数理解析研究所講究録
第312巻 1977年 13-23

定常過程における自己相関係数の領域

中塚利直

§1 序

$\{x_t\}$ は弱定常過程. $\gamma_s = \int_0^\pi \cos s\lambda\, dF(\lambda)$ はその s 階の自己共分散とする。F は $F(\pi) = \frac{1}{\pi}\gamma_0$, $F(0-) = 0$ なるスペクトル分布関数である。$\mathcal{F}$ は $F(\pi) = \frac{1}{\pi}\gamma_0$, $F(0-) = 0$ なる右連続単調非減小関数の全体とする。集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ に対して.

$$\mathcal{R}_m(\mathcal{U}) = \{(\rho_1, \cdots, \rho_m) \in R^m : \rho_j = \gamma_j/\gamma_0,\ \gamma_s = \int_0^\pi \cos s\lambda\, dF,\ F \in \mathcal{U}\}$$

と定める。

時系列解析においては自己回帰モデル等に限定して考える場合が多い。そのことは $\mathcal{F}$ のある部分集合を真のスペクトル分布関数の存在可能領域と設定したことに等しい。そこで $\mathcal{R}_m(\mathcal{U})$ がどのような領域をとるかを検討しておけば. 当て嵌めの良さを比べたり. 推定量の値域と~~母~~数域とを比べたりする際にはなはだ便利である。とりあえず検討を要する $\mathcal{U}$ として以下の場合がある。

(1) $\mathcal{F}$

(2) $\mathcal{F}_1$ … 絶対連続な $\mathcal{F}$ の関数の全体

(3) $\mathcal{F}_2$ … $\mathcal{F}$ の元で有限個の点以外では定数となっている階段関数の全体

(4) $\mathcal{F}_3$ … $\mathcal{F}$ の元で、ほとんどいたるところ微分0の連続関数の全体

(5) $MA(p)$ … p 階の移動平均過程となる $\mathcal{F}$ の元の全体.

(6) $AR(p)$ … p 階の自己回帰過程となる $\mathcal{F}$ の元の全体

(7) $EX(p)$ … p 階の指数型スペクトル分布関数の全体

(8) $HI(p)$ … p 階のヒストグラム型スペクトル分布関数の全体.

(1)(2)(3)(4)(5)については Nakatsuka[2] に論じている。その主要な結果は以下の通りである。

$\mathbb{P}(\lambda) = (\cos\lambda, \cdots, \cos m\lambda)$ とする.

[定理 1] $\mathcal{R}_m(\mathcal{F})$ は曲線 $\{\mathbb{P}(\lambda) ; 0 \leq \lambda \leq \pi\}$ を含む最小の凸集合である。

次に、記号 ∂ は境界を表わすものとすると.

[定理 2] $\mathcal{R}_m(\mathcal{F}_1) = \mathcal{R}_m(\mathcal{F}_3) = \mathcal{R}_m(\mathcal{F}) - \partial\mathcal{R}_m(\mathcal{F})$

即ち. $\mathcal{R}_m(\mathcal{F}_1)$, $\mathcal{R}_m(\mathcal{F}_3)$ は $\mathcal{R}_m(\mathcal{F})$ の内点の全体である。

[定理 3] $\mathcal{R}_m(\mathcal{F}_2) = \mathcal{R}_m(\mathcal{F})$

特に. 有限個の点 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ の上でのみ増加する階段

関数の全体を $\mathcal{U}_{\lambda_1,\cdots,\lambda_p}$ とすると、$\mathcal{R}_m(\mathcal{U}_{\lambda_1,\cdots,\lambda_p})$ は $\mathbb{P}(\lambda_1),\cdots,\mathbb{P}(\lambda_p)$ の張る閉凸集合となる。

[定理4]　(i)　$\mathcal{R}_p(MA(p))$ は $\mathcal{R}_p(\mathcal{F})-\partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$ 内の閉凸集合である。

(ii)　$\mathcal{R}_p(MA(n+1)) \supset \mathcal{R}_p(MA(n))$, $n=1,2,\cdots$

(iii)　$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_p(MA(n)) = \mathcal{R}_p(\mathcal{F})-\partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$

本論文では(6)(7)(8)の場合について検討してみよう。

§2. $AR(p)$

ここでは次の定理だけ示す。

[定理5]　任意の正の整数 p に対し、

$$\mathcal{R}_p(AR(p)) = \mathcal{R}_p(\mathcal{F})-\partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$$

(証明)　定理2より $\mathcal{R}_p(AR(p)) \subset \mathcal{R}_p(\mathcal{F})-\partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$。逆の包含関係を示すために $\mathcal{R}_p(AR(p))$ が凸集合であることを示そう。$\{\rho_{1,s}: s=1,\cdots,p\}$ $\{\rho_{2,s}: s=1,\cdots,p\}$ はいずれも $\mathcal{R}_p(AR(p))$ の元とする。$0\leq\nu\leq1$ なる任意の数 ν に対し、

$$\rho_{3,s} = \nu\rho_{1,\nu}+(1-\nu)\rho_{2,s},\qquad s=1,\cdots,p.$$

とすると、$(\rho_{3,1},\cdots,\rho_{3,p}) \in \mathcal{R}_p(\mathcal{F})-\partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$ となるので $\rho_s=\rho_{3,s}$, $s=1,\cdots,p$ となる正規非負定符号数列 $\{\rho_s\}$ が存在する。それに対応する偏自己相関関数を $\{\Phi_s\}$ としよう。

$$\Psi_s^* = \begin{cases} \Psi_s & : \quad s = 1, \cdots, p \\ 0 & : \quad s \geq p+1 \end{cases}$$

とすると、Ramsey [3] の定理1より、$|\Psi_s^*| < 1$、従って Ψ_s^* を偏自己相関関数にもつスペクトル分布関数 F が存在する。([3] P. 1298, 第6行)。そして [3] の定理3より、$F \in AR(p)$、このFに対応する自己相関関数 $\{\rho_s^*\}$ においては $\rho_s^* = \rho_{3,s}$、$s = 1, \cdots, p$ となるので、$\mathcal{R}_p(AR(p))$ の凸性が言えた。

区間 $[0, \pi]$ 上の任意の数 λ に対し、$AR(p)$ の中に λ 上の一点分布に収束する列が存在することを見るのは容易である。よって、$\mathcal{R}_p(AR(p))$ の閉包は曲線 $\{p(\lambda) : 0 \leq \lambda \leq \pi\}$ を含む凸集合である。従って $\overline{\mathcal{R}_p(AR(p))} = \mathcal{R}_p(\mathcal{F})$、ここから定理が続く。 (証明終)

§3. EX(p)

密度関数が $f(\lambda, \theta) = \frac{1}{\pi} \exp\left(\sum_{s=0}^{p} \theta_s \cos s\lambda\right)$, $\theta = (\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_p)'$ と表わされる絶対連続関数に対応する $(\rho_1, \cdots, \rho_p)$ のとりうる範囲を考えてみよう。その前に母数 θ と $(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_p)$、あるいは $(\theta_1, \cdots, \theta_p)$ と $(\rho_1, \cdots, \rho_p)$ の対応関係を調べてみる。

$m \times n$ 行列 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ において各要素 $a_{ij}(\lambda)$ は R^1 上の可測関数とする。この時、行列 $(\int_E a_{ij}(\lambda) d\lambda)$ を $\int_E A(\lambda) d\lambda$

あるいは $\int_E A d\lambda$ と表わす。但し，E は R^1 上の可測集合である。

［定理 6］ $\gamma_s(\theta) = \int_0^\pi (\cos s\lambda) f(\lambda, \theta) d\lambda$； $\gamma(\theta) = (\gamma_0(\theta), \gamma_1(\theta), \cdots, \gamma_p(\theta))'$ とすると，$\gamma(\theta)$ は R^{p+1} 上の C^∞ 級同型写像である。

（証明） $P^*(\lambda) = (1, \cos\lambda, \cdots, \cos p\lambda)'$ とすると，ヤコビ行列 $J(\theta)$ は

$$J(\theta) = \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \theta_k}\right)$$

$$= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 1, & \cos\lambda & , \cdots, & \cos p\lambda \\ \cos\lambda, & \cos^2\lambda & , \cdots, & \cos\lambda\cos p\lambda \\ & & & \\ \cos p\lambda, & \cos\lambda\cos p\lambda, & \cdots, & \cos^2 p\lambda \end{pmatrix} f(\lambda, \theta) d\lambda$$

$$= \int_0^\pi P^*(\lambda) P^*(\lambda)' f(\lambda, \theta) d\lambda$$

$\{1, \cos\lambda, \cdots, \cos p\lambda\}$ は $[0, \pi]$ 上のチェビシェフ系であるから，零ベクトルでない任意の $p+1$ 次元ベクトル x に対し，集合 $\{\lambda : \lambda \in [0, \pi], P^*(\lambda)' x \neq 0\}$ はルベーグ測度正である。よって

$$x' \left(\int_0^\pi P^* P^{*\prime} f d\lambda \right) x = \int_0^\pi x' P^* P^{*\prime} x f d\lambda > 0$$

即ち，$\int_0^\pi P^* P^{*\prime} f d\lambda$ は正定符号となり，上記ヤコビアンは正となる。よって，$\gamma(\theta)$ は局所 C^∞ 級同型写像である。

次に1対1対応を示そう。任意の二点 $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$ に対し、

$$\gamma_i(\mathbb{b}) - \gamma_i(\mathbb{a}) = \left[\gamma_i(\xi\mathbb{b} + (1-\xi)\mathbb{a})\right]_0^1$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{d\xi}\gamma_i(\xi\mathbb{b} + (1-\xi)\mathbb{a})d\xi$$

$\theta = \xi\mathbb{b} + (1-\xi)\mathbb{a}$ とおくと、

$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial\gamma_i}{\partial\theta_j}\frac{d\theta_j}{d\xi}d\xi$$
$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial\gamma_i}{\partial\theta_j}(b_j - a_j)d\xi$$

よって

$$\gamma(\mathbb{b}) - \gamma(\mathbb{a}) = \left\{\int_0^1 J(\xi\mathbb{b} + (1-\xi)\mathbb{a})d\xi\right\}(\mathbb{b} - \mathbb{a})$$

$J(\theta)$ は常に正定符号であるから $\int_0^1 J(\xi\mathbb{b} + (1-\xi)\mathbb{a})d\xi$ も正定符号である。よって、$\gamma(\mathbb{b}) = \gamma(\mathbb{a})$ ならば $\mathbb{b} = \mathbb{a}$.

(証明終)

$$\rho_s = \frac{\int_0^\pi \cos s\lambda \exp\left(\sum_{t=1}^{p}\theta_t \cos t\lambda\right)d\lambda}{\int_0^\pi \exp\left(\sum_{t=1}^{p}\theta_t \cos t\lambda\right)d\lambda}$$

より ρ_s は θ_0 には依存しない。そして次の系が成立する。

[系]　$\rho_1, \cdots, \rho_p$ は $\theta_1, \cdots, \theta_p$ の関数とみた時 C^∞ 級同型写像である。

(証明)　$\theta \to \gamma$, $\gamma \to (\gamma_0, \rho_1, \cdots, \rho_p)$ はどちらも C^∞ 級同型写像で、$\frac{\partial\rho_s}{\partial\theta_0} = 0$, $\frac{\partial\gamma_0}{\partial\theta_0} = \gamma_0$ であるから、

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial \theta_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial \rho_1}{\partial \theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \rho_p}{\partial \theta_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial \rho_p}{\partial \theta_p} \end{vmatrix} = \gamma_0^{-1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \gamma_0}{\partial \theta_0}, & \cdots, & \dfrac{\partial \gamma_0}{\partial \theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \rho_p}{\partial \theta_0}, & \cdots, & \dfrac{\partial \rho_p}{\partial \theta_p} \end{vmatrix}$$

$$= \gamma_0^{-p} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \gamma_0}{\partial \theta_0}, & \cdots, & \dfrac{\partial \gamma_0}{\partial \theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \gamma_p}{\partial \theta_0}, & \cdots, & \dfrac{\partial \gamma_p}{\partial \theta_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

よって $\rho_1, \cdots, \rho_p$ は局所 C^∞ 級同型写像である。

次に1対1対応を考えると、$(\theta_0, \theta_{11}, \cdots, \theta_{1p})$ と $(\theta_0, \theta_{21}, \cdots, \theta_{2p})$ がそれぞれ $(\gamma_{10}, \rho_1, \cdots, \rho_p)$ と $(\gamma_{20}, \rho_1, \cdots, \rho_p)$ に移されると仮定する。すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int \exp\left(\theta_0 + \log \frac{\gamma_{20}}{\gamma_{10}} + \sum_{t=1}^{p} \theta_{1t} \cos t\lambda\right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_{20}}{\gamma_{10}} \int \exp\left(\theta_0 + \sum_{t=1}^{p} \theta_{1t} \cos t\lambda\right) d\lambda \\ &= \gamma_{20} \end{aligned}$$

よって $\left(\theta_0 + \log \frac{\gamma_{20}}{\gamma_{10}}, \theta_{11}, \cdots, \theta_{1p}\right)$ は $(\gamma_{20}, \rho_1, \cdots, \rho_p)$ に移される。このことは定理より $\theta_{1i} = \theta_{2i}$ を意味している。

(証明終)

[定理7] $\mathcal{R}_p(EX(p)) = \mathcal{R}_p(\mathcal{F}) - \partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$

(証明) $\mathcal{R}_p(EX(p)) \subset \mathcal{R}_p(\mathcal{F}) - \partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$ は明らか。逆を証明しよう。$\rho_1, \cdots, \rho_p$ は $\theta_1, \cdots, \theta_p$ の空間 R^p からの C^∞ 級同型写像であるから、$\mathcal{R}_p(EX(p))$ は開集合である。そこで $\{P_j\}$ を $\mathcal{R}_p(EX(p))$ のある境界点へ収束する $\mathcal{R}_p(EX(p))$ 内

の点列とすると、それに対応する母数の列 $\{\theta_j\}$ は発散する。なぜなら、ある有界集合内にとどまる $\{\theta_j\}$ の部分列が存在するならば、その部分列の中に、ある点 θ_0 に収束する部分列が存在し、その部分列に対応する $\{\rho_j\}$ の部分列は θ_0 に対応する点に収束する。これは $\{\rho_j\}$ が開集合 $\mathcal{R}_p(EX(p))$ の境界点に収束することに反す。

ある特定の整数 k に対し、$|\theta_{j,k}| \geq |\theta_{j,t}|$, $t=1,\cdots,p$ となるように部分列を選ぶことができる。その部分列の中では $\nu_{j,t} = \theta_{j,t}/\theta_{j,k}$ とおくと、$-1 \leqq \nu_{j,t} \leqq 1$ であるから、$\nu_{j,t}$ がある値 ν_t に収束するように部分列を選ぶことができる。それを $\{\theta_{j_n}\}$ とする。

今、$\sum_{s=1}^{p} \nu_s \cos s\lambda_1 > \sum_{s=1}^{p} \nu_s \cos s\lambda_2$ なる二点 λ_1, λ_2 をとってみると、

$$\frac{\exp\left(\sum_{s=1}^{p} \theta_{js} \cos s\lambda_1\right)}{\int_0^{\pi} \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \theta_{js} \cos s\lambda\right) d\lambda} \Bigg/ \frac{\exp\left(\sum_{s=1}^{p} \theta_{js} \cos s\lambda_2\right)}{\int_0^{\pi} \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \theta_{js} \cos s\lambda\right) d\lambda}$$

$$= \left[\exp\left\{\sum_{s=1}^{p} \nu_{js} \cos s\lambda_1 - \sum_{s=1}^{p} \nu_{js} \cos s\lambda_2\right\}\right]^{\theta_{j,k}}$$

この値は θ_j が $\{\theta_{j_n}\}$ 上を増大していく時 ∞ になる。即ち、$[0,\pi]$ 上のスペクトル確率密度関数は、$\sum_{s=1}^{p} \nu_s \cos s\lambda$ の最大点のみに確率をもつ分布に弱収束する。ところで、その最大点の個数は $\lambda = 0, \pi$ をそれぞれ 0.5 と勘定した時、$\frac{p}{2}$ 個以下と

なる。よって、Karlin and Studden [1] の定理2.1より、ρ_{j_n} は $\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$ の境界上に収束する。これは $\mathcal{R}_p(EX(p)) = \mathcal{R}_p(\mathcal{F}) - \partial\mathcal{R}_p(\mathcal{F})$ を意味している。

(証明終)

§4. HI(p)

スペクトル密度関数が

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi}\tau_j\,; \quad \frac{(j-1)\pi}{p+1} \le \lambda \le \frac{j\pi}{p+1}, \quad \tau_j > 0, \quad \prod_{j=1}^{p+1}\tau_j = 1$$

と表わされる定常過程を p 階のヒストグラム型と呼び、$HI(p)$ と表わす。$\mathcal{R}_k(HI(p))$ については次のことが言える。

[定理8] k, p は $k \le p$ なる任意の二つの整数とする。

$$c_{s,j} = \frac{p+1}{s\pi}\left\{\sin\frac{sj\pi}{p+1} - \sin\frac{s(j-1)\pi}{p+1}\right\}, \quad j = 1, \cdots, p+1$$

$$\mathbb{C}_j = (c_{1j}, \cdots, c_{kj})'$$

とする。ならば $\mathcal{R}_k(HI(p))$ は $\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_{p+1}$ の張る凸包の内部である。

(証明) $\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_{p+1}$ の張る凸包の内部を U としよう。$\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_k)' \in \mathcal{R}_k(HI(p))$ ならば、

$$\rho_s = \sum_{j=1}^{p+1} c_{s,j}\tau_j \Big/ \sum_{j=1}^{p+1}\tau_j, \quad (\tau_j > 0, \ \prod\tau_j = 1) \qquad (1)$$

となる τ_j が存在する。この式から $\rho \in \overline{U}$ であること、即ち $\overline{\mathcal{R}_k(HI(p))} \subset \overline{U}$ であることがわかる。(1) において、一つの τ_j を ∞ に向けると ρ は $\mathbb{C}_j$ に近づく。ゆえに $\mathbb{C}_j \in \overline{\mathcal{R}_k(HI(p))}$。

また $\mathcal{R}_k(HI(p))$ は凸集合である。なぜなら $F_1, F_2 \in HI(p)$ ならば $0 \leqq \nu \leqq 1$ なる任意の数 ν に対し、$\nu F_1 + (1-\nu)F_2 \in HI(p)$ であるから。よって、$\overline{U} = \overline{\mathcal{R}_k(HI(p))}$ となる。

あとは $\mathcal{R}_k(HI(p))$ が開集合であることを示せばよい。ある $\tau_1, \cdots, \tau_{p+1}$ が $\mathcal{R}_k(HI(p))$ の境界点 P を生み出したと仮定してみよう。P を通る $\mathcal{R}_k(HI(p))$ の支持超平面を $l = \{\sum_{s=1}^{k} a_s x_s = b\}$ としよう。ならば $\sum_{j=1}^{p+1}\left(\sum_{s=1}^{k} a_s c_{s,j} - b\right)\tau_j = 0$ となる。$\tau_j > 0$ であり、l は $\overline{U}$ の支持超平面でもあるから、全ての j に対し $\sum_{s=1}^{k} a_s c_{s,j} = b$ となる。よって、$\mathcal{R}_k(HI(p))$ は l に含まれる。$\mathcal{R}_k(HI(p))$ には零ベクトルが含まれるから、$b = 0$ でなければならない。従って $(a_1, \cdots, a_k)(\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_k) = 0$ 即ち、行列 $(\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_k)$ は特異でなければならない。そこで $(\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_k)$ が正則であることを示すことによって矛盾を明らかにしよう。

$$c_{s,j} = \frac{p+1}{2s\pi}\left\{\left(e^{s\lambda'_j i} - e^{-s\lambda'_j i}\right) - \left(e^{s\lambda'_{j-1} i} - e^{-s\lambda_{j-1} i}\right)\right\}$$

となる。但し、$\lambda'_j = \frac{j\pi}{p+1}$

$$\begin{aligned} c_{s,j} &= \frac{p+1}{2s\pi}\left(e^{s\lambda'_1 i} - 1\right)\left(e^{s\lambda'_{j-1} i} + e^{s\lambda'_j i}\right) \\ &= \frac{p+1}{2s\pi}\left(e^{2s\lambda'_1 i} - 1\right)e^{s\lambda'_{j-1} i} \end{aligned}$$

ここから、

$$|\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_k| = \prod_{s=1}^{k}\left\{\frac{p+1}{2s\pi}\left(e^{2s\lambda'_1 i} - 1\right)\right\}|A| \neq 0$$

となる。但し、A は $e^{s\lambda'_{j-1} i}$ を要素とするファンデルモン

ドの行列式である。よって（$\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_k$）は正則である。

（証明終）

参　考　文　献

[1] Karlin, S. J. and W. J. Studden. (1966). Tchebycheff Systems : with applications in analysis and statistics, John Wiley & Sons, Inc.

[2] Nakatsuka, T. Regions of autocorrelation coefficients and of their estimators in a stationary time series. Annals of the Institute of Statistical Mathematics. To appear.

[3] Ramsey, F. L. (1974). Characterization of the partial autocorrelation function. Annals of Statistics. 2. 1296−1301.