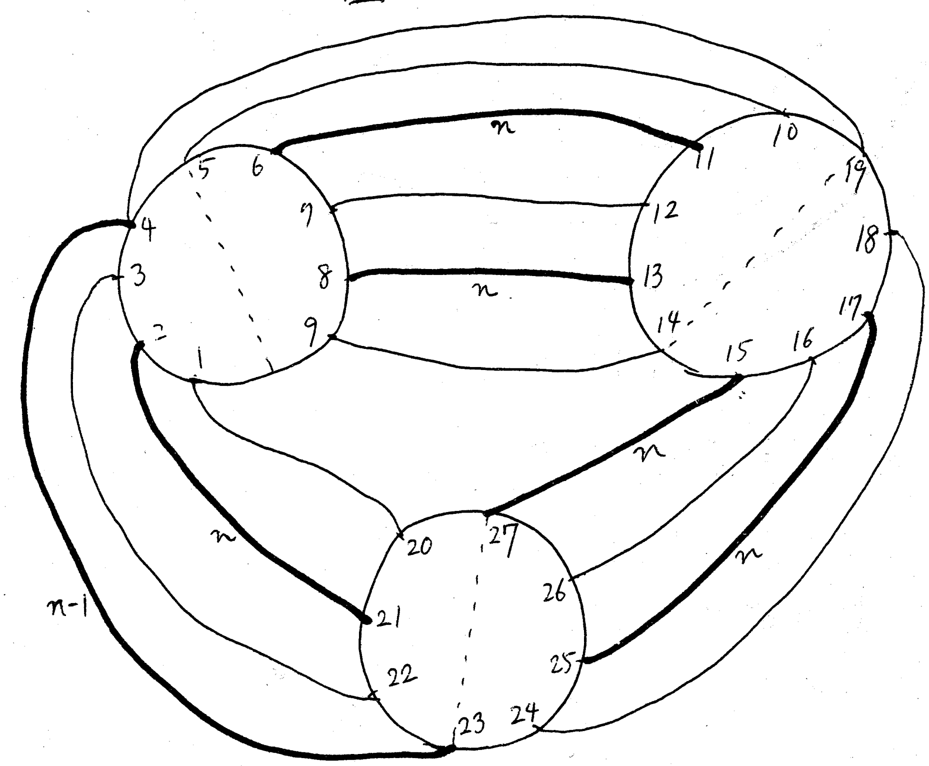
図4の handle body の complement も handle body であるからこれが実際に Heegaard 分解を与えている。そこで、この Heegaard 分解から S^3 の 2-fold branched covering を作る。

それには図4の3つの meridian disks C_1, C_2, C_3 で切って2つの部分（即ち表と裏）に分け対称軸を見つけなければならない。C_1, C_2, C_3 で切ると図5（表）と図6（裏）の様になり対称軸が点線として見つかる。



n
n
n
n
n
n-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

図 5



n
n
n
n
n
n-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27

図 6

これから 3-bridge knot を作ると図7の様になる．ただし meridian を2つしかとっていないから完全な knot にはなっていないが、残りの2つの頂点を下道で結べば完全な knot になる．(結び方は色々あるが出来る knot は同じである．)

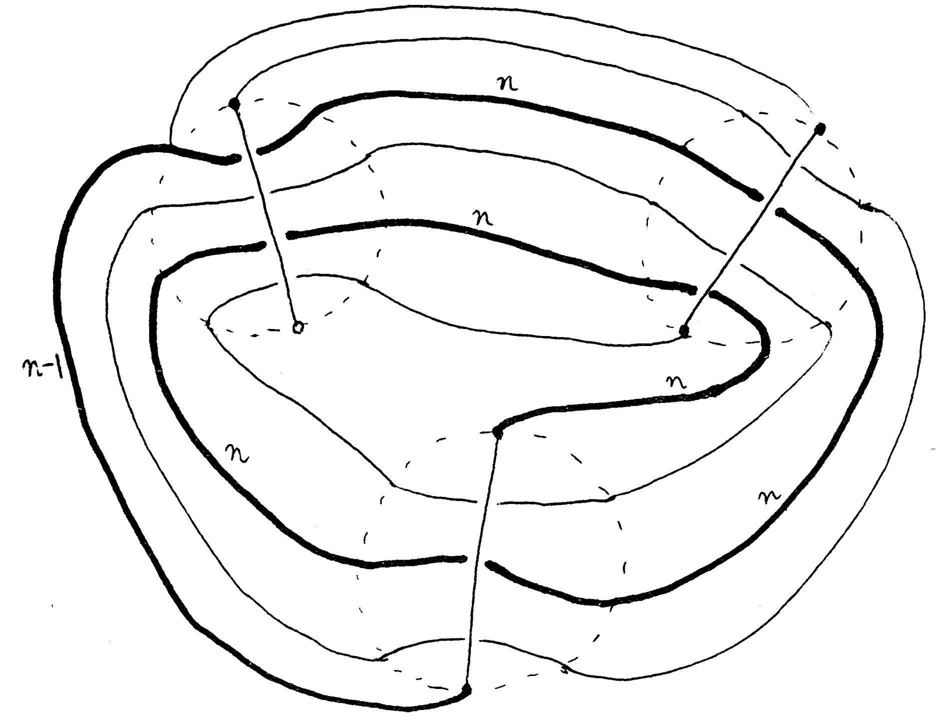


図7

今度は，出来た knot の knot group の関係式を出し，それから Alexander 多項式を計算する。

n が偶数の場合と奇数の場合を分けて行なう．最初に $n=2k$ の場合を行なう。 $n=2,4$ の場合の図を示しておこう．(図8，9)

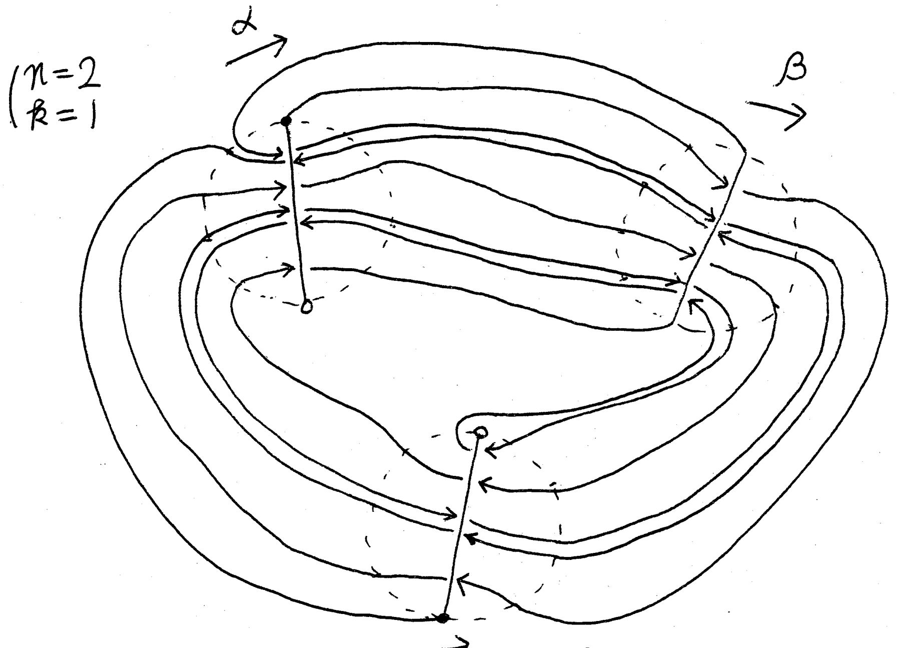


図8

$$\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha=\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$\beta\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}=\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$$

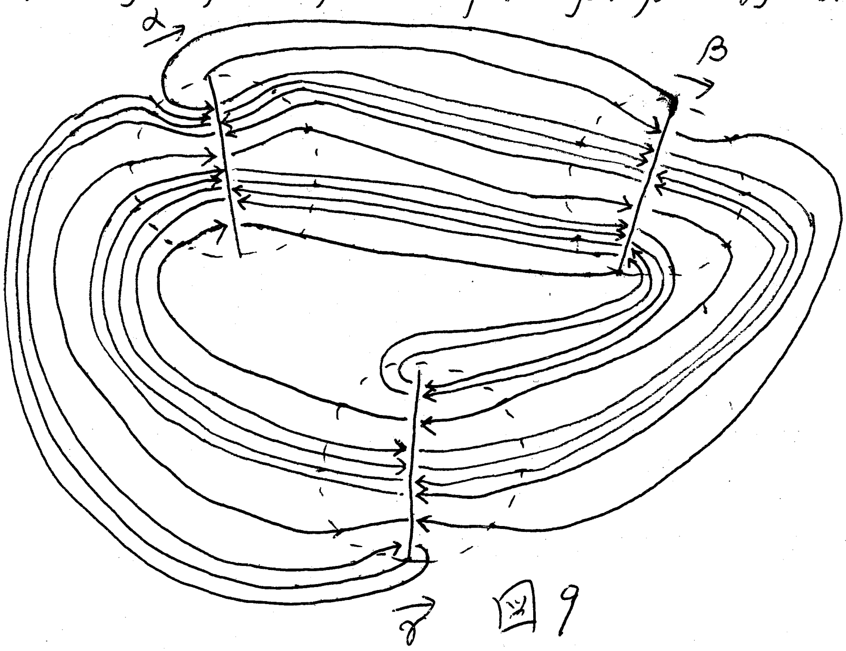


図9

$$\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha=\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$\beta(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1})\gamma(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1})$$
$$=(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma)(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma)$$

Knot group の generators を図の α, β, γ として knot group の relations を計算すると，それぞれ図の下に書いてあるようになる.

一般の $n=2k$ の場合 relations は次の様になる.

$$\mathrm{I}: \overset{1}{\alpha}\overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma^{-1}}\overset{2}{\alpha}\overset{3}{\beta}\overset{2}{\gamma^{-1}}\overset{3}{\alpha} = \overset{1}{\beta}\overset{0}{\gamma^{-1}}\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma^{-1}}\overset{2}{\alpha}\overset{3}{\beta}$$

$$\mathrm{II}: \overset{1}{\beta}(\overset{2}{\alpha}\overset{3}{\beta}\overset{2}{\gamma^{-1}}\overset{3}{\alpha}\overset{4}{\beta}\overset{3}{\gamma^{-1}}\overset{2}{\beta^{-1}}\overset{1}{\alpha^{-1}}\overset{2}{\gamma}\overset{1}{\beta^{-1}}\overset{0}{\alpha^{-1}}\overset{1}{\gamma})^{k-1}\overset{2}{\alpha}\overset{3}{\beta}\overset{2}{\gamma^{-1}}\overset{3}{\alpha}\overset{4}{\beta}\overset{3}{\gamma^{-1}}\overset{2}{\beta^{-1}}\overset{1}{\alpha^{-1}}\overset{2}{\gamma}\overset{1}{\beta^{-1}}\overset{0}{\alpha^{-1}}$$

$$= (\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma^{-1}}\overset{2}{\alpha}\overset{3}{\beta}\overset{2}{\gamma^{-1}}\overset{1}{\beta^{-1}}\overset{0}{\alpha^{-1}}\overset{1}{\gamma}\overset{0}{\beta^{-1}}\overset{-1}{\alpha^{-1}}\overset{0}{\gamma})^{k}$$

これから Fox [5] の方法を使って Alexander 多項式を計算すると次の様になる.

アーベル化を $*$ で表し $\alpha^* = \beta^* = \gamma^* = x$ とおくと

$$\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \alpha}\right)^* = (1+x+x^2) - (1+x) = x^2$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \beta}\right)^* = (x+x^2) - (1+x+x^2) = -1$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \alpha}\right)^* = k(x+x^2-x-1) - k(1+x-1-x^{-1})$$
$$= k(x^{-1}-1-x+x^2)$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \beta}\right)^* = (1+k(x^2+x^3-x^2-x)) - k(x+x^2-x-1)$$
$$= (k+1) - kx - kx^2 + kx^3$$

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial \alpha}\right)^* & \left(\dfrac{\partial \mathrm{II}}{\partial \alpha}\right)^* \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial \beta}\right)^* & \left(\dfrac{\partial \mathrm{II}}{\partial \beta}\right)^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & kx^{-1} - k - kx + kx^2 \\ -1 & (k+1) - kx - kx^2 + kx^3 \end{vmatrix}$$

第一行に x を掛けると

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x^3 & k - kx - kx^2 + kx^3 \\ -1 & (k+1) - kx - kx^2 + kx^3 \end{vmatrix}$$

$$= k - kx - kx^2 + (2k+1)x^3 - kx^4 - kx^5 + kx^6$$

これが求めるAlexander多項式である.

次に $n=2k+1$ の場合を行なう. $n=3$ $k=1$ の場合を図示すると

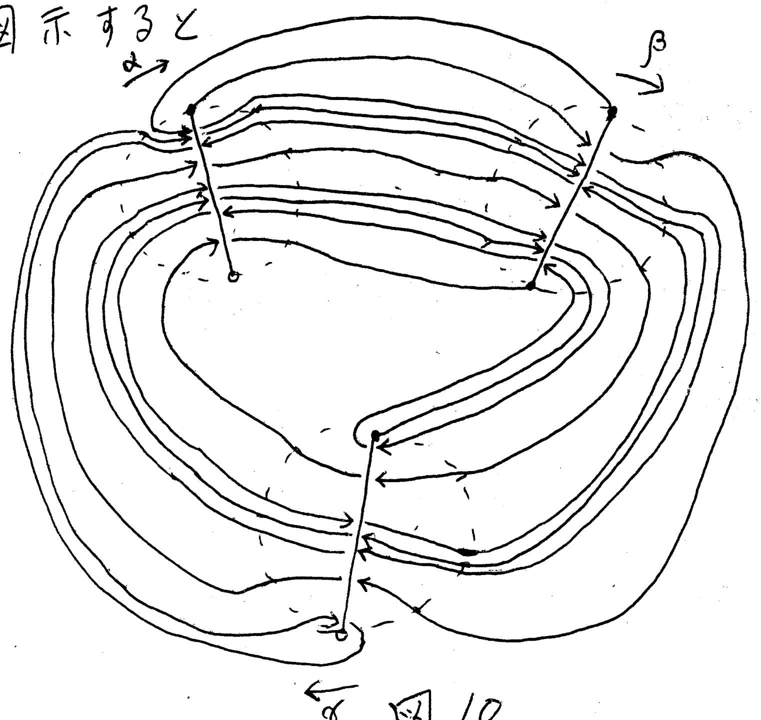


図10

$$\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma=\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$

$$\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$
$$=\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$$

一般の場合には knot group の relations は

I: $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha=\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$

II: $\beta(\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1})^{k}\alpha\beta\gamma\alpha\beta$
$=(\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1})^{k}\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$

Alexander 多項式を計算すると

$$\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial\alpha}\right)^{*}=(1+x^3+x^6)-(x^2+x^5)=1-x^2+x^3-x^5+x^6$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial\beta}\right)^{*}=(x+x^4)-(1+x^3+x^6)=-1+x-x^3+x^4-x^6$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial\alpha}\right)^{*}=\{k(x+x^4-x^5-x^2)+x+x^4\}$$
$$-\{k(1+x^3-x^4-x)+1+x^3\}$$
$$=-(k+1)+(2k+1)x-kx^2-(k+1)x^3+(2k+1)x^4-kx^5$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial\beta}\right)^{*}=\{1+k(x^2+x^5-x^6-x^3)+x^2+x^5\}$$
$$-\{k(x+x^4-x^5-x^2)+x+x^4\}$$
$$=1-(k+1)x+(2k+1)x^2-kx^3-(k+1)x^4+(2k+1)x^5-kx^6$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial \alpha}\right)^* & \left(\dfrac{\partial \mathrm{II}}{\partial \alpha}\right)^* \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial \beta}\right)^* & \left(\dfrac{\partial \mathrm{II}}{\partial \beta}\right)^* \end{vmatrix}$$

$$= -k+(2k+1)x-(k+1)x^2-kx^3+(2k+1)x^4-(k+1)x^5+x^6$$
$$-(k+1)x^7+(2k+1)x^8-kx^9-(k+1)x^{10}+(2k+1)x^{11}-kx^{12}$$

これがこの場合の Alexander 多項式である.

次に handle II をくりぬいた場合について調べて見よう. 説明は不要と思うので図のみを掲げる.

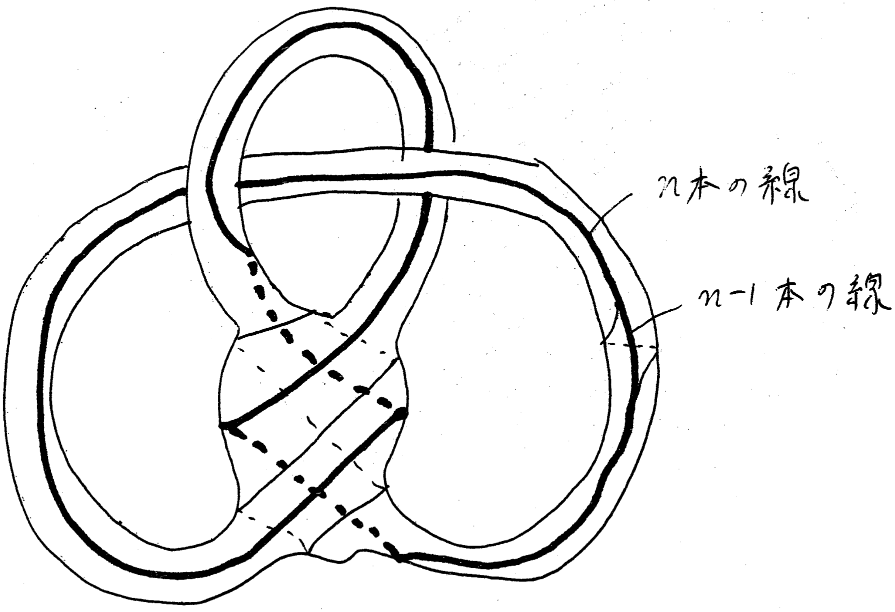


図 11

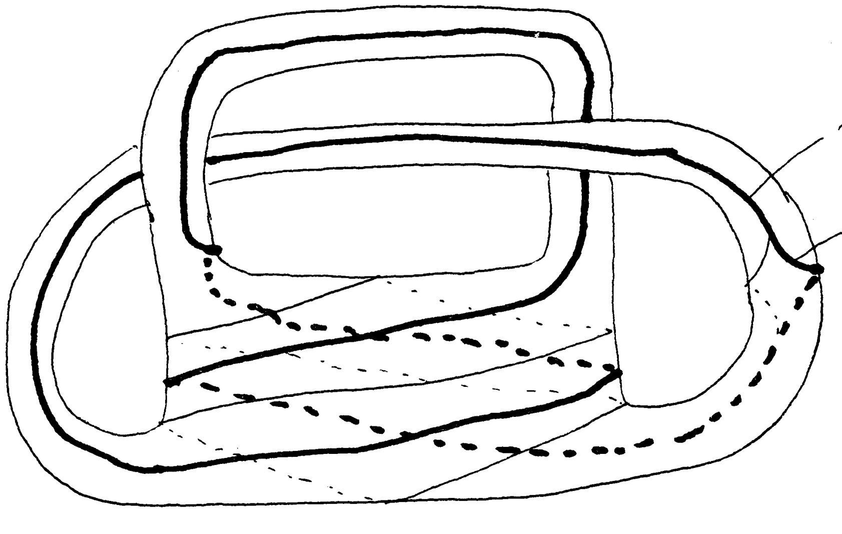


図 12

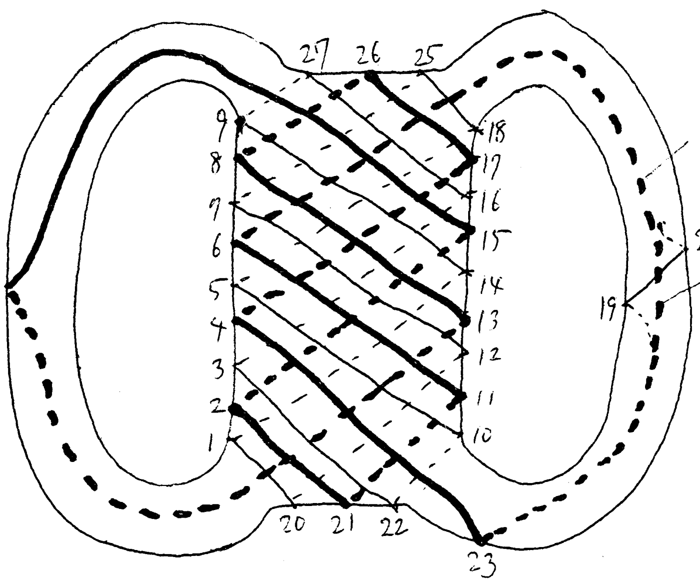


図 13

これから 2-fold branched covering を作ると

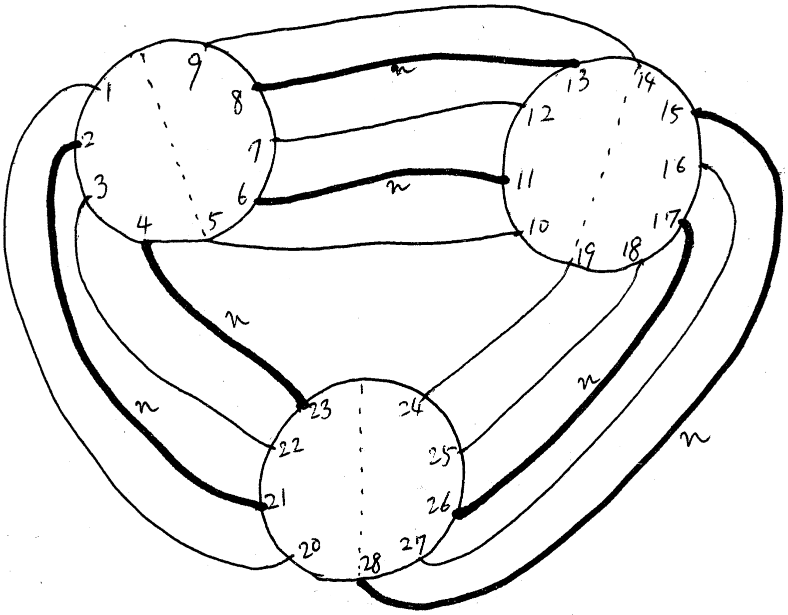

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
n
n
n
n
n
n

図 14

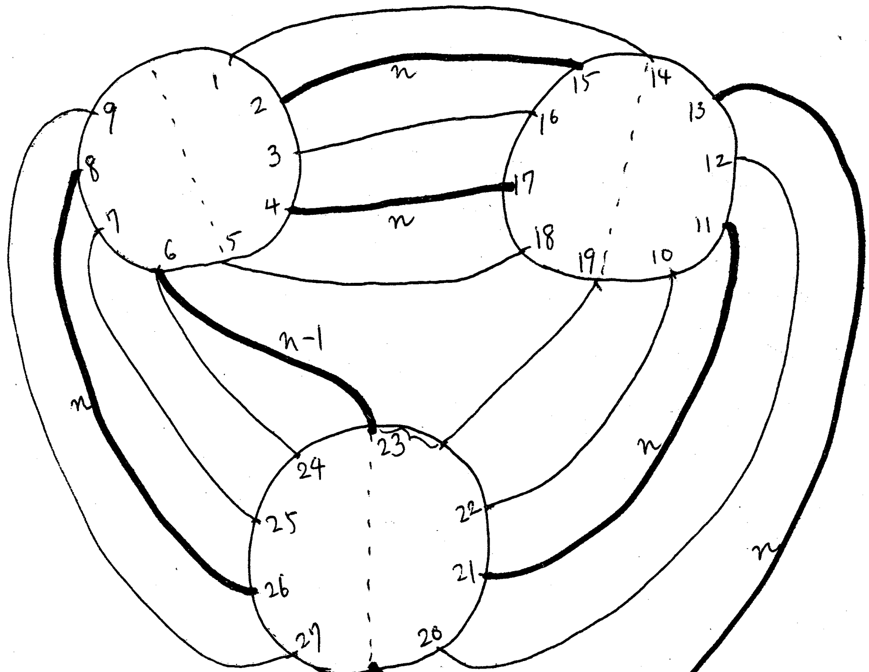

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
n
n
n-1
n
n
n

図 15

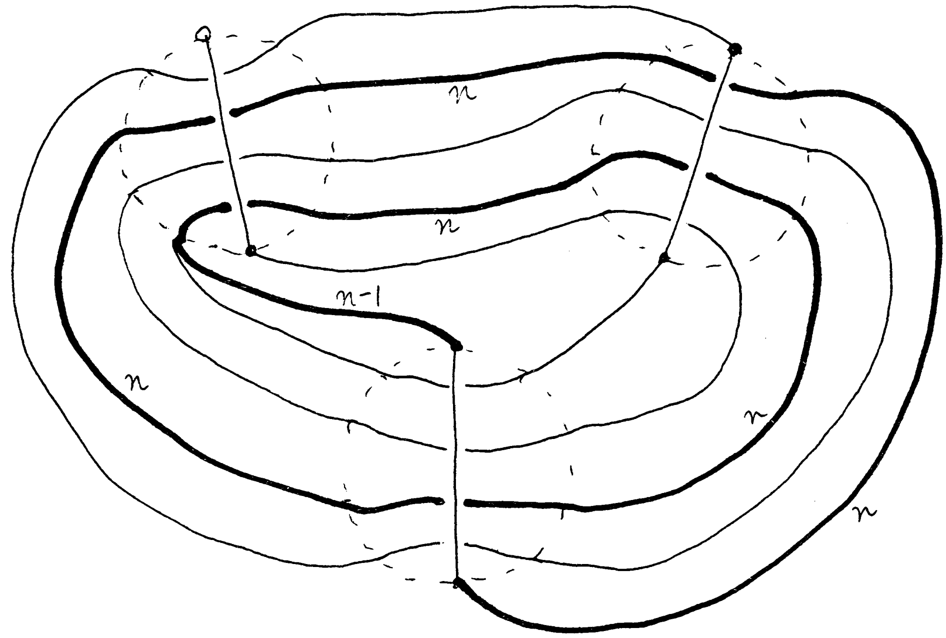


図 16

これがこの場合の knot である. $n=2$ の場合は図17となる

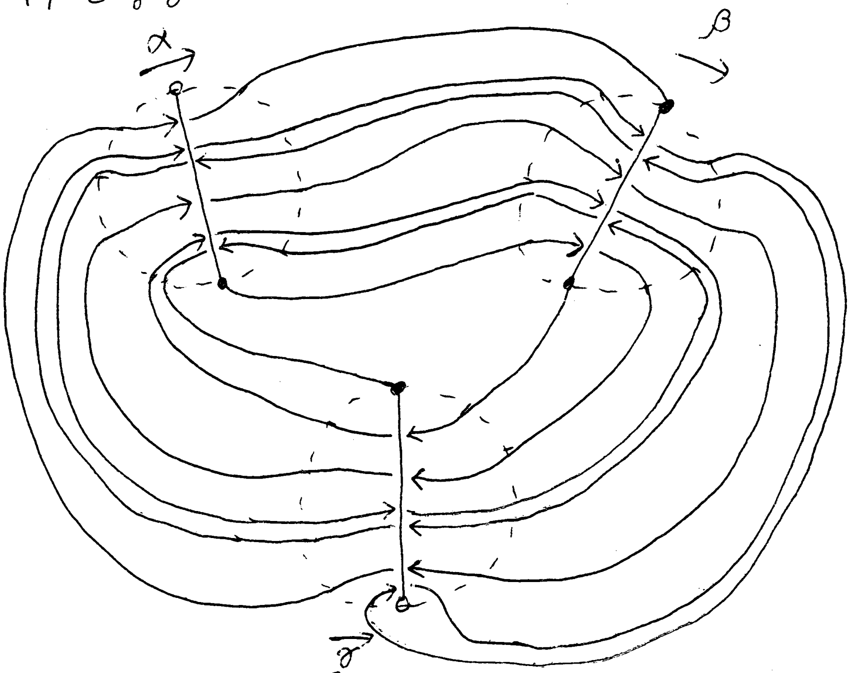


図 17

$$\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha = \beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$$

一般の $n=2k$ の場合は knot group の relations は

$$\mathrm{I}:\ \alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha = \beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$\mathrm{II}:\ \beta(\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1})^{k}$$
$$= (\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1})^{k}\gamma$$

Alexander 多項式を計算すると

$$\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \alpha}\right)^{*} = x^{2} \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \beta}\right)^{*} = -1$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \alpha}\right)^{*} = k(1+x-x^{2}-x) - k(x^{-1}+1-x-1)$$
$$= -kx^{-1}+k+kx-kx^{2}$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \beta}\right)^{*} = (1+k(x+x^{2}-x^{3}-x^{2})) - k(1+x-x^{2}-x)$$
$$= (1-k)+kx+kx^{2}-kx^{3}$$

$$\Delta_2 = x\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \alpha}\right)^{*} & \left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \alpha}\right)^{*} \\ \left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \beta}\right)^{*} & \left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial \beta}\right)^{*} \end{vmatrix}$$

$$= -k+kx+kx^{2}+(1-2k)x^{3}+kx^{4}+kx^{5}-kx^{6}$$

kの任意の値に対して $\Delta_1 \neq \Delta_2$. 故に 2つの knots は異なる. 従って M はこれらの相異なる

2つの knots の 2-fold branched covering となる.

$n=3$ の場合の knot は

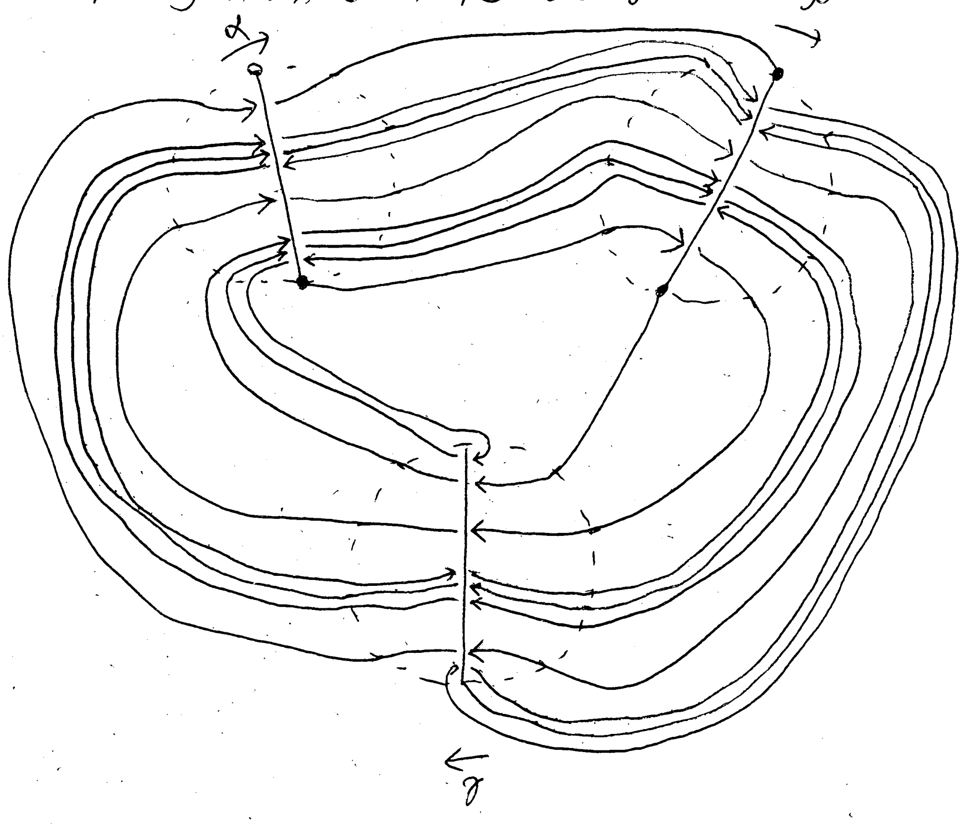


図 18

$$\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha = \beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$

$$\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$
$$= \gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$$

となる. 一般の $n=2k+1$ の場合には knot group の relations は

I: $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha=\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$

II: $\beta(\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})^k\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$

$=(\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})^k\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$

これから Alexander 多項式を計算すると

$$\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial\alpha}\right)^*=1-x^2+x^3-x^5+x^6,\quad \left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial\beta}\right)^*=-1+x-x^3+x^4-x^6$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial\alpha}\right)^*=\{k(x^2+x^5-x^4-x)+x^2+x^5\}$$
$$-\{k(x+x^4-x^3-1)+x+x^4\}$$
$$=k-(2k+1)x+(k+1)x^2+kx^3-(2k+1)x^4+(k+1)x^5$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial\beta}\right)^*=\{1+k(x^3+x^6-x^5-x^2)+x^3+x^6\}$$
$$-\{k(x^2+x^5-x^4-x)+x^2+x^5\}$$
$$=1+kx-(2k+1)x^2+(k+1)x^3+kx^4-(2k+1)x^5+(k+1)x^6$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial\alpha}\right)^* & \left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial\alpha}\right)^* \\ \left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial\beta}\right)^* & \left(\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial\beta}\right)^*\end{vmatrix}$$

$$=(k+1)-(2k+1)x+kx^2+(k+1)x^3-(2k+1)x^4+kx^5+x^6$$
$$+kx^7-(2k+1)x^8+(k+1)x^9+kx^{10}-(2k+1)x^{11}+(k+1)x^{12}$$

この場合も $\Delta_1 \neq \Delta_2$.

故にすべての場合 M は相異なる2つの knots

の2-fold branched coveringとなることが示された。

参考文献

[1] R.H. Bing：Poincaré予想に関連した3次元多様体のトポロジーの諸相，現代の数学II，130-176.

[2] J.S. Birman, F. González-Acuña, and J.M. Montesinos：Heegaard splittings of prime 3-manifolds are not unique, Michigan Math. J. 23 (1976), 97-103.

[3] J.S. Birman and H.M. Hilden：The homeomorphism problem for S^3. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 1006-1010.

[4] J.S. Birman and H.M. Hilden：Heegaard splittings of branched coverings of S^3. Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 315-352.

[5] R.H. Crowell and R.H. Fox：Introduction to knot theory. 1963 Boston.

[6] M. Takahashi : Two knots with the same 2-fold branched covering space. to appear in Yokohama Math. J.

[7] M. Takahashi : An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem, to appear in Tsukuba J. of Math.