数理解析研究所講究録
第311巻 1977年 48-57

λよりも大きいブロック共有数をもつquasi-residual BIB design(v, b, r, k, λ)が存在するための必要条件

広島大 計算センター 小林 康幸
広島大 理学部 浜田 昇

§1. 序

BIB design D(v, b, r, k, λ)において，

$$v = k(k+\lambda-1)/\lambda, \quad b = v+k+\lambda-1, \quad r = k+\lambda \qquad (1.1)$$

が成り立つ時，このdesign Dをquasi-residual designという．また，quasi-residual design Dを含む対称なBIB design $(b+1, r, \lambda)$が存在する時，そのdesign DはSBIB designに"埋め込み可能(embeddable)"であるという．

一般に，会合数がλより大きいブロックが存在するquasi-residual design(v, b, r, k, λ)は，SBIB designに埋め込めないことは良く知られている．

ここでは，会合数がλより大きいブロックをもつquasi-residual design(v, b, r, k, λ)が存在するための必要条件を，ブロックの大きさkの範囲で与える．

§2. いままでの結果

定理 2.1. (Connor [2]) 任意のBIB design D(v, b, r, k, λ)が与えられた時，その異なる2つのブロック B_j, B_u ($j \neq u$) の会合数を s_{ju} とすると，

$$-(r-\lambda-k) \leqq s_{ju} \leqq \{2\lambda k + r(r-\lambda-k)\}/r$$

定理 2.2. (Hamada and Kobayashi [3]) 任意のBIB design D(v, b, r, k, λ)に対して，その incidence 行列を N とすると，$N^T N$ ($\equiv \| s_{\alpha\beta} \|$) は次の3条件を満たす $b \times b$ 対称行列でなければならない。

(a) $s_{\alpha\beta}$ は，$0 \leqq s_{\alpha\beta} \leqq k$，$s_{\alpha\alpha} = k$ なる整数，

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{b} s_{\alpha j} = \sum_{j=1}^{b} s_{j\beta} = rk$，

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{b} s_{\alpha j} s_{\beta j} = (r-\lambda) s_{\alpha\beta} + \lambda k^2$

(ただし，α, β は $1 \leqq \alpha, \beta \leqq b$ なる整数である)

§3. quasi-residual design のブロック構造

この節では，quasi-residual design D(v, b, r, k, λ)が会合数 s のブロックをもつ為には，k がどのような範囲であるか

を議論する．以下，s および λ は，$s \geqq \lambda+1$, $\lambda \geqq 3$ を仮定する．

<u>補題 3.1</u>　会合数が s のブロックをもつ quasi-residual design が存在するためには，k は，任意の整数 j に対して，次の不等式を満たさねばならない．

$$f_j(k;\lambda,s) \equiv j(j+1)k^2 - ck + d \geqq 0 \qquad (3.1)$$

ただし，

$$c = (4j-2)\lambda^2 + 2(s-j^2-j)\lambda + j(j+1),$$

$$d = 4\lambda^4 - (4j+14)\lambda^3 + \{8s+12j+6+j(j+1)\}\lambda^2 - \{2s^2+4sj+2s+3j(j+1)\}\lambda$$

<u>証明</u>　会合数が s のブロックをもつ quasi-residual design が存在したとし，その incidence 行列を N，$(s_{ij}) \equiv N^TN$ を $b\times b$ 対称行列とすると，一般性を失なわずに $s_{12}=s$ としてよい．$x_l = s_{1,l+2}$，$y_l = s_{2,l+2}$ $(l=1,2,\cdots,n-2)$ とすると，定理2.2より

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i = \sum_{i=2}^{b-2} y_i = k(k+\lambda-1) - s,$$

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i y_i = \lambda k^2 - ks, \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i^2 = \sum_{i=1}^{b-2} y_i^2 = \lambda k^2 - s^2$$

一方，x_i, y_i, λ は整数だから，任意の整数 j に対し，

$$\sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - 2\lambda + j + 1/2)^2 \geqq (b-2)/4 \qquad (3.3)$$

(1.1), (3.2)を使って整理すると結果を得る.　　　Q.E.D.

<u>補題 3.2</u>　会合数が s のブロックをもつ quasi-residual design が存在する為には, $s \leqq 2\lambda-1$, $\alpha \leqq k \leqq \beta$ でなければならない. ただし,

$$\alpha = \lambda s/(2\lambda - s),\ \beta = \{2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - s^2 - s\}/(s-\lambda) \quad (3.4)$$

<u>証明</u>　(3.1) で $j=0$ とすると,

$$f_0(k;\lambda,s) = 2\lambda\{(\lambda-s)k + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - (s^2+s)\}$$

従って $s \geqq \lambda+1$ だから $k \leqq \beta$ を得る. 次に定理 2.1 を quasi-residual design に適用すると, $s \leqq 2\lambda k/(k+\lambda)$. $2\lambda k/(k+\lambda) < 2\lambda$ を使って $s \leqq 2\lambda - 1$. 従って上の不等式を k について整理すると, $\alpha \leqq k$ を得る.　　　Q.E.D.

<u>補題 3.3</u>　$f_j(k;\lambda,s)$ および α, β をそれぞれ, (3.1) および (3.4) で定義したものとすると, $j \leqq -1$, $\alpha \leqq k \leqq \beta$ では常に $f_j(k;\lambda,s) \geqq 0$ である.

<u>証明</u>　(i) $j=-1$ の時

$\lambda+1 \leqq s \leqq 2\lambda-1$, $k \geqq \alpha = \lambda s/(2\lambda-s)$ より,

$$\begin{aligned} & f_{-1}(k;\lambda,s) \\ &= 2\lambda\{(3\lambda-s)k + 2\lambda^2(\lambda-1) + 2s + 3\lambda(s-\lambda-1) + s(2\lambda-1-s) - \lambda s\} \\ &\geqq 2\lambda\{(3\lambda-s)k - \lambda s\} \geqq 0 \end{aligned}$$

(ii) $j \leqq -2$ の時

$$f_j(k;\lambda,s) = a^* j^2 + b^* j + C^* \equiv g(j)$$

とおくと,

$$a^* = k^2 + (2\lambda-1)k + \lambda(\lambda-3) \quad (>0),$$

$$b^* = a^* - 4\lambda(\lambda k + \lambda^2 - 3\lambda + s), \qquad (3.5)$$

$$c^* = 2\lambda\{-(s-\lambda)k + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - (s^2+s)\}$$

従って,

$$-b^*/2a^* = -1/2 + 2\lambda(\lambda k + \lambda^2 - 3\lambda + s)/a^* > -1/2,$$

$$g(-2) = 2\{a^* + \lambda(5\lambda - s)k + 2\lambda^3(\lambda-2) + \lambda^2(\lambda+2s-9)$$
$$+ (2\lambda - s)s\lambda + 3s\lambda\} > 0$$

ゆえに, $j \leqq -2$ では $g(j) > 0$ Q.E.D.

さて, ここで k についての2次方程式

$$f_j(k; \lambda, s) = j(j+1)k^2 - ck + d = 0$$

の2根を α_j, β_j $(\alpha_j \leqq \beta_j)$, $m(j; \lambda, s)$ をその平均, すなわち

$$\alpha_j = \frac{c - \sqrt{D_j(\lambda, s)}}{2j(j+1)}, \quad \beta_j = \frac{c + \sqrt{D_j(\lambda, s)}}{2j(j+1)} \qquad (3.6)$$

$$m(j; \lambda, s) = c/\{2j(j+1)\}$$

と定義する. (ただし $D_j(\lambda, s) = c^2 - 4dj(j+1)$).

<u>補題 3.4</u> (i) $k = \alpha$ $(= \lambda s/(2\lambda - s))$ の時, 任意の j, λ, s に対し $f_j(\alpha; \lambda, s) \geqq 0$, かつ等号成立は $j = 2\lambda - s - 1$ または $2\lambda - s$ に限る.

(ii) 任意の λ, s に対し, $m(j; \lambda, s)$ は j $(\geqq 1)$ の単調減少関数であり,

(a) $m(j;\lambda,s) < \alpha \quad (j \geqq 2\lambda-s)$,

(b) $m(j;\lambda,s) > \alpha \quad (j \leqq 2\lambda-s-1)$

<u>証明</u> (i) (3.2), (1.1) から

$$\lambda\sum_{i=1}^{b-2}(x_i+y_i-s) = \{(2\lambda-s)k-\lambda s\}(k+s-1),$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{b-2}(x_i+y_i-s)^2 = \{(2\lambda-s)k-\lambda s\}\{(2\lambda-s)k-s(\lambda-1)\}$$

$$\therefore\quad f_j(k;\lambda,s) = \lambda\left\{\sum_{i=1}^{b-2}(x_i+y_i-2\lambda+j+\tfrac{1}{2})^2-(b-2)/4\right\}$$

$$= \lambda\sum_{i=1}^{b-2}(x_i+y_i-s)^2+2\lambda(s-2\lambda+j+\tfrac{1}{2})\sum_{i=1}^{b-2}(x_i+y_i-s)$$

$$+\ \lambda(b-2)\{(s-2\lambda+j+1/2)^2-1/4\}$$

e, f を, $e = s-2\lambda+2j+1$, $f=(\lambda-1)(s-4\lambda+2j+1)$ とすると,

$$f_j(k;\lambda,s) = \{(2\lambda-s)k-\lambda s\}(ek+f)$$
$$+\ \lambda(b-2)\{(s-2\lambda+j+1/2)^2-1/4\} \qquad (3.7)$$

$$\therefore\ f_j(\alpha;\lambda,s) = \lambda(b-2)\{(s-2\lambda+j+1/2)^2-1/4\} \geqq 0$$

さらに, 等号成立は $j=2\lambda-s-1$ または $2\lambda-s$ の時のみ.

(ii) $\partial m(j;\lambda,s)/\partial j = -\lambda\{2\lambda j^2+(s-\lambda)(2j+1)\}/\{j^2(j+1)^2\} < 0$,

$$2\{m(2\lambda-s-1;\lambda,s)-\alpha\}(2\lambda-s-1)(2\lambda-s)$$

$$= s(s-\lambda-1)+\lambda(2\lambda-1-s)+2s-\lambda > 0,$$

$$2\{m(2\lambda-s;\lambda,s)-\alpha\}(2\lambda-s-1)(2\lambda-s)$$

$$= -(s-1)(2\lambda-s) - 2\lambda^2 < 0$$

より結果を得る． Q.E.D.

補題 3.5 (i) $j \geqq 2\lambda-s$ の時，$D_j(\lambda,s) \geqq 0$ なら $\beta_j < \alpha$,

(ii) $1 \leqq j \leqq 2\lambda-s-1$ の時，$D_j(\lambda,s) \geqq 0$ なら $\alpha \leqq \alpha_j \leqq \beta_j \leqq \beta$,

(iii) $j = 2\lambda-s-1$ の時，$D_j(\lambda,s) \geqq 0$，$s \neq 2\lambda-1$ なら $\alpha_j = \alpha$,

$\beta_j = (\lambda-1)(s+1)/(2\lambda-s-1)$.

証明 (i) 補題 3.4 より明らか．

(ii) $\lambda+1 \leqq s \leqq 2\lambda-1$，$1 \leqq j \leqq 2\lambda-s-1$ だから

$$\beta = (3\lambda-s-1) + 2\lambda(\lambda-1)^2/(s-\lambda) \geqq 2\lambda^2-\lambda \quad (s = 2\lambda-1),$$

$$m(j;\lambda,s) \leqq m(1;\lambda,s) = (\lambda^2+s\lambda-2\lambda+1)/2 < 2\lambda^2-\lambda$$

ゆえに $\beta_j \leqq \beta$ を示すには，$f_j(2\lambda^2-\lambda;\lambda,s) \geqq 0$ を示せばよい．$k = 2\lambda^2-\lambda$，$1 \leqq j \leqq 2\lambda-s-1$ の時，(3.5) より，

$$a^*j^2 + b^*j \geqq a^* + b^* = 4\lambda(2\lambda-s-1) \geqq 0$$

$$c^* = 2\lambda(2\lambda-s-1)(s+2\lambda^2-3\lambda) > 0$$

ゆえに

$$f_j(2\lambda^2-\lambda;\lambda,s) = a^*j^2 + b^*j + c^* > 0$$

(iii) (3.7) より，$j = 2\lambda-s-1$ の時

$$f_j(k;\lambda,s) = \{(2\lambda-s)k - \lambda s\}\{(2\lambda-s-1)k - (\lambda-1)(s+1)\}$$

ゆえに結果を得る． Q.E.D.

ここで，$K(\lambda,s)$ を次のように定義する．

$$K(\lambda,s) = K(\lambda) \cap \{[\alpha,\beta] - \bigcup_{j\in A}(\alpha_j,\beta_j)\} \qquad (3.8)$$

ただし，$K(\lambda)$は，$k(k-1)/\lambda$（または(1.1)のv）が整数になる$k(\geqq 2)$の集合，α，βおよびα_j，β_jはそれぞれ(3.4)および(3.6)で定義した数，Aは

$$A \equiv A(\lambda, s) = \{ j : 1 \leqq j \leqq 2\lambda - s - 1,\ D_j(\lambda, s) \geqq 0 \}$$

これまで示した補題から，次の定理が導かれる．

定理 3.1　$\lambda \geqq 3$，$s \geqq \lambda + 1$の時，会合数がsのブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$が存在する為には，$s \leqq 2\lambda - 1$，$k \in K(\lambda, s)$でなければならない。

系 3.1　$k \neq \lambda(2\lambda-1)$なら，会合数が$2\lambda-1$のブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$は存在しない。

証明　(3.8)で$s = 2\lambda - 1$とすると$K(\lambda, 2\lambda-1) = \{\lambda(2\lambda-1)\}$となり，結果を得る．　Q.E.D.

系 3.2　$\lambda \geqq 7$の時，会合数が$2\lambda-2$のブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$が存在するためには，$k = \lambda(\lambda-1)$または，$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 \leqq k \leqq 2\lambda^2 + \lambda + 1$でなければならない。

証明　$A(\lambda, 2\lambda-2) = \{1\}$，また補題 3.5 の(iii)から，$\alpha_1 = \lambda(\lambda-1)$，$\beta_1 = (\lambda-1)(2\lambda-1)$．従って

$$K(\lambda, 2\lambda-2) = K(\lambda) \cap \{k ; k = \lambda(\lambda-1) \text{ または } (\lambda-1)(2\lambda-1) \leqq k \leqq \beta\}$$

一方，

$$\beta = (2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 2)/(\lambda - 2) = 2\lambda^2 + \lambda + 3 + 4/(\lambda - 2)$$

従って，$\lambda \geqq 7$ なら $[\beta] = 2\lambda^2 + \lambda + 3$．さらに，

$$2\lambda^2 + \lambda + 3,\ 2\lambda^2 + \lambda + 2 \notin K(\lambda),\quad 2\lambda^2 + \lambda + 1 \in K(\lambda)$$

より結果を得る．　Q.E.D.

系 3.3　$3 \leqq \lambda \leqq 6$ の時，会合数が $2\lambda - 2$ のブロックをもつ *quasi-residual design* (v, b, r, k, λ) が存在するためには，k は表 3.1 で与えられる整数でなければならぬ．

表 3.1　($\Delta = 2\lambda - 2$, $3 \leqq \lambda \leqq 6$)

$\lambda = 3$	$\Delta = 4$	$k = 6$ または $10 \leqq k \leqq 28$
4	6	$k = 12$ または $21 \leqq k \leqq 41$
5	8	$k = 20$ または $36 \leqq k \leqq 56$
6	10	$k = 30$ または $55 \leqq k \leqq 82$

証明　$\lambda = 3, 4, 5, 6$ の時，それぞれ，$[\beta] = 28, 41, 59, 82$ さらに，$59, 58, 57 \notin K(5)$ より結果を得る．　Q.E.D.

系 3.4　(i)　$\lambda = 3$ の時，$K(3, 5) = \{15\}$，

$K(3, 4) = \{6, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28\}$

(ii)　$\lambda = 4$ の時，$K(4, 7) = \{28\}$，

$K(4, 6) = \{12, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37, 40, 41\}$

$K(4, 5) = \{9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, \cdots\ 76, 77\}$

系 3.4 の (i) の結果は *Lawless* [4] が求めた結果と同じであ

る. また次の系3.5は[1]で得られた結果と同じである.

系 3.5　$k > 2(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)$ の時, λ より大きい会合数をもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$ は存在しない.

証明　$\beta = \{2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - s^2 - s\}/(s-\lambda)$ は, s の単調減少関数である. $\lambda+1 \leqq s \leqq 2\lambda-1$ だから

$$\beta \leqq 2(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1) \qquad \text{Q.E.D.}$$

参 考 文 献

[1] R. C. Bose, S. S. Shrikhande and N. M. Singhi, Edge regular multigraphs and partial geometric designs with an application to the embedding of quasi-residual designs, Teorie Combinatorie Tomo I (1973), 49-81.

[2] W. S. Connor, On the structure of balanced incomplete block designs, Ann. Math. Statist. 23 (1952), 57-71.

[3] N. Hamada and Y. Kobayashi, On the block structure of BIB designs with parameters v = 22, b = 33, r = 12, k = 8 and λ = 4, To appear in J. Combinatorial Theory (1977).

[4] J. F. Lawless, Block intersections in quasi-residual designs, Aequationes Math. 5 (1970), 40-46.