数理解析研究所講究録
第 312 巻 1977 年 1-12

スペクトラム解析のある一般化

阪大 基礎工 谷口 正信

§0. 序

通常の + operation による時間 parameter の translation で k 次の moments が不変である random process は、k 次の弱定常過程とよばれる。これに対して Morettin [5] は dyadic translation によって k 次の moments が不変である process を dyadic stationary process of order k と呼んだ。

通常の k 次の弱定常過程に対して、k 次の spectrum of order k は k-th order moments の Fourier 変換として定義された。これらの統計的解析は (Brillinger-Rosenblatt [1], Rosenblatt-Van Ness [8]) 等にある。一方 dyadic stationary process of order k に対して Morettin [5] はこの k-th order moments を Walsh-Fourier 変換して Walsh spectrum of order k を定義した。ここでは この Walsh spectrum of order k の consistent estimate を与える。しかしこのことは 更に一般的な立場から議論が 行

なばれる。すなわち ある適当な translation operation $\oplus$ による"ずらし"で k 次の moments が不変である process を定義する。これを $\oplus$-stationary process と呼ぶ。
一方この process に対して、k 次の moments をその character group の上で Fourier 変換を行って、これをここで一般化された spectrum (generalized spectrum of order k) と呼ぶ。そして、この spectrum の consistent な推定量をつくる。

§1. Weakly $\oplus$-stationary process.

R を $(-\infty, \infty)$ もしくは $[0, \infty)$ とする。そして R を通常の real line の topology をもつ topological space とする。ここで R に operation $\oplus$ を定義する。任意の $x, y \in R$ に対して、operation $\oplus$ は次の $\underbrace{\text{条件をみたす}}_{(1.1)-(1.8)}$ とする。

(1.1) for any $x, y \in R$, $x \oplus y \in R$;

(1.2) for any $x, y \in R$, $x \oplus y = y \oplus x$;

(1.3) for any $x, y, z \in R$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

(1.4) for any $x \in R$ and for $0 \in R$, $x \oplus 0 = x$;

(1.5) for each $x \in R$, $\exists_1$ unique inverse element $\tilde{x} \in R$ such that $x \oplus \tilde{x} = 0$;

(1.6) for any $x, y \in R$ the mapping $(x, y) \to x \oplus \tilde{y}$ は Rの topology に関して連続;

(1.7) for any $x \in R$, for any Borel set A on R. $|A| = |A_x|$,
ただし $A_x = \{z \mid z = x \oplus y,\ y \in A\}$. 又 $|\cdot|$は Lebesgue Measure を表わす;

(1.8) for any $x, y \in R$, $\exists$ sequence $\{B_T\}$ such that $B_T \to 0$ as $T \to \infty$ and

$$B_T^{-1}(x \oplus y) = (B_T^{-1}x) \oplus (B_T^{-1}y), \text{ for all } x, y \in R.$$

注意) (1.8)では, 一般に分配律 $c(x \oplus y) = cx \oplus cy$, $\forall c, x, y \in R$ は成立しないので, 分配律が適当な数列に対しては成立することを要請している。 また integer T は すべての non-negative integers をわたるとは限らない)

すなわち, sequence $\{T\}$は適当な subsequence of all non-negative integers を表わすとする。

Example 1. Ordinary-plus case. もし $\oplus = +$（通常のプラス）とし, $R=(-\infty,\infty)$ とすれば (1.1)−(1.8) はみたされる。

Example 2. Dyadic case. x, y を non-negative real numbers で次の dyadic expansion をもつとする。

$$x=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k 2^k, \quad x_k = 0 \text{ or } 1,$$

$$y=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k 2^k, \quad y_k = 0 \text{ or } 1.$$

ここで dyadic translation $\dotplus$ on R は, 次の式の右辺で定義する。 $x \dotplus y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k \dotplus y_k) 2^k$,

ここで $x_k \dotplus y_k$ は mod. 2 of $\{0,1\}$ の addition, すなわち $0 \dotplus 0 = 0$, $0 \dotplus 1 = 1 \dotplus 0 = 1$, $1 \dotplus 1 = 0$.

ここで $\oplus = \dotplus$ on R とみなし $R=[0,\infty)$ とすれば, (1.1)−(1.8) はみたされる。ただし (1.8)では $B_T = 2^{-h(T)}$, $h(T)$ は $h(T)\to\infty$ as $T\to\infty$ である様な positive integer とすれば, みたされる。

Nを set of all integers or all non-negative integers (according as R is $(-\infty,\infty)$ or $[0,\infty)$) とする。 Gを group of the elements of R by mod. 1. とする。 $\widehat{G}=\{P(n,x): n\in N, x\in G\}$ として, G上の complex function $P(n,x)$ は次の (1.9)—(1.14) をみたすものとする。

(1.9) for all $n\in N$, $|P(n,x)|=1$, a.e. $x\in G$;

(1.10) for every $n\in N$ and for each $y\in G$,
$$P(n,x)P(n,y)=P(n,x\oplus y), \text{ a.e. } x\in G;$$

(1.11) for every $m, n\in N$,
$$P(m,x)P(n,x)=P(m\oplus n,x), \text{ a.e. } x\in G;$$

(1.12) $P(n,x)$ is $\oplus$-continuous at $x\in G$, i.e.
for any $\eta>0$, $\exists\,\delta>0$ $|h|<\delta \Rightarrow$
$|P(n,x\oplus h)-P(n,x)|<\eta$.

(1.13) the set $M_T=\{0,1,\dots,T-1\}$ generates N,
i.e. $N_T=\{t: t=m\oplus \tilde{n};\ m,n\in M_T\}\to N$
as $T\to\infty$;

(1.14)
$$D_T(x_j)=\begin{cases} T, & \text{if } j=1 \\ 0, & \text{if } j=2,\ldots,T, \end{cases}$$
ここに
$$D_T(x)=\sum_{k=0}^{T-1} P(k,x) \text{ and } x_j=\frac{j-1}{T}.$$

Example 1. Ordinary-plus case, $P(n,x)=\exp(2\pi i n x)$ とすれば (1.9)−(1.14) はみたされる。

Example 2. Dyadic case. まず Walsh functions $\{W(n,x):\ n=0,1,\ldots\}$ を次の様に定義する。

(1.17) $W(0,x)\equiv 1,\quad x\in G$;

(1.18) $W(n,x)=RD(n_1,x)\cdots RD(n_r,x)$, for $n=2^{n_1}+\cdots+2^{n_r}$, $(n_{i+1}<n_i)$. where $RD(j,x)=Rd(2^j x)$ $Rd(x+1)=Rd(x)$, and
$$Rd(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1/2 \\ -1, & 1/2\le x<1. \end{cases}$$

ここで $P(n,x)=W(n,x)$, $\oplus=\dot{+}$ とおけば 条件 (1.9)−(1.14) はみたされる。ただし (1.13) (1.14) は $T=2^n$ (n は positive integer) に対してみたされる。
参 Fine [2].

以後 r-vector valued process $X(t)=(X_1(t),\ldots,X_r(t))'$

$t \in N$, を扱う。そして $X_a(t)$, $a=1,\ldots,r$ に対してすべての order のすべての moment が存在するとする。

定義　$\{\mathbb{X}(t) : t \in N\}$ が k-th order weakly $\oplus$-stationary $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{E}\,\mathbb{X}(t) = \mathbb{O}$,

$$\mathcal{E}\{X_{a_1}(u_1 \oplus t) \cdots X_{a_{k-1}}(u_{k-1} \oplus t) X_{a_k}(t)\} = R_{a_1 \cdots a_k}(u_1, \ldots, u_{k-1})$$
(say)

は t に無関係, for all $u_1, \ldots, u_{k-1}$, $t \in N$, $a_j \in \{1, \ldots, r\}$。

仮定

$$(1.19) \quad \sum_{u_1 \in N} \cdots \sum_{u_{k-1} \in N} |R_{a_1 \cdots a_k}(u_1, \ldots u_{k-1})| < \infty .$$

定義　$f_{a_1 \cdots a_k}(x_1, \ldots, x_{k-1})$

$$= \sum_{u_1 \in N} \cdots \sum_{u_{k-1} \in N} R_{a_1 \cdots a_k}(u_1, \ldots, u_{k-1}) \prod_{j=1}^{k-1} P(u_j, x_j).$$

を generalized spectrum of order k と呼ぶ.

2. Estimation.　$\{\mathbb{X}(t) = (X_{a_1}(t), \ldots, X_{a_k}(t))'$, $t = 0, \ldots, T-1\}$ を $\oplus$-stationary process of order k の observation とする。次の statistic を定義する。

$$I_{a_1 \cdots a_k}^{(T)}(x_1, \ldots, x_k) = T^{-1} \prod_{j=1}^{k} \sum_{t=0}^{T-1} X_{a_j}(t) P(t, x_j).$$

$K(u_1,\dots,u_k)$ を ⊕-continuous function で

$$|K(u_1,\dots,u_k)| \le A \quad, \text{ if } {}^\forall |u_j| \le 1,\ j=1,\dots,k,$$
$$= 0, \qquad \text{otherwise},$$
$$K(u_1,\dots,u_k) = K(\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_k),$$

& $\int\cdots\int K(u_1,\dots,u_k)H(u_1,\dots,u_k)du_1\cdots du_k = 1$,

ここに A は positive constant で

$$H(u_1,\dots,u_k) = 1, \text{ if } u_1 \oplus\cdots\oplus u_k = 0 \ \&\ u_{k_1}\oplus\cdots\oplus u_{k_j} \ne 0$$
$$\{k_1,\dots,k_j\} \subsetneq \{1,\dots,k\},$$
$$= 0, \qquad \text{otherwise}.$$

$\{B_T\}$ を (1.8) をみたす real number の sequence で $TB_T \to \infty, \dots, TB_T^{k-1} \to \infty$ as $T \to \infty$ とする。

$K_T(u_1,\dots,u_k) = B_T^{-k+1} K(B_T^{-1}u_1,\dots,B_T^{-1}u_k)$ とおく。

ここで $f_{a_1\cdots a_k}(x_1,\dots,x_{k-1})$ の推定量として、

$$\hat{f}_{a_1\cdots a_k}(x_1,\dots,x_{k-1}) = T^{-k+1}\sum_{n_1\in N_T}\cdots\sum_{n_k\in N_T} I^{(T)}_{a_1\cdots a_k}\left(x_1\oplus\frac{n_1}{T},\right.$$
$$\left.\dots,\ x_k\oplus\frac{n_k}{T}\right)K_T(n_1/T,\dots,n_k/T)H(n_1/T,\dots,n_k/T),$$

ただし $x_1\oplus\cdots\oplus x_k = 0$ と提案する。

$$C_{a_1\cdots a_m}(u_1,\dots,u_{m-1}) = \text{cumulant}\{X_{a_1}(u_1\oplus t),\dots,X_{a_{m-1}}(u_{m-1}\oplus t),$$
$$X_{a_m}(t)\},$$

とおく。

integer u に対して、

$$\|u\|_T = T - \#\{t : 0 \le t \le T-1,\ 0 \le t \oplus u \le T-1,\ t \text{ being an integer}\},$$

$\#\{\cdot\}$ は $\{\cdot\}$ の中の element の個数を表わす。

仮定

(2.1) $$\lim_{T\to\infty} \sum_{u_1 \in N_T} \cdots \sum_{u_{m-1} \in N_T} \|u_j\|_T \,|c_{a_1\cdots a_m}(u_1,\ldots,u_{m-1})| < \infty,$$

for any j, $1 \le j \le k$, and any $1 \le m \le k$.

定理 1.

$$\lim_{T\to\infty} E(\hat{f}_{a_1\cdots a_k}(x_1,\ldots,x_{k-1})) = f_{a_1\cdots a_k}(x_1,\ldots,x_{k-1}).$$

定理 2.

$$\lim_{T\to\infty} B_T^{k-1}\cdot T\ Var(\hat{f}_{a_1\cdots a_k}(x_1,\ldots,x_{k-1}))$$

$$= \sum_P \int\cdots\int K(y_1,\ldots,y_k)K(y_{P(1)},\ldots,y_{P(k)})H(y_1,\ldots,y_k)dy_1\cdots dy_k$$

$$\times \prod_{j=1}^{k} f_{a_j a_{P(j)}}(x_j), \qquad (x_1 \oplus \cdots \oplus x_k = 0),$$

ここに $\sum_P$ は $(1,\ldots,k)$ のすべての permutation をわたる。

また $f_{a_j a_{P(j)}}$ は generalized spectrum of order 2.

を表わす。

定理3.

$(B_T^{k-1}T)^{1/2}\{\hat{f}_{a_1\cdots a_k}(x_1,\ldots,x_{k-1})-\mathcal{E}\hat{f}_{a_1\cdots a_k}(x_1,\ldots,x_{k-1})\}$
は漸近的に平均 0 で分散は定理2で与えられる正規分布に従う。

結論　通常の k 次の stationary process に対しては定理1−3の結果は Brillinger−Rosenblatt [1] に reduce される。また dyadic stationary process of order k に対しては, $T=2^n$, $B_T=2^{-h(T)}$ の型にとることによって $\hat{f}_{a_1\cdots a_k}$ に対する定理1−3の結果を得る: ただし仮定 (2.1) は $\|u_j\|_T\equiv 0$, for $T=2^n$ であるので自動的にみたされる。

3. Dyadic Stationary Process の AR表現とMA表現.

Dyadic Stationary な有限 AR process は有限 MA 表現が可能であることは, 永井(1976)で報告されているが, このことは explicit に次の形で表わせることがわかる。

有限AR dyadic stationary process, $\sum_{k=0}^{p} a_k X(n\dotplus k)=u(n)$, $u(n)\sim$ i.i.d. $(0,\sigma^2)$, ($p=2^m-1$ の型とする) において,

$a_0+a_1W(1,x)+\cdots+a_pW(p,x)\neq 0$, a.e. $x\in G$,

であるとき この process $X(n)$ は正則条件をみたすと言うことにする。

命題1.

$$\det\{a_{i+j}\}_{i,j=0,\dots,p} = \prod_{j=0}^{p}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k W(k, x_j)\right)$$

ここに $x_k = \dfrac{k}{p+1}$, $k = 0, \dots, p$.

よって Walsh 函数の性質より,

$$\text{正則条件} \iff \det\{a_{i+j}\} \neq 0$$

を得る。

命題2. 有限AR dyadic stationary process $X(n)$ は, 正則条件のもとで $X(n) = \sum_{k=0}^{p} b_k u(n \dotplus k)$ と表わせる。

ただし $(b_0, \dots, b_p)$ は

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i+j} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

の unique な解。

REFERENCES

[1] BRILLINGER, D.R., and ROSENBLATT, M. (1967).
Asymptotic theory of estimates of k-th order spectra.
Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series (Harris, ed.). Wiley, New York. 153-188.

[2] FINE, N.J. (1949). On the Walsh functions.
Trans. Am. Math. Soc. 65. 372-414.

[3] HALMOS, P.R. (1950). *Measure Theory.*
D. Van. Nostrand Co., New York.

[4] LEONOV, V.P., and SHIRYAEV, A.N. (1959). On a method of calculation of semi-invariant.
Theor. Prob. Appl. 4. 319-329.

[5] MORETTIN, P.A. (1974). Walsh-Function analysis of certain class of time series. *Stochastic Processes and their Applications.* 2. 183-193.

[6] NAGAI, T. (1976). Dyadic stationary processes and their spectral representations. *Bull. Math. Statist.* 17. (to appear).

[7] PONTRJAGIN, L.S. (1939). *Topological Groups.* Princeton Univ. Press.

[8] ROSENBLATT, M., and VAN NESS, J.W. (1965). Estimation of the bispectrum. *Ann. Math. Statist.* 36. 1120-1136.

[9] RUDIN, W. (1962). *Fourier Analysis on Groups.* Interscience Publishers. New York and London.

[10] CHRESTENSON, H.E. (1955). A class of generalized Walsh functions, Pacific J. Math. 5. 17-31.

[11] 永井武昭. (1976). Dyadic 定常過程のスペクトル表示とその線形模型について。 日本数学会予稿集. (東工大).