数理解析研究所講究録
第 310 巻 1977 年 19-31

反復解の成分毎事後誤差評価

愛媛大 理　山本 哲朗

§1. 序

R^nにおける非線形方程式

$$f(x)=(f_1(x),\cdots f_n(x))^t=0,\quad x=(x_1,\cdots,x_n)^t \qquad (1)$$

を解く一般 Newton 反復

$$x^{(\nu+1)}=x^{(\nu)}-A(x^{(\nu)})f(x^{(\nu)}),\ \nu\geqq 0 \quad (A(x):n\times n\text{行列}) \qquad (2)$$

を考える. 以下この反復は well-defined, すなわち, fの定義域に含まれる閉凸領域$\mathcal{D}$を適当にとり, $x^{(\nu)}\in\mathcal{D}\subseteq R^n$とする.

次の記号と定義をおく.

$B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$: 同じ型の長方形行列とするとき

$$B\geqq C \text{ or } C\leqq B \iff b_{ij}\geqq c_{ij}\ (\forall i,j)$$

$$B>C \text{ or } C<B \iff b_{ij}>c_{ij}\ (\forall i,j)$$

$$B\gneqq C \text{ or } C\lneqq B \iff B\geqq C \ \&\ B\neq C$$

$$B\geqq 0 \text{ or } 0\leqq B \iff b_{ij}\geqq 0\ (\forall i,j)$$

$$\wp(B)=(|b_{ij}|)$$

B: 正方行列のとき　$\rho(B)=$: Bのスペクトル半径

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \quad , \quad \|B\| = \max_{\|x\|=1}\|Bx\| = \max_{j}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|$$

$$U(u,d) = \{x \in R^n \mid \alpha(x-u) < d\} \quad (u, d \in R^n)$$

$$\bar{U}(u,d) = \{x \in R^n \mid \alpha(x-u) \leqq d\}$$

$$S(u,r) = \{x \in R^n \mid \|x-u\| < r\} \quad (u \in R^n, 0<r \in R)$$

$$\bar{S}(u,r) = \{x \in R^n \mid \|x-u\| \leqq r\}$$

$$K(x) = I - A(x)J(x) \ , \quad K^{(\nu)} = K(x^{(\nu)}) \ , \quad \rho(K^{(\nu)}) < 1 \ , \quad A^{(\nu)} = \alpha(A(x^{(\nu)}))$$

$$\varepsilon^{(\nu)} = \alpha(A(x^{(\nu)})f(x^{(\nu)})) = \alpha(x^{(\nu)} - x^{(\nu+1)})$$

$$e^{(\nu)} = (I - K^{(\nu)})^{-1}\varepsilon^{(\nu)} = (I + K^{(\nu)} + K^{(\nu)2} + \cdots)\varepsilon^{(\nu)}$$

$$\bar{S}(x^{(\nu)}, 2\|e^{(\nu)}\|) \subseteq \mathcal{D}$$

$$\max_{j,k}\left|\frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leqq \begin{cases} m_i^{(\nu)} & (x \in \bar{S}(x^{(\nu)}, 2\|e^{(\nu)}\|)) \\ m_i & (x \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

$$m^{(\nu)} = \begin{pmatrix} m_1^{(\nu)} \\ \vdots \\ m_n^{(\nu)} \end{pmatrix} \gneqq 0 \ , \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \gneqq 0$$

$$M^{(\nu)} = m^{(\nu)}(1,\cdots,1) = \begin{pmatrix} m_1^{(\nu)} & \cdots & m_1^{(\nu)} \\ & \cdots & \\ m_n^{(\nu)} & \cdots & m_n^{(\nu)} \end{pmatrix} \ , \quad M = m(1,\cdots,1)$$

$$p^{(\nu)} = (I - K^{(\nu)})^{-1}A^{(\nu)}m^{(\nu)} \ , \quad g^{(\nu)} = (I - K^{(\nu)})^{-1}A^{(\nu)}m$$

本講の目的は，最近占部[2]，[3]により論じられた反復解の成分毎誤差評価法を幾分改良し，実計算において容易に適用可能な形に定式化することである．ただし f についての仮定はやゝ強く，C^2 級（$\mathcal{D}$ において）とする．計算例も併せて掲げ，その有効性を示す．

§2. 主結果

次のことが成り立つ. 以下 ν は固定する.

定理 1. $\|K^{(\nu)}\|^2 + 2\|p^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\| < 1$

$$\alpha^{(\nu)} = e^{(\nu)} + \frac{\|e^{(\nu)}\|^2}{1-\|p^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\| + \sqrt{1-2\|p^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\|}}\, p^{(\nu)}$$

$$\bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}) \subseteqq \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \quad \exists_1\, x^* \in \bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$$

系. 定理1の仮定の下で

$$\alpha(x^{(\nu)} - x^*) \leqq \alpha^{(\nu)}$$

$$\alpha(x^{(\nu+1)} - x^*) \leqq \alpha^{(\nu)} - \varepsilon^{(\nu)}$$

$$= K^{(\nu)} e^{(\nu)} + \frac{\|e^{(\nu)}\|^2}{1-\|p^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\| + \sqrt{1-2\|p^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\|}}\, p^{(\nu)}$$

定理 2. $\|K^{(\nu)}\|^2 + 2\|g^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\| < 1$

$$r_\nu = \frac{1 + \sqrt{1-2\|g^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\|}}{\|g^{(\nu)}\|}$$

$$S(x^{(\nu)}, r_\nu) \subseteqq \mathcal{D}$$

$\Rightarrow$ 解 x^* は $S(x^{(\nu)}, r_\nu)$ において一意的である.

§3 補題

上の定理を証明するために, いくつかの補題を述べる.

補題 1. u, v はベクトルで $u \gneqq 0$, $v \geqq 0$, $\|u\|\cdot\|v\| < 1$ とする. このとき, ベクトル方程式 $\|x\|^2 u - 2x + v = 0$ は $0 \lneqq \alpha \lneqq \beta$ なる解 α, β をもつ. しかし $\|\alpha\|, \|\beta\|$ はスカラー 2次方程

式 $\|u\|t^2 - 2t + \|v\| = 0$ の2根である.

証明. 直接計算.

$$\alpha = \frac{1}{2}v + \frac{1}{\|u\|}\left\{1 - \frac{\|u\|\cdot\|v\|}{2} - \sqrt{1-\|u\|\cdot\|v\|}\right\}u$$

$$\beta = \frac{1}{2}v + \frac{1}{\|u\|}\left\{1 - \frac{\|u\|\cdot\|v\|}{2} + \sqrt{1-\|u\|\cdot\|v\|}\right\}u.$$

定義. この補題にいう α を最小解, β を最大解という.

注意. この定義によれば, 定理1の $\alpha^{(\nu)}$ は

$$\|x\|^2 p^{(\nu)} - 2x + 2e^{(\nu)} = 0$$

の最小解, 定理2の r_ν は

$$\|x\|^2 q^{(\nu)} - 2x + 2e^{(\nu)} = 0$$

の最大解を $\beta^{(\nu)}$ とするとき, $r_\nu = \|\beta^{(\nu)}\|$.

補題2. $u \gneqq 0$, $v \geqq 0$ とする.

(i) ある $x \geqq 0$ につき $\|x\|^2 u - 2x + v \leqq 0 \Rightarrow \|u\|\cdot\|v\| < 1$

$\alpha \leqq x$ かつ $\|x\| < \|\beta\|$

特に $u > 0 \Rightarrow \alpha < x$

(ii) $\|u\|\cdot\|v\| < 1$ かつ ある $y \geqq 0$ につき $\|y\|^2 u - 2y + v \geqq 0$

$\Rightarrow y \leqq \alpha$ or $\|y\| \geqq \|\beta\|$

証明. (i) $\|x\|^2 u + v \leqq 2x$ より $\|x\|^2\|u\| + \|v\| < 2\|x\|$

$\therefore \|u\|\cdot\|v\| < 1$, $\|\alpha\| < \|x\| < \|\beta\|$

また $0 \geqq \|x\|^2 u - 2x + v = \|x\|^2 u - 2x + (2\alpha - \|\alpha\|^2 u)$

$= (\|x\|^2 - \|\alpha\|^2)u - 2(x - \alpha)$

$\therefore x - \alpha \geqq \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|\alpha\|^2)u \quad \therefore x - \alpha \begin{cases} \geqq 0 \\ > 0 \ (\text{if } u > 0) \end{cases}$

(ii) 同様.

補題3. $\|p^{(\nu)}\| > 0$

証明. $\rho(K(x^{(\nu)})) \leqq \rho(K^{(\nu)}) < 1$ より $A(x^{(\nu)})J(x^{(\nu)}) = I - K(x^{(\nu)})$ は正則. よって $A(x^{(\nu)})$, $J(x^{(\nu)})$ は正則である.

$m^{(\nu)} \gneqq 0$ より $m_j^{(\nu)} > 0$ なる j があるが, $A(x^{(\nu)})$ の第j列は 0 ベクトルでない. たとえば第k成分 $\neq 0$ とすれば, の$(A(x^{(\nu)}))m^{(\nu)}$ の第k成分 > 0. よって

$$p^{(\nu)} = (I + K^{(\nu)} + K^{(\nu)2} + \cdots)A^{(\nu)}m^{(\nu)} \geqq A^{(\nu)}m^{(\nu)} \gneqq 0.$$

補題4. $\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}$: $\|x\|^2 p^{(\nu)} - 2x + 2e^{(\nu)} = 0$ の最小, 最大解

$\hat{\alpha}^{(\nu)}, \hat{\beta}^{(\nu)}$: $\|x\|^2 q^{(\nu)} - 2x + 2e^{(\nu)} = 0$ の最小, 最大解

とする.

(i) $2\|p^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\| < 1 \Rightarrow \|\alpha^{(\nu)}\| < 2\|e^{(\nu)}\|$

(ii) $2\|q^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\| < 1 \Rightarrow \alpha^{(\nu)} \leqq \hat{\alpha}^{(\nu)}$, $\|\hat{\alpha}^{(\nu)}\| < 2\|e^{(\nu)}\| < \|\hat{\beta}^{(\nu)}\| \leqq \|\beta^{(\nu)}\|$

証明 (i) $\|\alpha^{(\nu)}\|$ は $\varphi(t) = \|p^{(\nu)}\|t^2 - 2t + 2\|e^{(\nu)}\| = 0$ の最小根

かつ $\varphi(2\|e^{(\nu)}\|) = (2\|e^{(\nu)}\| \cdot \|p^{(\nu)}\| - 1)\, 2\|e^{(\nu)}\| < 0$

$$\therefore \|\alpha^{(\nu)}\| < 2\|e^{(\nu)}\| < \|\beta^{(\nu)}\|.$$

(ii) $p^{(\nu)} \leqq q^{(\nu)}$ より

$$\|\hat{\alpha}^{(\nu)}\|^2 p^{(\nu)} - 2\hat{\alpha}^{(\nu)} + 2e^{(\nu)} \leqq \|\hat{\alpha}^{(\nu)}\|^2 q^{(\nu)} - 2\hat{\alpha}^{(\nu)} + 2e^{(\nu)} = 0$$

$\therefore \alpha^{(\nu)} \leqq \hat{\alpha}^{(\nu)}$ (補題2による)

また $2\|e^{(\nu)}\|^2\|q^{(\nu)}\| - 2(2\|e^{(\nu)}\|) + 2\|e^{(\nu)}\| = 2\|e^{(\nu)}\|(2\|e^{(\nu)}\| \cdot \|q^{(\nu)}\| - 1) < 0$

$$\therefore \|\hat{\alpha}^{(\nu)}\| < 2\|e^{(\nu)}\| < \|\hat{\beta}^{(\nu)}\| = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\|q^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\|}}{\|q^{(\nu)}\|} \leqq \|\beta^{(\nu)}\|$$

補題 5. Ω: R^nの閉領域, $g:\Omega\to\Omega$

$$\frown(g(x)-g(y)) \leqq L\frown(x-y) \quad (x,y\in\Omega)$$

$$L\geqq 0 : n\times n \text{ 行列}, \quad \rho(L)<1$$

$\Rightarrow \exists_1 x^* \in \Omega;\ g(x^*)=x^*$

証明. 縮小写像の原理の証明と同じ. 本質的に占部に負う.

補題 6. $f''(x)=\left(\dfrac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ ($R^n\times R^n\to R^n$の双線形写像) が $\mathcal{D}$ において存在しかつ連続ならば, $\forall y, z\in R^n$に対し

$$\frown(f''(x)y) \leqq \begin{cases} \|y\| M^{(\nu)} & (x\in \bar{S}(x^{(\nu)}, 2\|e^{(\nu)}\|)) \\ \|y\| M & (x\in\mathcal{D}) \end{cases}$$

$$\frown(f''(x)y\cdot z) \leqq \begin{cases} \|y\| M^{(\nu)}\frown(z)=\|y\|\cdot\|z\|\, m^{(\nu)} & (x\in \bar{S}(x^{(\nu)}, 2\|e^{(\nu)}\|)) \\ \|y\| M\frown(z)=\|y\|\cdot\|z\|\, m & (x\in\mathcal{D}) \end{cases}$$

証明 殆んど自明

§4. 定理1の証明

$$g(x)=x-A(x^{(\nu)})f(x), \quad L^{(\nu)}=K^{(\nu)}+\|\alpha^{(\nu)}\|\cdot A^{(\nu)}M^{(\nu)}$$

とおくとき, 次のことがらが成り立つ.

(i) $x, y\in \bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}) \Rightarrow \frown(g(x)-g(y))\leqq L^{(\nu)}\frown(x-y)$

(ii) $\rho(L^{(\nu)})<1$

(iii) $x\in \bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})\subseteq\mathcal{D} \Rightarrow g(x)\in \bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$

実際, $x, y\in \bar{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$ なら

(i) $g(x)-g(y)=x-y-A(x^{(\nu)})(f(x)-f(y))$

$$= x - y - A(x^{(\nu)}) \int_0^1 f'(u)(x-y)dt \qquad u = y + t(x-y) \in \overline{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$$

$$= x - y - A(x^{(\nu)}) \int_0^1 \{ f'(x^{(\nu)}) + \int_0^1 f''(v)(u - x^{(\nu)}) d\theta \} (x-y)\, dt$$

$$\left(\begin{array}{l} v = x^{(\nu)} + \theta(u - x^{(\nu)}) \in \overline{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}) \\ \qquad \subset S(x^{(\nu)}, 2\|e^{(\nu)}\|) \end{array} \right)$$

$$= [I - A(x^{(\nu)}) J(x^{(\nu)})](x-y) - A(x^{(\nu)}) \int_0^1 \int_0^1 f''(v)(u - x^{(\nu)})(x-y)\, d\theta dt$$

$$\therefore \ \sigma(g(x) - g(y)) \leqq K^{(\nu)} \sigma(x-y) + A^{(\nu)} \int_0^1 \int_0^1 \|u - x^{(\nu)}\| \cdot M^{(\nu)} \sigma(x-y)\, d\theta dt$$

$$\leqq L^{(\nu)} \sigma(x-y) , \qquad L^{(\nu)} = K^{(\nu)} + \overset{\|\alpha^{(\nu)}\|}{\vee} A^{(\nu)} M^{(\nu)} \qquad \because \|u - x^{(\nu)}\| \leqq \|\alpha^{(\nu)}\| \leqq 2\|e^{(\nu)}\|$$

(ii) $\|L^{(\nu)}\| \leqq \|K^{(\nu)}\| + \|\alpha^{(\nu)}\| \cdot \|A^{(\nu)} M^{(\nu)}\| = \|K^{(\nu)}\| + \|\alpha^{(\nu)}\| \cdot \|A^{(\nu)} m^{(\nu)}\|$

$$= \|K^{(\nu)}\| + \frac{1 - \sqrt{1 - 2\|p^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\|}}{\|p^{(\nu)}\|} \|A^{(\nu)} m^{(\nu)}\|$$

$$\leqq \|K^{(\nu)}\| + \left(1 - \sqrt{1 - 2\|p^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\|}\right) < 1$$

$$\therefore \ \rho(L^{(\nu)}) < 1 \qquad\qquad \left(\because \ \rightleftarrows \ \|K^{(\nu)}\|^2 + 2\|p^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\| < 1 \right)$$

(iii) $x \in \overline{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$ のとき $f(x) = f(x^{(\nu)}) + f'(x^{(\nu)})(x - x^{(\nu)}) + R(x, x^{(\nu)})$

ただし $\quad R(x, x^{(\nu)}) = \int_0^1 (1-t) f''(x^{(\nu)} + t(x - x^{(\nu)}))(x - x^{(\nu)})^2 dt$

$$\therefore \ g(x) - x^{(\nu)} = x - x^{(\nu)} - A(x^{(\nu)})[f(x^{(\nu)}) + f'(x^{(\nu)})(x - x^{(\nu)}) + R(x, x^{(\nu)})]$$

$$= K(x^{(\nu)})(x - x^{(\nu)}) + (x^{(\nu+1)} - x^{(\nu)}) - A(x^{(\nu)}) R(x, x^{(\nu)})$$

$$\sigma(g(x) - x^{(\nu)}) \leqq K^{(\nu)} \sigma(x - x^{(\nu)}) + \varepsilon^{(\nu)} + A^{(\nu)} \cdot \frac{1}{2} \|x - x^{(\nu)}\|^2 m^{(\nu)}$$

$$\leqq K^{(\nu)} \alpha^{(\nu)} + \varepsilon^{(\nu)} + \frac{1}{2} \|\alpha^{(\nu)}\|^2 A^{(\nu)} m^{(\nu)} = \alpha^{(\nu)}$$

$$\therefore \ g(x) \in \overline{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$$

以上 (i),(ii),(iii) によって，補題5 が $\Omega = \overline{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)})$ に対して適用できる.

さらにこの定理の柔を示すためには

$$0 = f(x^*) = f(x^{(\nu)}) + f'(x^{(\nu)})(x^* - x^{(\nu)}) + R(x^*, x^{(\nu)})$$

に注意して

$$x^{(\nu+1)}-x^*=x^{(\nu)}-x^*-A(x^{(\nu)})f(x^{(\nu)})$$

$$=x^{(\nu)}-x^*-A(x^{(\nu)})[f'(x^{(\nu)})(x^{(\nu)}-x^*)-R(x^*,x^{(\nu)})]$$

$$=K(x^{(\nu)})(x^{(\nu)}-x^*)+A(x^{(\nu)})R(x^*,x^{(\nu)})$$

$$\therefore \frown(x^{(\nu+1)}-x^*)\leqq K^{(\nu)}\frown(x^{(\nu)}-x^*)+A^{(\nu)}\frown(R(x^*,x^{(\nu)})) \qquad (3)$$

$$=K^{(\nu)}\frown(x^{(\nu)}-x^*)+\frac{1}{2}\|x^{(\nu)}-x^*\|^2A^{(\nu)}m^{(\nu)}$$

$$=K^{(\nu)}\alpha^{(\nu)}+\frac{1}{2}\|\alpha^{(\nu)}\|^2A^{(\nu)}m^{(\nu)}$$

$$=\alpha^{(\nu)}-\varepsilon^{(\nu)}$$

$$=K^{(\nu)}e^{(\nu)}+\frac{\|e^{(\nu)}\|^2}{1-\|p^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\|+\sqrt{1-2\|p^{(\nu)}\|\cdot\|e^{(\nu)}\|}}\,p^{(\nu)}$$

§5 定理2の証明

$\hat{x}$ を D における他の解 ($\hat{x}\neq x^*$, $\hat{x}\in\mathcal{D}$) とする.

$$\frown(x^{(\nu)}-\hat{x})\leqq\frown(x^{(\nu)}-x^{(\nu+1)})+\frown(x^{(\nu+1)}-\hat{x})$$

$$\leqq\varepsilon^{(\nu)}+K^{(\nu)}\frown(x^{(\nu)}-\hat{x})+A^{(\nu)}\frown(R(\hat{x},x^{(\nu)})) \quad ((3)による)$$

$$\leqq\varepsilon^{(\nu)}+K^{(\nu)}\frown(x^{(\nu)}-\hat{x})+\frac{1}{2}\|x^{(\nu)}-\hat{x}\|^2A^{(\nu)}m$$

$$\therefore \|x^{(\nu)}-\hat{x}\|^2A^{(\nu)}m-2(I-K^{(\nu)})\frown(x^{(\nu)}-\hat{x})+2\varepsilon^{(\nu)}\geqq 0$$

$$\|x^{(\nu)}-\hat{x}\|^2q^{(\nu)}-2\frown(x^{(\nu)}-\hat{x})+2e^{(\nu)}\geqq 0$$

$$\therefore \frown(x^{(\nu)}-\hat{x})\leqq\hat{\alpha}^{(\nu)} \quad \text{or} \quad \|x^{(\nu)}-\hat{x}\|\geqq\|\hat{\beta}^{(\nu)}\| \qquad (4)$$

ここに $\hat{\alpha}^{(\nu)}$, $\hat{\beta}^{(\nu)}$ は $\|x\|^2q^{(\nu)}-2x+2e^{(\nu)}=0$ の最小, 最大解

前節 (i) の証明と同様に

$$x^*\in\overline{U}(x^{(\nu)},\alpha^{(\nu)})\subset\overline{U}(x^{(\nu)},\hat{\alpha}^{(\nu)}) \quad (補題4\,(ii)による)$$

であることに注意して

$$\hat{x} \in \overline{U}(x^{(\nu)}, \hat{\alpha}^{(\nu)}) \overset{\subset D}{\Rightarrow} \sigma(\hat{x} - x^*) = \sigma(g(\hat{x}) - g(x^*))$$

$$\le (K^{(\nu)} + \|\hat{\alpha}^{(\nu)}\| A^{(\nu)} M)\,\sigma(\hat{x} - x^*)$$

$$= \hat{L}^{(\nu)} \sigma(\hat{x} - x^*), \quad \hat{L}^{(\nu)} = K^{(\nu)} + \|\hat{\alpha}^{(\nu)}\| A^{(\nu)} M$$

$$\|\hat{L}^{(\nu)}\| \le \|K^{(\nu)}\| + \frac{1 + \sqrt{1 - 2\|g^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\|}}{\|g^{(\nu)}\|} \|A^{(\nu)} m\| < 1$$

$$(\rightleftarrows \|K^{(\nu)}\|^2 + 2\|g^{(\nu)}\| \|e^{(\nu)}\| < 1)$$

よって $\|\hat{x} - x^*\| \le \|\hat{L}^{(\nu)}\| \cdot \|\hat{x} - x^*\| < \|\hat{x} - x^*\|$ これは矛盾

結局 (4) より $\|x^{(\nu)} - \hat{x}\| \ge \|\beta^{(\nu)}\| = r_\nu$

すなわち解 x^* は $S(x^{(\nu)}, r_\nu)$ で一意的

§6 諸注意

注意 1. $\rho(K^{(\nu)}) < 1 \Rightarrow J(x^{(\nu)})$ は正則 しかし $J(x^*)$ の正則性は不明である. ゆえに x^* は単純とは限らない. (ただし, 重根の場合には, 定理の仮定 $\|K^{(\nu)}\|^2 + 2\|p^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\| < 1$ 等がみたされない場合が多かろう.

注意 2. 定理 1 の系における評価 $\sigma(x^{(\nu+1)} - x^*) \le \alpha^{(\nu)} - \varepsilon^{(\nu)}$ は a priori の性格をもつ. ($\sigma(x^{(\nu+1)} - x^*) \le \alpha^{(\nu+1)}$ の方が一般に sharp)

注意 3. 定理 1 の存在領域は次に述べる意味で最良のものである. すなわち, いまあるベクトル $\delta \ge 0$ に対し

$$x^* \in \overline{U}(x^{(\nu)}, \delta) \subset \overline{U}(x^{(\nu)}, 2e^{(\nu)})$$

とすれば

$$\Lambda^{(\nu)} = K^{(\nu)} + \frac{1}{2}\|\delta\| A^{(\nu)} M^{(\nu)}$$

とおくとき

$$\omega(x^{(\nu)}-x^*) \leqq \omega(x^{(\nu)}-x^{(\nu+1)}) + \omega(x^{(\nu+1)}-x^*)$$

$$\leqq \varepsilon^{(\nu)} + K^{(\nu)}\omega(x^{(\nu)}-x^*) + \frac{1}{2}\|x^{(\nu)}-x^*\|^2 A^{(\nu)} m^{(\nu)}$$

$$\leqq \varepsilon^{(\nu)} + \left(K^{(\nu)} + \frac{1}{2}\|x^{(\nu)}-x^*\| A^{(\nu)} m^{(\nu)}\right)\omega(x^{(\nu)}-x^*)$$

$$\leqq \varepsilon^{(\nu)} + \Lambda^{(\nu)}\omega(x^{(\nu)}-x^*)$$

$$\therefore\ (I-\Lambda^{(\nu)})\,\omega(x^{(\nu)}-x^*) \leqq \varepsilon^{(\nu)}$$

ここで $\rho(\Lambda^{(\nu)})<1$ と仮定すれば $\omega(x^{(\nu)}-x^*) \leqq (I-\Lambda^{(\nu)})^{-1}\varepsilon^{(\nu)} \equiv \delta^{(\nu)}$

この評価が $x^*\in \overline{S}(x^{(\nu)},\delta)$ なる評価を改良するためには $\delta^{(\nu)} \lneqq \delta$ であるべきであろう. しかし $m^{(\nu)}\gneqq 0$, $\varepsilon^{(\nu)}\gneqq 0$, $\delta^{(\nu)}\lneqq\delta$ ならば $\omega(x^{(\nu)}-x^*) \leqq \alpha^{(\nu)} \lneqq \delta^{(\nu)}$ が成り立つ.

$\because\ \|\delta^{(\nu)}\| < \|\delta\|$, $\varepsilon^{(\nu)} = (I-\Lambda^{(\nu)})\delta^{(\nu)}$ より

$$\|\delta^{(\nu)}\|^2 p^{(\nu)} - 2\delta^{(\nu)} + 2e^{(\nu)}$$

$$= (I-K^{(\nu)})^{-1}\left[\|\delta^{(\nu)}\|A^{(\nu)}M^{(\nu)} - 2(\Lambda^{(\nu)}-K^{(\nu)})\right]\delta^{(\nu)}$$

$$= (\|\delta^{(\nu)}\|-\|\delta\|)(I-K^{(\nu)})^{-1}A^{(\nu)}M^{(\nu)}\delta^{(\nu)}$$

$$= (\|\delta^{(\nu)}\|-\|\delta\|)\|\delta^{(\nu)}\|\, p^{(\nu)} \lneqq 0 \quad (\because\ p^{(\nu)}\gneqq 0)$$

よって補題2(i)によって $\alpha^{(\nu)}\lneqq\delta^{(\nu)}$

注意4. ノルム評価への応用

$\xi^{(\nu)} = \omega(x^{(\nu)}-x^*)$, $\kappa_\nu = \|K^{(\nu)}\|$, $c_\nu = \|A^{(\nu)}m^{(\nu)}\|$ とする.

$\varepsilon^{(\nu)} \leqq \omega(x^{(\nu)}-x^*) + \omega(x^{(\nu+1)}-x^*)$

$$\leqq \xi^{(\nu)} + K^{(\nu)}\xi^{(\nu)} + \frac{1}{2}\|\xi^{(\nu)}\|^2 A^{(\nu)} m^{(\nu)}$$

$$\therefore \|\varepsilon^{(\nu)}\| \leqq \|\xi^{(\nu)}\| + \|K^{(\nu)}\| \cdot \|\xi^{(\nu)}\| + \frac{1}{2}\|\xi^{(\nu)}\|^2 \|A^{(\nu)} m^{(\nu)}\|$$

$$\therefore C_\nu \|\xi^{(\nu)}\|^2 + 2(1+\kappa_\nu)\|\xi^{(\nu)}\| - 2\|\varepsilon^{(\nu)}\| \geqq 0$$

$$\therefore \|\xi^{(\nu)}\| \geqq \frac{-(1+\kappa_\nu) + \sqrt{(1+\kappa_\nu)^2 + 2C_\nu\|\varepsilon^{(\nu)}\|}}{C_\nu}$$

$$= \frac{2\|\varepsilon^{(\nu)}\|}{1+\kappa_\nu + \sqrt{(1+\kappa_\nu)^2 + 2C_\nu\|\varepsilon^{(\nu)}\|}}$$

よって定理1と併せて

$$\kappa_\nu^2 + 2\|p^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\| < 1, \quad \overline{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}) \subset \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \exists x^* \in \overline{U}(x^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}) \text{ かつ}$$

$$\frac{2\|\varepsilon^{(\nu)}\|}{1+\kappa_\nu + \sqrt{(1+\kappa_\nu)^2 + 2C_\nu\|\varepsilon^{(\nu)}\|}} \leqq \|x^{(\nu)} - x^*\| \leqq \frac{2\|e^{(\nu)}\|}{1+\sqrt{1-2\|p^{(\nu)}\| \cdot \|e^{(\nu)}\|}}$$

同様な手法はノルム空間における高次反復法にも適用できる.

§7 数値例

次の簡単な方程式に Newton 法を適用してみる.

$$\begin{cases} f_1(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - (a^2+b^2+c^2) = 0 \\ f_2(x) \equiv x_1 + x_2 + 2x_3 - (a+b+2c) = 0 \qquad (a, b, c: \text{定数}) \\ f_3(x) \equiv x_1 x_2 + x_3 - ab - c = 0 \end{cases}$$

明らかに (a, b, c) と (b, a, c) は解である.

この場合 $\mathcal{D} = R^n$ かつ $m^{(\nu)} = m = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. 丸め誤差をさけるため, 4倍精度(FACOM230-75)で計算した. 結果の一

部を下表に示す．　表中の***印は，定理の仮定がみたされなかった（$2\|p^{(\nu)}\|\,\|e^{(\nu)}\| \geqq 1$，$p^{(\nu)}=q^{(\nu)}=A^{(\nu)}m$，$e^{(\nu)}=\varepsilon^{(\nu)}$）ことを示す．したがって，この場合誤差評価はできない．

表1　(a,b,c)=(3.5, 1.23, -17.8)

ν	$x^{(\nu)}$	$\alpha^{(\nu)}$	r_ν
0	0.10000000000000000000000000000+01		
	0.00000000000000000000000000000+00	***	***
	0.00000000000000000000000000000+00		
1	0.16580145000000000000000000000+03		
	0.16968145000000000000000000000+03	***	***
	-0.18317645000000000000000000000+03		
2	0.22112589532936277126988222704l+03		
	-0.56109787036153168768072007232 5+02	***	***
	-0.97943054146604801250905109904 0+02		
3	0.10836670622718773292586480597 8+03		
	-0.28422641523640780183404322003 1+02	***	***
	-0.55407032351773476371230241987 5+02		
⋮			
8	0.44590786406181523518509318744 0+01		
	0.27885237932804667197970823552 6+00	***	***
	-0.17803965509973099511915320055 0+02		
9	0.37182267550050087777551026895 7+01	0.24781+00	0.19+01
	0.10117762368847433359673880246 6+01	0.24781+00	
	-0.17800001495944876056861245357 1+02	0.97261-02	
10	0.35175958375636850590133956400 3+01	0.17735-01	0.20+01
	0.12124041624367410358904098226 3+01	0.17735-01	
	-0.17800000000000213047451902731 3+02	0.48041-04	
11	0.35001343113906322096309925647 7+01	0.13432-03	0.20+01
	0.12298656886093677903690074438 7+01	0.13432-03	
	-0.17800000000000000000000000004 3+02	0.27482-08	
12	0.35000000794599787555451823709+01	0.79460-08	0.20+01
	0.12299999920540021244454817629 1+01	0.79460-08	
	-0.17800000000000000000000000000 0+02	0.96175-17	
13	0.35000000000000000278144853728 1+01	0.27814-16	0.20+01
	0.12299999999999999721855146271 9+01	0.27814-16	
	-0.17800000000000000000000000000 0+02	0.11786-33	

上の表は，初期値をでたらめにえらんだ例である．解の成分のオーダーがかなり異なり，初期値をかなり近くにえらんだ例を表2に示す．

表2

(a,b,c) = (0.35+06, 0.123-02, -0.178+02)

ν	$x^{(\nu)}$	$\alpha^{(\nu)}$	r_ν
0	0.400000000000000000000000000000+06	0.51932+05	0.20+06
	0.100000000000000000000000000000-02	0.50574+04	
	-0.200000000000000000000000000000+02	0.66175+04	
1	0.353124921882906177865543170016+06	0.31397+04	0.23+06
	0.509959488591906428609546221421-02	0.32053+02	
	-0.158026287625053189230372805570+04	0.15858+04	
2	0.350017244854107071454919363226+06	0.17245+02	0.23+06
	0.128841189604142665772561916619-02	0.10144-02	
	-0.264224562594837481730104758551+02	0.86231+01	
3	0.350000000530999143887247488679+06	0.53100-03	0.23+06
	0.123000363445483790188443521285-02	0.36354-08	
	-0.178002655013891710426952817172+02	0.26550-03	
4	0.350000000000000000503488736564+06	0.50349-12	0.23+06
	0.123000000000000623148741475402-02	0.62315-17	
	-0.178000000000002517474840259381+02	0.25175-12	

[1] Ostrowski,A.M.: Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces, Academic Press 1973

[2] Urabe,M.: Component-wise error analysis of iterative methods practiced on a floating-point system, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser.A, Math.27(1973) 23-64

[3] Urabe,M.: A posteriori component-wise error estimation of approximate solutions to nonlinear equations, Lect.Notes in Computer Sci. 29, Springer 1975, 99-117