数理解析研究所講究録
第311巻 1977年 131-141

Resolution Vのbalanced fractional 3^m factorial designのinformation行列の固有多項式

海上保安大学校　　来田正秀

§1、　序.

Resolution $2l+1$ のbalanced fractional 2^m factorial (2^m-BFF) designのinformation行列の固有多項式は，山本・白倉・来田[8]によって求められた。2^m-BFF designの性質等については，白倉[5]，白倉・来田[6]，Srivastava & Chopra[7]等によって研究されている。

最近，Hoke[2]は，2nd ordered modelにおける 3^m irregular fractionのinformation 行列の固有多項式を求めている。またresolution Vの 3^m-BFF designとbalanced array (B-array)の関係は，来田[4]によって求められた。

本稿では，multidimensional relationship (MDRS) algebraの直和分解を使って，resolution Vの 3^m-BFF designの固有多項式を求める。

§2. Balanced array と balanced design.

m 個の factor $F_1, F_2, \cdots, F_m$ をもつ 3^m factorial design を考える。$(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ を処理組合せとする。但し j_r は 0, 1, 2 のいずれかである $(r=1,2,\cdots,m)$。$y(j_1, j_2, \cdots, j_m)$, $\eta(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ をそれぞれ観測値とその期待値とするとき，すべての parameter $\underline{\theta}$ $(3^m \times 1)$ は期待値の一次結合で定義出来る。

3 factor 以上の interaction は無視可能と仮定し，parameter $\underline{\theta}_\nu$ を次の様に並び変える：

$$(2.1)\quad \underline{\theta}_\nu = (\{\theta(\phi)\}, \{\theta(t^1)\}, \{\theta(t^2)\}, \{\theta(t_1^1 t_2^1)\}, \{\theta(t_1^2 t_2^2)\}, \{\theta(t_3^1 t_4^2)\})$$

但し，$\nu = 1 + m + m + \binom{m}{2} + \binom{m}{2} + 2\binom{m}{2} = 1 + 2m^2$, $t_1 < t_2$, $t_3 \neq t_4$。

その時，処理組合せ $(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ に対して

$$(2.2)\quad \eta(j_1, j_2, \cdots, j_m) = \theta(\phi) + \sum_{\varepsilon=1}^{2} \sum_{t=1}^{m} d_{j_t}(\varepsilon)\, \theta(t^\varepsilon) + \sum_{\varepsilon=1}^{2} \sum_{t_1<t_2} d_{j_{t_1}}(\varepsilon)\, d_{j_{t_2}}(\varepsilon)\, \theta(t_1^\varepsilon t_2^\varepsilon) + \sum_{t_3 \neq t_4} d_{j_{t_3}}(1)\, d_{j_{t_4}}(2)\, \theta(t_3^1 t_4^2)$$

と書ける。但し $d_0(0) = d_1(0) = d_2(0) = 1$, $d_0(1) = -1$, $d_1(1) = 0$, $d_2(1) = 1$, $d_0(2) = 1$, $d_1(2) = -2$, $d_2(2) = 1$。

T を N 個の処理組合せをもつ fraction とする。その時，観測値 $\underline{y}(T)$ は

$$(2.3)\quad \underline{y}(T) = E_T\, \underline{\theta}_\nu + \underline{\varepsilon}_T$$

と表わされる。ここで E_T は design 行列，$\underline{\varepsilon}_T$ は平均 $\underline{0}$，無相関で同一分散 σ^2 をもつ order N の error vector である。

$\underline{\theta}_\nu$を推定するための normal equation は

(2.4) $\quad M_T \hat{\underline{\theta}}_\nu = E'_T \underline{y}(T)$

で与えられる。但し $M_T\ (= E'_T E_T)$ は information 行列で，各々行，列は $\underline{\theta}_\nu$ の要素に対応している。$|M_T| \neq 0$ ならば T は resolution V の fractional 3^m factorial design といわれ，また $\underline{\theta}_\nu$ の BLUE は，$\hat{\underline{\theta}}_\nu = V_T E'_T \underline{y}(T)\ (V_T = M_T^{-1})$ で与えられる。

<u>定義2.1.</u> $\quad V_T$ が m 個の factor の permutation に対して不変であるとき，T は balanced であるといわれる（3^m-BFF design）。

Balaned array の概念は，Chakravarti [1] によって最初に導入された。

定義2.2. $\quad T$ の t_1, t_2, t_3, t_4 番目の列からなる subarray $T_{t_1t_2t_3t_4}$ において，$w_r(j_{t_1}, j_{t_2}, j_{t_3}, j_{t_4}) = i_r\ (r=0,1,2)$ であるすべての vector が，いずれも $T_{t_1t_2t_3t_4}$ の行として丁度 $\lambda_{i_0i_1i_2}$ 回現われるとき，T は index set $\{\lambda_{i_0i_1i_2}\}$ をもつ B-array $[N, m, 3, 4]$ といわれる。但し $w_r(j_{t_1}, j_{t_2}, j_{t_3}, j_{t_4})$ は vector $(j_{t_1}, j_{t_2}, j_{t_3}, j_{t_4})$ における r の個数を表わす。

<u>定理2.1.</u> $\quad F_{t_1}, F_{t_2}, F_{t_3}, F_{t_4}$ に対応する M_T のすべての要素は次の要素の一次結合で書ける。

$\varepsilon(\theta(\phi), \theta(\phi)) = N$, $\ \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1))$, $\ \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^2))$, $\ \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1 t_\ell^1))$,

$\varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^2 t_\ell^2))$, $\ \varepsilon(\theta(\phi), \theta(t_k^1 t_\ell^2))$, $\ \varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^1 t_\ell^1))$, $\ \varepsilon(\theta(t_i^1), \theta(t_k^2 t_\ell^2))$,

$\varepsilon(\theta(t_i^2),\theta(t_k^2t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1),\theta(t_k^1t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1t_j^1),\theta(t_k^1t_\ell^1))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1t_j^1)$, $\theta(t_k^2t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^2t_j^2),\theta(t_k^2t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^1t_j^1),\theta(t_k^1t_\ell^2))$, $\varepsilon(\theta(t_i^2t_j^2),\theta(t_k^1t_\ell^2))$。

但し $\varepsilon(\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}),\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4}))$ は M_T の $\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2})$ 行，$\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$ 列に対応する要素を表わす。

__定理2.2.__ T が resolution V の 3^m- BFF design であるための必要十分条件は，$|M_T|\neq 0$ の下で，T が index set $\{\lambda_{i_0i_1i_2}\}$ をもつ B-array $[N,m,3,4]$ であることである。(詳しくは来田 [4] を参照).

$\gamma_{p_0p_1p_2}$ を，M_T の $\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2})$ 行，$\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$ 列 $(t_i\neq t_j\ (i\neq j))$ に対応し，$w_r(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=p_r\ (r=0,1,2)$ である要素とするとき，$\gamma_{p_0p_1p_2}$ と B-array の index $\lambda_{i_0i_1i_2}$ の関係は次式で与えられる。

$$(2.5)\quad \gamma_{p_0p_1p_2}=\sum\frac{p_0!}{i_0^0!\,i_1^0!\,i_2^0!}\cdot\frac{p_1!}{i_0^1!\,i_1^1!\,i_2^1!}\cdot\frac{p_2!}{i_0^2!\,i_1^2!\,i_2^2!}\cdot(-1)^{i_0^1}\cdot\delta_{0i_1^1}\cdot(-2)^{i_1^2}$$
$$\cdot\lambda_{i_0^0+i_0^1+i_0^2\ \ i_1^0+i_1^1+i_1^2\ \ i_2^0+i_2^1+i_2^2}\ 。$$

§3. Parameter の set の間に定義される relation

2個の parameter $\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2})$, $\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$ の間に次の様な relation $R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ を導入する：

もし $a=w_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $b=w_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $c=w_1(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$, $d=w_2(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$, $\underline{\alpha}=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22})$, (但し $\alpha_{11}=|\{\delta_{1\varepsilon_1}t_1,\delta_{1\varepsilon_2}t_2\}\cap\{\delta_{1\varepsilon_3}t_3,\delta_{1\varepsilon_4}t_4\}|$, $\alpha_{12}=|\{\delta_{1\varepsilon_1}t_1,\delta_{1\varepsilon_2}t_2\}\cap\{\delta_{2\varepsilon_3}t_3,\delta_{2\varepsilon_4}t_4\}|$, $\alpha_{21}=|\{\delta_{2\varepsilon_1}t_1,\delta_{2\varepsilon_2}t_2\}\cap\{\delta_{1\varepsilon_3}t_3,\delta_{1\varepsilon_4}t_4\}|$, $\alpha_{22}=|\{\delta_{2\varepsilon_1}t_1,\delta_{2\varepsilon_2}t_2\}\cap\{\delta_{2\varepsilon_3}t_3,\delta_{2\varepsilon_4}t_4\}|$) ならば

$$(3.1) \qquad \theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}) \xrightarrow{\quad R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}\quad} \theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$$

である。但し $|S|$ は，set S の cardinality を示す。

[注]．この relation はMDRSの公理を満足している。

Local relationship 行列 $A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = [a(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2};t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})_\alpha]$ $(s_{ab}\times s_{cd})$ を次の様に定義する；

$$(3.2) \qquad a(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2};t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{もし } \theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}) \xrightarrow{R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}} \theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

但し $s_{00}=1$，$s_{10}=s_{01}=m$，$s_{20}=s_{02}=\binom{m}{2}$，$s_{11}=2\binom{m}{2}$ である。

Ordered relationship 行列 $D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ $(\nu\times\nu)$ を

$$D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ とする。

$A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$，$D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ は次の様な性質をもっている：

$$(3.3) \qquad \sum_{\underline{\alpha}} A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = G_{s_{ab}\times s_{cd}}$$

$$(3.4) \qquad A_{\underline{\beta}}^{((a,b),(e,f))}\cdot A_{\underline{\gamma}}^{((e,f),(c,d))} = \sum_{\underline{\alpha}} \gamma((a,b),(c,d),\underline{\alpha}\,;\,(e,f),\underline{\beta},\underline{\gamma})\, A_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$$

$$(3.5) \qquad \sum_{a,b}\sum_{c,d}\sum_{\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))} = G_{\nu\times\nu}$$

$$(3.6) \qquad D_{\underline{\beta}}^{((a,b),(e,f))}\cdot D_{\underline{\gamma}}^{((g,h),(c,d))} = \delta_{eg}\delta_{fh}\sum_{\underline{\alpha}} \gamma((a,b),(c,d),\underline{\alpha}\,;\,(e,f),\underline{\beta},\underline{\gamma})\, D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}.$$

すなわち $\mathfrak{A} = [D_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}]$ は linear closure である。

§4. ある local relationship algebra

$A_{\underline{\alpha}}^{((1,1),(1,1))}$ $(\underline{\alpha}=(1001),(0110),(1000),(0001),(0100),(0010),(0000))$ を

考える。$H_1 = A^{((1,1),(1,1))}_{(1001)} + A^{((1,1),(1,1))}_{(0110)}$，$H_2 = A^{((1,1),(1,1))}_{(1001)} + A^{((1,1),(1,1))}_{(1000)}$とすると

<u>補題 4.1.</u>　$H_2 H_1 H_2 = G_{2\binom{m}{2}} + (m-2) H_2$ 。

<u>補題 4.2.</u>　$\mathfrak{A}^* = [A^{((1,1),(1,1))}_{\underline{\alpha}}]$

$$= [I, G, H_1, H_2, H_1H_2, H_2H_1, H_1H_2H_1]。$$

$\mathfrak{A}^*$は James[3] によって示された parameter v, b, r, k, λをもつ BIB design の relationship algebra の特別な場合になっている。すなわち，$B = H_1$，$T = H_2$，$N = vr = bk = 2\binom{m}{2}$，$r = m-1$，$k = 2$，$\lambda = 1$ 。

彼の方法を使って次の定理を得る。

<u>定理 4.1.</u>　$\mathfrak{A}^*$は４つの two-sided ideal $\mathfrak{A}^*_0$, $\mathfrak{A}^*_1$, $\mathfrak{A}^*_2$, $\mathfrak{A}^*_f$ の直和に分解され，各々の ideal $\mathfrak{A}^*_\beta$ $(\beta = 0, 1, 2)$，$\mathfrak{A}^*_f$ は，1×1，2×2 の完全行列環と isomorphic になり，その basis は各々，e_0，e_1，e_2，f_{11}，f_{12}，f_{21}，f_{22} で与えられる。

[注]．e_β $(\beta = 0, 1, 2)$，f_{ij} $(i, j = 1, 2)$ は $A^{((1,1),(1,1))}_{\underline{\alpha}}$ の一次結合で表わされ，

(4.1)　$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha$，$e_\alpha f_{ij} = f_{ij} e_\alpha = 0$，$f_{ik} f_{\ell j} = \delta_{k\ell} f_{ij}$

を満たす。

<u>定理 4.2.</u>　Local relationship 行列 $A^{((1,1),(1,1))}_{\underline{\alpha}}$ は e_β $(\beta = 0, 1, 2)$，f_{ij} $(i, j = 1, 2)$ の一次結合で次の様に書ける。

$$\begin{cases} A^{((1,1),(1,1))}_{(1001)} = e_0 + e_1 + e_2 + f_{11} + f_{22}, \\ A^{((1,1),(1,1))}_{(0110)} = e_0 + e_1 - e_2 - f_{11} + f_{22}, \end{cases}$$

$$(4.2)\quad \begin{cases} A^{((1,1),(1,1))}_{(1000)} = (m-2)\,e_0 - e_1 - e_2 + \frac{m-2}{2} f_{11} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}+f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\ A^{((1,1),(1,1))}_{(0001)} = (m-2)\,e_0 - e_1 - e_2 + \frac{m-2}{2} f_{11} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}+f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\ A^{((1,1),(1,1))}_{(0100)} = (m-2)\,e_0 - e_1 + e_2 - \frac{m-2}{2} f_{11} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}-f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\ A^{((1,1),(1,1))}_{(0010)} = (m-2)\,e_0 - e_1 + e_2 - \frac{m-2}{2} f_{11} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2}(f_{12}-f_{21}) + \frac{m-4}{2} f_{22}, \\ A^{((1,1),(1,1))}_{(0000)} = 2\binom{m-2}{2} e_0 + 2e_1 \qquad -2(m-3) f_{22}. \end{cases}$$

§ 5. Multidimensional relationship algebra

$D^{((1,1),(1,1))\#}_{\beta} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & e_\beta \end{array}\right]$, $D^{((1,1),(1,1))\#}_{f_{ij}} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & f_{ij} \end{array}\right]$ とすると，$\mathfrak{R} = [\,D^{((a,b),(c,d))}_{\underline{\alpha}}\,]$ は linear closure で，$D^{((1,1),(1,1))\#}_{\beta}$，$D^{((1,1),(1,1))\#}_{f_{ij}}$ は $D^{((1,1),(1,1))}_{\underline{\alpha}}$ の一次結合で書けるので，$D^{((1,1),(1,1))}_{\underline{\alpha}}$ 以外の行列 $D^{((a,b),(c,d))}_{\underline{\gamma}}$ も，$D^{((1,1),(1,1))\#}_{\beta}$ $(\beta=0,1,2)$，$D^{((1,1),(1,1))\#}_{f_{ij}}$ $(i,j=1,2)$ と $D^{((a,b),(1,1))}_{\underline{\delta}}$，$D^{((1,1),(c,d))}_{\underline{\delta^*}}$ の積の和で書き表わすことが出来る。

$D^{((a,b),(e,f))\#}_{\alpha} D^{((g,h),(c,d))\#}_{\beta} = \delta_{eg}\delta_{fh}\delta_{\alpha\beta} D^{((a,b),(c,d))\#}_{\alpha}$，$D^{((a,b),(e,f))\#}_{\alpha} D^{((g,h),(c,d))\#}_{\{f_{ij}\}} = D^{((a,b),(e,f))\#}_{\{f_{ij}\}} \cdot D^{((g,h),(c,d))\#}_{\alpha} = 0$，$D^{((a,b),(e,f))\#}_{\{f_{ik}\}} \cdot D^{((g,h),(c,d))\#}_{\{f_{\ell j}\}} = \delta_{eg}\delta_{fh}\delta_{k\ell} D^{((a,b),(c,d))\#}_{\{f_{ij}\}}$ となる様に $D^{((a,b),(c,d))\#}_{\alpha}$，$D^{((a,b),(c,d))\#}_{\{f_{ij}\}}$ を定めると，$\mathfrak{R} = [\,D^{((a,b),(c,d))\#}_{\beta}, D^{((a,b),(c,d))\#}_{\{f_{ij}\}}\,]$ となり，各々の ordered relationship 行列 $D^{((a,b),(c,d))}_{\underline{\alpha}}$ は $D^{((a,b),(c,d))\#}_{\beta}$ と $D^{((a,b),(c,d))\#}_{\{f_{ij}\}}$ の一次結合で表わされる。

$$\begin{cases} D^{((0,0),(0,0))}_{(0000)} = D^{((0,0),(0,0))\#}_{0}, \quad D^{((0,0),(c_1 d_1))}_{(0000)} = \sqrt{m}\, D^{((0,0),(c_1,d_1))\#}_{0}, \\ D^{((0,0),(c_2 d_2))}_{(0000)} = \sqrt{\binom{m}{2}}\, D^{((0,0),(c_2,d_2))\#}_{0}, \quad D^{((0,0),(1,1))}_{(0000)} = \sqrt{2\binom{m}{2}}\, D^{((0,0),(1,1))\#}_{0}, \end{cases}$$

$$
(5.1)\left\{
\begin{aligned}
D_{\alpha_0}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))} &= D_0^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#} + D_f^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_1,b_1)(c_1,d_1))} &= (m-1) D_0^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#} - D_f^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#}, \\
D_{\beta_0}^{((a_1,b_1),(c_2,d_2))} &= \sqrt{2(m-1)}\, D_0^{((a_1,b_1),(c_2,d_2))\#} + \sqrt{m-2}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_1,b_1)(c_2,d_2))} &= \sqrt{\frac{m-1}{2}}(m-2)\, D_0^{((a_1,b_1),(c_2,d_2))\#} - \sqrt{m-2}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_2))\#}, \\
D_{\gamma_0}^{((a_1,b_1),(1,1))} &= \sqrt{m-1}\, D_0^{((a_1,b_1)(1,1))\#} + \sqrt{\frac{m}{2}}\, D_{f_{11}f_{21}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#} + \sqrt{\frac{m-2}{2}}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1),(1,1))\#}, \\
D_{\gamma_1}^{((a_1,b_1)(1,1))} &= \sqrt{m-1}\, D_0^{((a_1,b_1)(1,1))\#} - \sqrt{\frac{m}{2}}\, D_{f_{11}f_{21}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#} + \sqrt{\frac{m-2}{2}}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_1,b_1)(1,1))} &= \sqrt{m-1}\,(m-2) D_0^{((a_1,b_1)(1,1))\#} - \sqrt{2(m-2)}\, D_{f_{12}f_{22}}^{((a_1,b_1)(1,1))\#}, \\
D_{\mu_0}^{((a_2,b_2)(c_2,d_2))} &= D_0^{((a_2,b_2)(c_2,d_2))\#} + D_1^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} + D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#}, \\
D_{\mu_1}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))} &= 2(m-2) D_0^{((a_2,b_2)(c_2,d_2))\#} - 2 D_1^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} + (m-4) D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#}, \\
D_{(0000)}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))} &= \binom{m-2}{2} D_0^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} + D_1^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#} - (m-3) D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(c_2,d_2))\#}, \\
D_{\xi_0}^{((a_2,b_2)(1,1))} &= \sqrt{2}\left\{ D_0^{((a_2,b_2)(1,1))\#} + D_1^{((a_2,b_2)(1,1))\#} + D_{f_{22}}^{((a_2,b_2)(1,1))\#} \right\}, \\
D_{\xi_1}^{((a_2,b_2)(1,1))} &= \sqrt{2}\left\{ (m-2) D_0^{((a_2,b_2),(1,1))\#} - D_1^{((a_2,b_2),(1,1))\#} + \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2} D_{f_{21}}^{((a_2,b_2),(1,1))\#} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{m-4}{2} D_{f_{22}}^{((a_2,b_2)(1,1))\#} \right\}, \\
D_{\xi_2}^{((a_2,b_2)(1,1))} &= \sqrt{2}\left\{ (m-2) D_0^{((a_2,b_2),(1,1))\#} - D_1^{((a_2,b_2),(1,1))\#} - \frac{\sqrt{m(m-2)}}{2} D_{f_{21}}^{((a_2,b_2),(1,1))\#} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{m-4}{2} D_{f_{22}}^{((a_2,b_2)(1,1))\#} \right\}, \\
D_{(0000)}^{((a_2,b_2),(1,1))} &= \sqrt{2}\left\{ \binom{m-2}{2} D_0^{((a_2,b_2),(1,1))\#} + D_1^{((a_2,b_2)(1,1))\#} - (m-3) D_{f_{22}}^{((a_2,b_2),(1,1))\#} \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

$\mathfrak{A}_0 = [D_0^{((a,b),(c,d))\#}]$, $\mathfrak{A}_1 = [D_1^{((a,b),(c,d))\#}]$, $\mathfrak{A}_2 = [D_2^{((1,1),(1,1))\#}]$, $\mathfrak{A}_f = [D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}]$ とすると，

補題 5.1. $\mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{A}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{A}_f = \mathfrak{A}_f \mathfrak{A}_\alpha = 0$。

定理 5.1. $\mathfrak{A}$は4つのtwo-sided ideal $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_f$ の直和に分解され，各々のideal $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_f$ は，

6×6, 3×3, 1×1 の完全行列環と isomorphic になり，各々の既約表現の重複度は，$\phi_0=1$，$\phi_1=\frac{m(m-3)}{2}$，$\phi_2=\binom{m-1}{2}$，$\phi_f=m-1$ で与えられる。

§6. Information 行列の固有多項式.

T を index set $\{\lambda_{i_0 i_1 i_2}\}$ をもつ B-array $[N, m, 3, 4]$ とする。M_T の $\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2})$ 行，$\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$ 列に対応する要素を $P_{\underline{\alpha}}^{((a,b)(c,d))}$ とする。但し $a=w_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $b=w_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $c=w_1(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$, $d=w_2(\varepsilon_3,\varepsilon_4)$, $\theta(t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2})\xrightarrow{R_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}}\theta(t_3^{\varepsilon_3}t_4^{\varepsilon_4})$ である。$P_{\underline{\alpha}}^{((a,b)(c,d))}$ は $\gamma_{p_0p_1p_2}$ の一次結合で書ける.

[注]. $\gamma_{p_0p_1p_2}$ と $\lambda_{i_0i_1i_2}$ の関係は (2.5) 式で与えられている。

T に関する M_T は

$$(6.1)\qquad M_T=\sum_{\underline{\alpha}}\sum_{a_1b_1}\sum_{c_1d_1} P_{\underline{\alpha}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))}\,D_{\underline{\alpha}}^{((a_1,b_1),(c_1,d_1))}$$

と書くことが出来る。また

$$(6.2)\qquad \begin{aligned} B_\beta^{((a,b),(c,d))\#} &= \begin{cases} D_\beta^{((a,b)(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)=(c,d) \\ D_\beta^{((a,b),(c,d))\#}+D_\beta^{((c,d),(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)\neq(c,d) \end{cases} \\ B_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#} &= \begin{cases} D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)=(c,d) \\ D_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#}+D_{\{f_{ij}\}}^{((c,d),(a,b))\#} & \text{もし } (a,b)\neq(c,d) \end{cases} \end{aligned}$$

とすると，M_T は

$$\begin{aligned} M_T=&\sum_\beta\sum_{ab}\sum_{cd}\kappa_\beta^{ab,cd}\,B_\beta^{((a,b),(c,d))\#} \\ &+\sum_{\{f_{ij}\}}\sum_{ab}\sum_{cd}\kappa_{\{f_{ij}\}}^{ab,cd}\,B_{\{f_{ij}\}}^{((a,b),(c,d))\#} \end{aligned}$$

と書ける。但し $\kappa_\beta^{ab,cd}$，$\kappa_{\{f_{ij}\}}^{ab,cd}$ は $P_{\underline{\alpha}}^{((a,b),(c,d))}$ (すなわち $\lambda_{i_0i_1i_2}$) の

一次結合で書き表わされる。

$\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_f$ に関する M_T の既約表現は，κ_0 (6×6)，κ_1 (3×3)，κ_2 (1×1)，κ_f (6×6) である。すなわち

$$(6.3) \quad \begin{cases} M_T \xrightarrow[(\beta)]{} \kappa_\beta = \| \kappa_\beta^{ab.cd} \| \\ M_T \xrightarrow[(f)]{} \kappa_f = \| \kappa_{\{f_{ij}\}}^{ab.cd} \|. \end{cases}$$

$I_\nu \in \mathfrak{A}$ なので

$$(6.4) \quad \begin{cases} M_T - xI_\nu \xrightarrow[(\beta)]{} \kappa_\beta - xI \\ M_T - xI_\nu \xrightarrow[(f)]{} \kappa_f - xI_6 \end{cases}$$

である。よって

<u>定理 6.1.</u>　Resolution V の 3^m–BFF design T の information 行列 M_T の固有多項式 $\psi(x)$ は次式で与えられる：

$$(6.5) \quad \psi(x) = |M_T - xI_\nu| = |\kappa_0 - xI_6|^{\phi_0} \cdot |\kappa_1 - xI_3|^{\phi_1} \cdot |\kappa_2 - x|^{\phi_2} \cdot |\kappa_f - xI_6|^{\phi_f}.$$

REFERENCES

[1] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhyā 17 143-164.

[2] Hoke, A. T. (1975). The characteristic polynomial of the information matrix for second-order models. Ann. Statist. 3 780-786.

[3] James, A. T. (1957). The relationship algebra of an experimental designs. Ann. Math. Statist. 28 993-1002.

[4] Kuwada, M. (1977). Balanced arrays of strength 4 and balanced fractional 3^m factorial designs. Submitted to J. Statist. Planning Inf.

[5] Shirakura, T. (1977). Contributions to balanced fractional 2^m factorial designs derived from balanced arrays of strength 2ℓ. Hiroshima Math. J. 217-285.

[6] Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Note on balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. Ann. Inst. Statist. Math. 27 377-386.

[7] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). On the characteristic roots of the information matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V, with applications. Ann. Math. Statist. 42 722-734.

[8] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. "Essays in Probability and Statistics" in honor of Professor J. Ogawa's 60-th birthday(Ed., S. Ikeda et al.).