数理解析研究所講究録
第 311 巻 1977 年 121-130

Balanced design と balanced array について

海上保安大学校　　粂田正秀
広島大 理　　　西井龍映

§1. 序

Resolution $2l+1$ の 2^m－FF (fractional factorial) design について，design T が balanced であるための必要十分条件は，information matrix M_T が正則で，T が index set $\{\mu_i\}$ を持つ balanced array (B－array) $[N, m, 2, 2l]$ であることは，山本・白倉・粂田 [4] によって示された。Resolution V の 3^m－FF design について，design T が balanced であるための必要十分条件は，M_T が正則で，T が index set $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$ を持つ B－array $[N, m, 3, 4]$ であることは，粂田 [3] で示された。

ここでは，一般の s^m－FF design について，上と同様な結果が得られることを見る。

§2. Parameter の定義

Factor $F_1, F_2, \cdots, F_m$ は各々 s 種の level $0, 1, \cdots, s-1$ を持ち，Z はその assembly を辞書式順序に並べたものとする。

$$Z = \begin{bmatrix} 0, 0, \cdots, 0, 0 \\ 0, 0, \cdots, 0, 1 \\ \cdots \\ 0, 0, \cdots, 0, s-1 \\ 0, 0, \cdots, 1, 0 \\ \cdots \\ s-1, s-1, \cdots s-1, s-1 \end{bmatrix} : s^m \times m$$

$\underset{\sim}{\eta}(Z)$ は Z の row vector $\underline{i}$ に対応する assembly での観測値の期待値とし，順に並べた $s^m \times 1$ の vector であるとする。

<u>定義２．１</u>　Parameter vector $\underset{\sim}{\theta}(Z)$ を次の様に定義する。

(2.1)　$\underset{\sim}{\theta}(Z) = (D_{(m)} D'_{(m)})^{-1} D_{(m)} \underset{\sim}{\eta}(Z)$

ただし，$D = \begin{bmatrix} \underline{d}(0) \\ \underline{d}(1) \\ \vdots \\ \underline{d}(s-1) \end{bmatrix}$: $s \times s$ 行列で，D の row vector $\underline{d}(i)$ は

$\underline{d}(i) = (d_0(i), d_1(i), \cdots, d_{s-1}(i))$ $(i = 0, 1, \cdots, s-1)$ と書け，

$\underline{d}(0) = (1, 1, \cdots, 1)$ かつ $\underline{d}(i)\underline{d}'(j) = \lambda_i \delta_{ij}$ $(\lambda_i > 0,\ i, j = 0, 1, \cdots, s-1)$

を満足する。$D_{(m)}$ は D の m 回の Kronecker 積とする。

この定義より，$\theta(0, 0, \cdots, 0)$ は general mean を，

$\theta(0 \cdot \varepsilon_{t_1}\ \varepsilon_{t_2} \cdots \varepsilon_{t_n} \cdots 0)$ $(\varepsilon_{t_r} \in \{1, 2, \cdots, s-1\},\ r = 1, 2, \cdots, n)$ は

Factor $F_{t_1} F_{t_2} \cdots F_{t_n}$ の interaction を意味する。

(2.1) は $\underset{\sim}{\eta}(Z) = D'_{(m)} \underset{\sim}{\theta}(Z)$ と解くことができる。

このことから，assembly $\underline{i} = (i_1 i_2 \cdots i_m)$ による effect は，

$\eta(\underline{i}) = \sum_{\underline{\varepsilon} \in Z} d_{\underline{\varepsilon}}^{\underline{i}}\ \theta(\underline{\varepsilon})$ で表現される。ただし，$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m)$

は Z の row vector を動き，$d_{\underline{\varepsilon}}^{\underline{i}} = d_{i_1}(\varepsilon_1)\, d_{i_2}(\varepsilon_2) \cdots d_{i_m}(\varepsilon_m)$ である。

以後 $l+1$ Factor interaction 以上無視可能と仮定する．

N 個の assembly $\underset{\sim}{j}^{(1)}, \underset{\sim}{j}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{j}^{(N)}$ から成る design T を考える．

このとき，$T = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{j}^{(1)} \\ \underset{\sim}{j}^{(2)} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{j}^{(N)} \end{bmatrix}$ で表現する。$\underset{\sim}{\theta}_\nu$ は l Factor interaction

までのすべての parameter を並べた column vector，$\underset{\sim}{y}(T)$ を assembly $\underset{\sim}{j}^{(k)}$ による観測値を並べたものとすれば．

$$(2.2) \quad \underset{\sim}{y}(T) = E_T \underset{\sim}{\theta}_\nu + \underset{\sim}{e}_T$$

と書ける．ただし $\nu = \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k} (s-1)^k$ (parameter の個数)，E_T は $N \times \nu$ の design matrix，$\underset{\sim}{e}_T$ は $N \times 1$ の error vector であり $\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{e}_T) = \underset{\sim}{0}$，$\mathrm{Var}(\underset{\sim}{e}_T) = \sigma^2 I_N$ とする。

(2.2) の normal equation は，$M_T \hat{\underset{\sim}{\theta}}_\nu = E_T' \underset{\sim}{y}(T)$ (ただし $M_T = E_T' E_T$) であり．M_T が正則行列なら，$\hat{\underset{\sim}{\theta}}_\nu = V_T E_T' \underset{\sim}{y}(T)$ $(V_T = M_T^{-1})$ が $\underset{\sim}{\theta}_\nu$ の BLUE (best linear unbiased estimator) になり．$\mathrm{Var}(\hat{\underset{\sim}{\theta}}_\nu) = \sigma^2 V_T$ が成立する。

[注] parameter $\theta(\underset{\sim}{\alpha})$, $\theta(\underset{\sim}{\beta})$ に対応する行列 M_T の成分を．

$\varepsilon(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta})$ とすれば，$\varepsilon(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}) = \sum_{k=1}^{N} d_{\underset{\sim}{\alpha}}^{\underset{\sim}{j}^{(k)}} \cdot d_{\underset{\sim}{\beta}}^{\underset{\sim}{j}^{(k)}}$ である。

$T_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ $(1 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq m)$ を．T の t_1 列 t_2 列 $\cdots$ t_n 列から成る $N \times n$ の sub array とする。このとき $\mu_{t_1 t_2 \cdots t_n}^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n}$ を，この sub array に，row vector $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ $(\nu_r \in \{0, 1, \cdots, s-1\})$ が含まれる回数とする。さらに $\gamma_{t_1 t_2 \cdots t_n}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n} = \varepsilon(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta})$ で定義する。ただし，$\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$, $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m)$ は．

$t = t_r$ のとき $\begin{cases} \alpha_t = \varepsilon_r \\ \beta_t = 0 \end{cases}$ 又は $\begin{cases} \alpha_t = 0 \\ \beta_t = \varepsilon_r \end{cases}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ を

$t \neq t_r$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ のときは $\alpha_t = \beta_t = 0$ を満たしている。ここに，$\varepsilon_r \in \{0, 1, \cdots, s-1\}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ である。

これらを辞書式順序に並べた vector を，

$$\underset{\sim}{\gamma}_{t_1 t_2 \cdots t_n} = \| \gamma^{\iota_1 \iota_2 \cdots \iota_n}_{t_1 t_2 \cdots t_n} \| , \quad \underset{\sim}{\mu}_{t_1 t_2 \cdots t_n} = \| \mu^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n}_{t_1 t_2 \cdots t_n} \|$$

とおけば，次の補題が成り立つ。

<u>補題 2．1</u>　すべての sub array $T_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ について

$\underset{\sim}{\gamma}_{t_1 t_2 \cdots t_n} = D_{(n)} \underset{\sim}{\mu}_{t_1 t_2 \cdots t_n}$ が成立する。

§ 3．Balanced array と information matrix

Balanced array は Chakravarti [2] により，最初に定義された。

<u>定義 3．1</u>　T が strength n で，index set $\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}} \mid i_0 + i_1 + \cdots + i_{s-1} = n\}$ を持つ balanced array (B-array) $[N, m, s, n]$ であるとは，T が $0, 1, \cdots, s-1$ を成分に持つ $N \times m$ の行列で，T のどの $N \times n$ sub array も，level が r である Factor を i_r 個持つ $(r = 0, 1, \cdots, s-1)$ すべての row vector が $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}$ 回含まれるようなものをいう。

<u>定義 3．2</u>　T が B-array $[N, m, s, n]$ で，その index set $\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}} \mid i_0 + i_1 + \cdots + i_{s-1} = n\}$ が $\{\lambda\}$ に等しいとき，T は index λ を持つ Orthogonal array (O-array) $[N, m, s, n]$ であると定義する。

定義3.3　M_T が balanced (又は permutation invariant) であるとは，$\forall \tau \in \mathfrak{S}_m$ に対し，$\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon(\tau\alpha, \tau\beta)$ がすべての α, β に対し成立するときをいう。ただし，$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ のとき，$\tau\alpha = (\alpha_{\tau(1)}\ \alpha_{\tau(2)} \cdots \alpha_{\tau(m)})$，$\tau\beta$ も同様に約束する。

$l \leqq [\frac{m}{2}]$ なる l に対し，$l+1$ Factor interaction 以上のすべての parameter が無視可能なら，次の2定理が成立する。

定理3.1　u Factor interaction $(u \leqq l)$ 以下のすべての parameter が，他の parameter と独立に推定できるための必要十分条件は，T が O-array $[N, m, s, u+l]$ であることである。

[注] $u = l$ ならば，M_T は対角行列である．

定理3.2　M_T が balanced であるための必要十分条件は，T が index set $\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}} \mid i_0 + i_1 + \cdots + i_{s-1} \overset{\circ}{=} 2l\}$ を持つ B-array $[N, m, s, 2l]$ であることである。

証明の概略：補題2.1，D の直交性，$\varepsilon(\alpha, \beta)$ は $\gamma^{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{2l}}_{t_1 \cdots t_{2l}}$ の一次結合で書けることより．

§4. Multidimensional relationship

MDPBAS (multidimensional partially balanced association scheme) の定義は，Bose & Srivastava [1] で与えられた。それの拡張であるMDRS (multidimensional relationship) は，最初に桑田 [3] で与えられた。ここでは

その定義を明らかにする。

定義4.1　n_i個の元から成る集合$S_i=\{x_{i1}\ x_{i2}\cdots x_{in_i}\}$ ($i=1,2,\cdots,L$) があり、relation R が $\bigcup_{i=1}^{L} S_i$ の元の間に定義されていて、次の条件を満たすとき、RをMDRSという。

(i)　すべての$S_i\times S_j$ ($i,j=1,2,\cdots,L$)に関して、local relationship set $\pi^{i,j}$ ($|\pi^{i,j}|=m_{ij}$) が存在して、S_iのどの元x_{if}に対しても、S_jはm_{ij}個のdisjointなクラスに分割され、各クラスはx_{if}と$\alpha(\in\pi^{i,j})$のrelationにあるもの全体で、その濃度は$n_\alpha^{i,j}$であり、x_{if}のとり方によらず一定である。

(x_{if}, x_{jg}) が$\alpha(\in\pi^{i,j})$のrelationにあることを $R(x_{if}, x_{jg})=R_\alpha^{i,j}$ 又は $x_{if}\xrightarrow{\alpha}x_{jg}$ で表現する。

(ii)　S_i, S_j, S_kを任意に選ぶ。($i,j,k=1,2,\cdots L$) $\pi^{i,k}$の任意の元γに対し、$S_i\times S_k$の元(x_{if}, x_{kh})でγの関係にあるものを取る。$\forall\alpha\in\pi^{i,j}$, $\forall\beta\in\pi^{j,k}$を与えると、

集合 $$\left\{ x_{jg}\in S_j \;\middle|\; \begin{array}{ccc} x_{if} & \xrightarrow{\gamma} & x_{kh} \\ & {}_{\alpha}\searrow \quad \nearrow_{\beta} & \\ & x_{jg} & \end{array} \right\}$$ の濃度は、$x_{if}\xrightarrow{\gamma}x_{kh}$である限り、$x_{if}, x_{kh}$の取り方によらず、$i, k, \gamma, j, \alpha, \beta$のみに依存する定数 $g(i,k,\gamma;j,\alpha,\beta)$ である。

[注] このrelationは必ずしも対称ではない。

このMDRSから、local relationship matrix $\{A_\alpha^{i,j}\mid\alpha\in\pi^{i,j}\}$ と relationship matrix $\{D_\alpha^{i,j}\mid\alpha\in\pi^{i,j}, i,j=1,2,\cdots L\}$ を次のよ

に定義する。

<u>定義4．2</u>　任意の (i,j) $(i,j=1,2,\cdots,L)$ を考える。$\forall\alpha\in\pi^{i,j}$ に対して、$A_\alpha^{i,j}$ は $n_i\times n_j$ 行列で、その (f,g) element $a_{f,g}^{i,j}(\alpha)$ は、

$$a_{f,g}^{i,j}(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{if } x_{if}\xrightarrow{\alpha}x_{jg}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad\left(\begin{array}{l}f=1,2,\cdots,n_i\\ g=1,2,\cdots,n_j\end{array}\right)$$

である。

<u>定義4．3</u>　上の i,j,α に対し、$D_\alpha^{i,j}$ は $P\times P$ の行列で $(P=n_1+n_2+\cdots+n_L)$、L^2 個の sub matrix から成る。S_i に対応する row block, S_j に対応する column block の $n_i\times n_j$ sub matrix は $A_\alpha^{i,j}$ であり、他の sub matrix の element はすべて0である。

MDRSと $\{A_\alpha^{i,j}\}$, $\{D_\alpha^{i,j}\}$ の定義により、次の補題を得る。

<u>補題4．1</u>　$A_\alpha^{i,j}A_\beta^{j,k}=\sum_{\gamma\in\pi^{i,k}}g(i,k,\gamma;j,\alpha,\beta)A_\gamma^{i,k}$

$$D_\alpha^{i,j}D_\beta^{j',k}=\Big(\sum_{\gamma\in\pi^{i,k}}g(i,k,\gamma;j,\alpha,\beta)D_\gamma^{i,k}\Big)\delta_{j,j'}$$

がすべての $\alpha\in\pi^{i,j}$, $\beta\in\pi^{j,k}$, $i,j,k=1,2,\cdots,L$ に対し成立する。

<u>補題4．2</u>　$\mathcal{A}$ を $\{D_\alpha^{i,j}\mid\alpha\in\pi^{i,j}\ \ i,j=1,2\cdots L\}$ の元の $\mathbb{R}$ 上の一次結合全体とすれば、$\mathcal{A}$ は $P\times P$ 行列 $\{D_\alpha^{i,j}\}$ を base とする行列多元環になる。この algebra $\mathcal{A}$ を MDRS の relationship algebra と呼ぶ。

§ 5. Balanced fractional s^m factorial design

$S_{p_0p_1\cdots p_{s-1}}$ を parameter の index の集合で，$\{\alpha \in Z \mid w_r(\alpha)=p_r$ $r=0,1,\cdots,s-1\}$ と定義する。ただし $w_r(\alpha)$ は vector α の元で，r であるものの個数とする。$(\ell+1)$ Factor interaction 以上無視可能としているから，unknown parameter の index の集合族 $\mathcal{S}$ は，$\{S_p \mid p=(p_0p_1\cdots p_{s-1}),\ p_1+p_2+\cdots+p_{s-1} \leqq \ell\}$ である。$S=\bigcup_{S_p\in\mathcal{S}} S_p$ は unknow parameter の index 全体である。

$M(s)$ を $s\times s$ 行列全体とするとき，$S\times S$ から $M(s)$ への map W^* を次のように定義する。

<u>定義5．1</u>　$S\times S \ni \forall(\alpha,\beta)$ に対し，$W^*(\alpha,\beta)$ の (i,j) element $(i,j=1,2,\cdots,s)$ は，集合 $\{t\in\{1,2\cdots m\} \mid \alpha_t=i-1,\ \beta_t=j-1\}$ の濃度とする。ただし，$\alpha=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)$，$\beta=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)$ である。

［注］　この map W^* は (α,β) の Factor の permutation に関する maximal invariant function である。

$\mathcal{S}$ の中に，次のように relation を定義する。$\mathcal{S}$ の任意の元 S_p，S_q に関し，local relationship set $\pi^{p,q}$ を $\{W^*(\alpha,\beta)\in M(s) \mid (\alpha,\beta)\in S_p\times S_q\}$ とし，$S_p\times S_q \ni \forall(\alpha,\beta)$ が $W(\in\pi^{p,q})$ の relation にあるとは，$W=W^*(\alpha,\beta)$ の時，かつその時に限りいう。

<u>定理5．1</u>　$\mathcal{S}$ に定義された relation は MDRS である。

［注］　$\pi^{p,q} \ni \forall W$ に対し，$W' \in \pi^{q,p}$ が成立する。

定理５．２　このＭＤＲＳから生成される relationship algebra $\mathcal{A}$ は I_ν $\left(\nu=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{m}{k}(s-1)^k\right)$ を含む。

定義５．２　$\mathcal{A}$ の vector subspace $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ を $\{B_W^{\rho,\delta} \mid W\in\pi^{\rho,\delta}, S_\rho, S_\delta \in \mathcal{S}\}$ の元の一次結合全体とする。ただし，

$$B_W^{\rho,\delta}=\begin{cases} D_W^{\rho,\rho} & \text{if } \rho=\delta \text{ かつ } W=W'\in\pi^{\rho,\rho} \\ D_W^{\rho,\delta}+D_{W'}^{\delta,\rho} & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。ただし，$W\in\pi^{\rho,\delta}$ である。

［注］定義３．３は $M_T\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と言い換えてよい。

定義５．３　s^m－FF design T が balanced design とは M_T が正則で，$V_T=M_T^{-1}$ が permutation invariant であるときをいう。

ℓ が $\ell\leqq\left[\frac{m}{2}\right]$ を満たすとき，次の主定理を得る。

定理５．３　Resolution $2\ell+1$ の s^m－FF design T が balanced design であるための必要十分条件は，T が M_T を正則にする B－array $[N, m, s, 2\ell]$ であることである。

［証明］（$\Rightarrow$）仮定より $V_T\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}\subset\mathcal{A}$ であり，$\mathcal{A}\ni I_\nu$（定理５.２）から $M_T=V_T^{-1}\in\mathcal{A}$ がわかる。定義５．２の注，定理３．２より，T はB－array $[N; m, s, 2\ell]$ である。

（$\Leftarrow$）仮定より $M_T\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}\subset\mathcal{A}$ であり，$\mathcal{A}\ni I_\nu$ から $V_T\in\mathcal{A}$ である。故に V_T は permutation invariant であるから，T は balanced design である。

REFERENCES

[1] Bose, R. C. and Srivastava, J. N. (1964). Multidimensional partially balanced designs and their analysis, with applications to partially balanced factorial fractions. Sankhyā (A) 26 145-168.

[2] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhyā 17 143-164.

[3] Kuwada, M. (1977). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional 3^m factorial designs. Submitted to J. Statist. Planning Inf.

[4] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. Ann. Inst. Statist. Math. 27 143-157.