数理解析研究所講究録
第 311 巻 1977 年 58-66

与えられたブロックと一定の共有数をもつブロックの個数の限界

広島大 教育 景山三平
広島大 理 辻 卓見

§0 はじめに

ある種のPBIB designについてShah[3]は一つの固定したブロックと共有数が一定のブロックの個数の限界を求めた。今回はShahとは異なる方法により、Shahの結果が一般のPBIB designに拡張できることを示す。

連結な不完備ブロック計画(v, b, r, k)の結合行列をN, NN'のスペクトル分解を

$$(1) \qquad NN' = rk\left(\frac{1}{v}G_v\right) + \sum_{j=1}^{t} \rho_j P_j$$

とおく。ここでG_vはすべての要素が1の$v \times v$行列であり、また $0<\rho_j<rk$ $j=1,2,\cdots t$ である。

§1 $t=1$ の場合

$t=1$ すなわちNN'のrk以外の非零固有根がただ一つのとき

(1) より $N'N$ のスペクトル分解は

(2) $$N'N = rk\left(\tfrac{1}{b}G_b\right) + \rho_1 Q_1 , \quad Q_1 = \tfrac{1}{\rho_1} N' P_1 N$$

となる。

ブロックを $B_1, B_2, \cdots B_b$, B_1 と B_i ($i = 2, 3, \cdots b$) の共有数を x_i とする。今 B_1 と共有数が l ($0 \leqq l \leqq k$) のブロックが d 個存在したとする。ブロックの番号を適当につけかえることにより，$x_2 = x_3 = \cdots = x_{d+1} = l$ とおくと $N'N$ の第一行は $(k, l, l, \cdots, l, x_{d+2}, \cdots x_b)$ となる。さらに Q_1 の第一行を $(g_{11}, g_{12}, \cdots g_{1b})$ とすると (2) の第一行を比較することにより

(3) $$g_{11} = \frac{k(b-r)}{\rho_1 b} , \quad g_{1i} = \frac{bl - rk}{\rho_1 b} \quad i = 2, 3, \cdots, d+1$$

をえる。他方 Q_1 は $\frac{1}{b}G_b$ と直交する巾等行列であることより次をえる。

(4) $$\sum_{i=1}^{b} g_{1i} = 0 , \quad \sum_{i=1}^{b} g_{1i}^2 = g_{11} = \frac{k(b-r)}{\rho_1 b}$$

$\bar{g} = \left(\sum_{i=d+2}^{b} g_{1i}\right) \Big/ (b-d-1)$ とおいて $\sum_{i=d+2}^{b} (g_{1i} - \bar{g})^2$ を計算する。

(5) $$\sum_{i=d+2}^{b} (g_{1i} - \bar{g})^2 = \sum_{i=d+2}^{b} g_{1i}^2 - (b-d-1)\bar{g}^2$$

(3) (4) を用いて (5) の右辺を変形する。

$$\begin{aligned}\sum_{i=d+2}^{b} g_{1i}^2 &= \sum_{i=1}^{b} g_{1i}^2 - g_{11}^2 - \sum_{i=2}^{d+1} g_{1i}^2 \\ &= \frac{k(b-r)}{\rho_1 b} - \frac{k^2(b-r)^2}{\rho_1^2 b^2} - d \cdot \frac{(bl - rk)^2}{\rho_1^2 b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b-d-1)\bar{g}^2 &= \frac{1}{b-d-1}\left(\sum_{i=1}^{b} g_{1i} - g_{11} - \sum_{i=2}^{d+1} g_{1i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-d-1}\left(0 - \frac{k(b-r)}{\rho_1 b} - d\,\frac{bl - rk}{\rho_1 b}\right)^2\end{aligned}$$

したがって

(6) $$0 \leqq \sum_{i=d+2}^{b} (g_{1i} - \bar{g})^2 = \frac{A}{\rho_1^2 b^2 (b-d-1)}$$

ここで $A = (b-1)\theta - b^2[k(r-1) - \ell(b-1)]^2 - \theta d$,

$\theta = bk[\rho_1(b-r) + k(r^2-b)] + b^2\ell[(b-1)\ell - 2k(r-1)]$ である。

(6) より $A \geqq 0$ したがって

(7) $$\theta d \leqq (b-1)\theta - b^2[k(r-1) - \ell(b-1)]^2$$

をえる。 一方 $A \geqq 0$ より $\theta \geqq 0$ である。

$\theta > 0$ のとき (7) の両辺を θ でわることにより

(8) $$d \leqq b - 1 - \frac{b[k(r-1) - \ell(b-1)]^2}{k[\rho_1(b-r) + k(r^2-b)] + b\ell[(b-1)\ell - 2k(r-1)]}$$

をえる。

$\theta = 0$ のとき，$A \geqq 0$ であったから A の形を見ることにより $k(r-1) - \ell(b-1) = 0$ でなければならないことがわかる。 これを用いて $\theta = 0$ より ρ_1 について解くと $\rho_1 = k - \ell$ をえる。

さらに $\alpha = \mathrm{rank}\, Q_1$ とおいて (2) の両辺の trace を調べると $bk = rk + (k-\ell)\alpha$ したがって $\alpha = \frac{bk - rk}{k - \ell} = b - 1$ をえる。 ゆえに $Q_1 = I_b - \frac{1}{b} G_b$ (I_b: $b \times b$ の単位行列) となり N は linked block design でなければならない。 逆に N が linked block design で $\ell = \frac{k(r-1)}{b-1}$ ならば $\theta = 0$ となる。

以上をまとめて次の定理をえる。

［定理 1］ NN' の非零固有根が rk, ρ_1 の二つになる連結な不完備ブロック計画 N において，一つの固定したブロックと

共有数が ℓ $(0 \leqq \ell \leqq k)$ となるブロックの数を d とするとき次の不等式が成立する。 ただし linked block design で $\ell = \frac{k(r-1)}{b-1}$ の場合を除く。

(8) $$d \leqq b-1-\frac{b[k(r-1)-\ell(b-1)]^2}{k[\rho_1(b-r)+k(r^2-b)]+b\ell[(b-1)\ell-2k(r-1)]}$$

さらに等号が成立するとき，他の b-d-1個のブロックとの共有数も一定で次の式で与えられる。

$$\frac{k[\rho_1(b-r)+k(r^2-b)]-\ell bk(r-1)}{b[k(r-1)-\ell(b-1)]}$$

定理1の後半は，等号成立 $\Leftrightarrow g_{1d+2}=\cdots=g_{1b}=\bar{g}$，より(3)と(8)の等号を用いて $\bar{g}$ を表わした後に(2)より $x_j=\frac{rk}{b}-\rho_1\bar{g}$ $j=d+2,\cdots,b$ によってえられる。

定理1を具体的なPBIB designに適用すると次のようになる。

(i) Semi-regular group divisible PBIB design ($v=mn$, m groups of n treatments, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$, $rk-v\lambda_2=0$, $\rho_1=r-\lambda_1=\frac{r(v-k)}{v-m}$) において一つのブロックと共有数が ℓ であるブロックの数を d とすると，次の不等式が成立する。

$$d \leqq b-1-\frac{[k(r-1)-\ell(b-1)]^2}{c}$$

ここで $C = D+\ell^2(b-1)-2\ell k(r-1)$

$$D=\frac{k^2[(v-k)(b-r)-(v-rk)(v-m)]}{v(v-m)}$$

(i) と同様の命題が次の (ii)～(viii) についても成立するが，こ

のうち (i)～(iv) は Shah [3] の結果と一致しており，(v)～(viii) は Shah の方法ではえられないものである。

(ii) Triangular PBIB design ($v=\frac{n(n-1)}{2}$, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$, $r+(n-4)\lambda_1-(n-3)\lambda_2=0$, $\rho_1=r-2\lambda_1+\lambda_2=\frac{r(v-k)}{v-n}$)

(iii) L_2 PBIB design ($v=s^2$, b, r, k, λ_1, λ_2, $r+(s-2)\lambda_1-(s-1)\lambda_2=0$, $\rho_1=r-2\lambda_1+\lambda_2=\frac{r(v-k)}{(s-1)^2}$)

(iv) Rectangular PBIB design ($v=v_1v_2$, v_1 rows and v_2 columns, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $r-\lambda_1+(v-1)(\lambda_2-\lambda_3)=0$, $r-\lambda_2+(v_2-1)(\lambda_1-\lambda_3)=0$ $\rho_1=r-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=\frac{r(v-k)}{(v_1-1)(v_2-1)}$)

(v) Triangular PBIB design ($v=\frac{n(n-1)}{2}$, $r-2\lambda_1+\lambda_2=0$, $\rho_1=r+(n-4)\lambda_1-(n-3)\lambda_2=\frac{r(v-k)}{n-1}$)

(vi) L_2 PBIB design ($v=s^2$ $r-2\lambda_1+\lambda_2=0$, $\rho_1=r+(s-2)\lambda_1-(s-1)\lambda_2$ $=\frac{r(v-k)}{2(s-1)}$)

(vii) Rectangular PBIB design ($v=v_1v_2$ $r-\lambda_1+(v_1-1)(\lambda_2-\lambda_3)=0$ $r-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0$, $\rho_1=r-\lambda_2+(v_2-1)(\lambda_1-\lambda_3)=\frac{r(v-k)}{v_1-1}$)

(viii) Rectangutar PBIB design ($v=v_1v_2$ $r-\lambda_2+(v_2-1)(\lambda_1-\lambda_3)=0$ $r-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0$, $\rho_1=r-\lambda_1+(v_1-1)(\lambda_2-\lambda_3)=\frac{r(v-k)}{v_2-1}$)

§2 $t>1$ の場合

(1) より $N'N$ のスペクトル分解は

(9) $\qquad N'N = rk\left(\frac{1}{b}G_b\right) + \sum_{j=1}^{t} \rho_j Q_j, \qquad Q_j = \frac{1}{\rho_j} N' P_j N \quad j=1,2,\cdots,t$

となる。

§1と同様にして，B_1と共有数がlのブロックを$B_2,\cdots,B_{d+1}$，x_iをB_1とB_i（$i=d+2,\cdots,b$）の共有数とすると$N'N$の第一行は$(k,l,\cdots,l,x_{d+2},\cdots,x_b)$となる。　さらに$\sum_{i=1}^{t}\rho_i Q_i$の第一行を$(s_{11},s_{12},\cdots,s_{1b})$，$Q_j$の(1.1)-要素を$g_j$（$j=1,2,\cdots,t$）とおくと(9)の第一行を比較することにより

(10) $\qquad s_{11} = \frac{k(b-r)}{b}\left(=\sum_{j=1}^{t}\rho_j g_j\right), \qquad s_{1i} = l - \frac{rk}{b} \quad i=2,3,\cdots,d+1$

である。　他方$Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$は互いに直交し，かつ$\frac{1}{b}G_b$とも直交する巾等行列であることより次をえる。

(11) $\qquad \sum_{i=1}^{b} s_{1i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{b} s_{1i}^2 = \sum_{j=1}^{t}\rho_j^2 g_j, \qquad g_j \geqq 0 \quad j=1,2,\cdots,t$

$\bar{s} = \left(\sum_{i=d+2}^{b} s_{1i}\right)/(b-d-1)$とおくと§1と同様にして

(12) $$0 \leqq \sum_{i=d+2}^{b}(s_{1i}-\bar{s})^2 = \sum_{j=1}^{t}\rho_j^2 g_j - \left\{\frac{k(b-r)}{b}\right\}^2 - d\left\{\frac{bl-rk}{b}\right\}^2 - \frac{1}{b-d-1}\left\{\frac{k(b-r)+d(bl-rk)}{b}\right\}^2$$

(12)を変形すると

$$0 \leqq b^2(b-d-1)\left(\sum_{j=1}^{t}\rho_j^2 g_j\right) - (b-d-1)k^2(b-r)^2 - d(b-d-1)(bl-rk)^2 - \{k(b-r)+d(bl-rk)\}^2$$

したがって次をえる。

(13) $\qquad \theta d \leqq \theta(b-1) - b[k(r-1)-l(b-1)]^2$

ここで　$\theta = b\left(\sum_{j=1}^{t}\rho_j^2 g_j\right) + k^2(r^2-b) + bl[(b-1)l - 2k(r-1)]$。

(13)より$\theta \geqq 0$でかつ$\theta=0$ならば$k(r-1)-l(b-1)=0$である。

したがって $k(r-1) \neq l(b-1)$ のとき (13) の両辺を θ でわることにより次の不等式がえられる。

$$(14) \qquad d \leqq b-1-\frac{b[k(r-1)-l(b-1)]^2}{\theta}$$

以上をまとめて次の定理をえる。

［定理 2］ 連結な不完備ブロック計画 $N(v, b, r, k)$ において，NN' の rk と異なる非零固有根を $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_t$ とするとき，一つの固定したブロックと共有数が l $\left(l \neq \frac{k(r-1)}{b-1}\right)$ となるブロックの個数を d とすると次の不等式が成立する。

$$(14) \qquad d \leqq b-1-\frac{b[k(r-1)-l(b-1)]^2}{\theta}$$

ここで $\theta = b\left(\sum_{j=1}^{t} \rho_j^2 g_j\right) + k^2(r^2-b) + bl[(b-1)l-2k(r-1)]$，$g_j$ は N の第一列を固定したブロックとすると，N の第一列ベクトルを $\underline{y}$ とおき，$g_j = \frac{1}{\rho_j} \underline{y}' P_j \underline{y}$ $\quad j=1,2,\cdots,t$ により与えられるものであり，P_j は (1) で与えられたものである。

(14) は固定したブロックの構造によって定まる $g_1, g_2, \cdots, g_t$ に depend する不等式であるが，これをブロックの構造に depend しない不等式にすることを考える（当然，評価が甘くなることはさけられない。）。

ρ_1 を $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_t$ のうちで最大の固有根とするとき (10) (11) より $\sum_{j=1}^{t} \rho_j^2 g_j \leqq \rho_1 \frac{k(b-r)}{b}$ をえる。 したがって次をえる。

$$(15) \qquad d \leqq b-1-\frac{b[k(r-1)-l(b-1)]^2}{k[P_1(b-r)+k(r^2-b)]+bl[(b-1)l-2k(r-1)]}$$

(14) (15) を具体的な PBIB design で計算した例を一つ上げておく。

Group divisible PBIB design ($v=m\cdot n$, m groups of n treatment, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$) においては $P_1 = rk - v\lambda_2$, $P_2 = r-\lambda_1$ であり,

$NN' = rk\left(\frac{1}{v}G_v\right) + P_1\left\{\frac{m}{v}(I_m \otimes G_n) - \frac{1}{v}G_v\right\} + P_2\left\{I_v - \frac{1}{n}(I_m \otimes G_n)\right\}$ である。

Bose, Clatworthy, Shrikhande の PBIB design の Table [1] にある R19 について調べてみる。 R19 はパラメーターが $v=12$, $b=32$, $r=8$, $k=3$, $m=2$, $n=6$, $\lambda_1=2$ $\lambda_2=1$ の正則型 group divisible design で $P_1=12$, $P_2=6$ である。 Table の第1番目のブロック (1,3,7) $g_1=\frac{1}{16}$ $g_2=\frac{1}{4}$ と第13番目のブロック (1.3.4) $g_1=\frac{1}{144}$ $g_2=\frac{13}{36}$ をそれぞれ固定したブロックと考えて $l(=0.1.2.3)$ に対する (15) (14) の限界, 及び実際の d の値を表にしたものが次の表である。

ブロック (1.3.7)

l	0	1	2	3
(15)	18	27	8	3
(14)	14	24	5	2
d	13	15	3	0

ブロック (1.3.4)

l	0	1	2	3
(15)	18	27	8	3
(14)	11	22	4	1
d	11	19	1	0

参考文献

[1] R.C. Bose, W.H. Clatworthy and S.S. Shrikhande, Tables of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. North Carolina Agricultural Experimental Bulletin, No. 107, 1954.

[2] S. Kageyama and T. Tsuji, General upper bound for the number of blocks having a given number of treatments common with a given block. J. Statist. Planning Inf. 1, No. 3 (to appear)

[3] S.M. Shah, On the block structure of certain partially balanced incomplete block designs. Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1016 – 1020.