数理解析研究所講究録
第 312 巻 1977 年 24-43

定常点過程の統計的漸近理論

統計数理研究所　尾形良彦

§1. はじめに

点列 $\omega = \{t_j ; j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ は集積点をもたない実直線上の点列で $\cdots < t_{-1} < 0 \leqq t_0 < t_1 < \cdots$ となっているものとする。counting measure $N(A)=N(A,\omega)$ はボレル集合 $A \in \mathcal{B}^1$ に対して $\omega \cap A$ の点の数を対応させるものである。点過程の法則 P が与えられたとき時間 t についての complete intensity function は次のように定義される。

$$(1.1) \qquad \lambda(t,\omega) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t,t+\delta)=1 \mid \mathcal{H}_t\}$$

ここに $\mathcal{H}_t$ は ω の時間 t 以前の履歴、すなわち $N(A)$, $A \subset (-\infty, t)$ で生成された σ-加法族である。いいかえると $\lambda(t,\omega)$ は t と $\{t_j \in \omega, t_j < t\}$ を変数とする関数として表現される。

以下いくつかの例をあげる。

例1 ポアソン過程

$$\lambda(t, \omega) = \lambda(t)$$

このとき $N(A)$ の分布は，$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$P(N(A) = k) = (1/k!)\left(\int_A \lambda(t)\,dt\right)^k \exp -\int_A \lambda(t)\,dt$$

定常ならば $\lambda(t) = \lambda = const.$

例2 Survivor function $F(x)$ の更新過程

$$\lambda(t, \omega) = -\frac{d}{dt}\log F(t - t^*)$$

ここで $t^* < t$ は最近の点。（hazard function）

例3 Wold process [6]

これは更新過程の拡張になっている。かんたんのため $m = 2$ の場合を与える。時間 t について最近の2点 $t^{**} < t^* < t$ についての区間の長さに対しての同次分布を $F(t - t^*, t^* - t^{**})$ で与えると，この条件付 hazard 関数は

$$\lambda(t, \omega) = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\log \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) F(\tau, \sigma)\right\}$$

となる。

例4．Hawkes の self-exciting process [2]

出生死滅過程の死滅がない場合について移住時点と出生時点がつくる点列を考える。移住者が到着するのは平均 μ の定常ポアソンに従い，それらおよびそれらの子孫たちは生まれてからの時間 $(t, t+dt)$ のあいだに $\gamma(t)\,dt$ の確率で子どもを一つ生む。$\int_0^\infty \gamma(u)\,du < 1$ であるとき点過

程は定常になり、intensity function は

$$\lambda(t,\omega)=\mu+\int_{-\infty}^{t}\gamma(t-u)dN(u)=\mu+\sum_{t_i<t}\gamma(t-t_i)$$

で与えられる。

いま、考えているクラスの点過程は、complete intensity function に対して定常点過程が存在し、しかも一意にきまるものに限っておく。上にあげた例たちはこのことを保証されている。さて時間区間 $[0,T]$ に於いて点列 $\{t_i\}_{t\geq 0}$ が観測されたときに我々は次のような尤度関数を考えることができる。すなわち intensity function をパラメトライズして $\lambda_\theta(t,\omega)$, $\theta\in\Theta$, としたとき、対数尤度関数は形式的に次で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T(\theta)&=-\int_0^T\lambda_\theta^*(t,\omega)dt+\int_0^T\log\lambda_\theta^*(t,\omega)dN(t)\\&=-\int_0^T\lambda_\theta^*(t,\omega)dt+\sum_{0\leq t_i\leq T}\log\lambda_\theta^*(t_i,\omega)\end{aligned}$$

ただし、実際的には

$$\lambda_\theta^*(t,\omega)=E\{\lambda_\theta(t,\omega)\mid\mathcal{H}_{0,t}\}$$

となるために λ_θ^* は定常でないが、$T\to\infty$ とともに漸近的には λ_θ のふるまいと違わないことが期待される。このことには最後の節でのべる。ここでは λ_θ^* は λ_θ と思って話をすすめる。

最尤推定量 $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(t_i\,;\,0 \leqq t_i \leqq T)$ は尤度を最大にするものとして定義する。 $\mathcal{L}_T(\hat{\theta}_T) = \max_{\theta} \mathcal{L}_T(\theta)$。
これはまた $\partial \mathcal{L}_T(\theta)/\partial\theta = 0$ の解にもなっている。

§2. 仮定および準備。

仮定

(A 1) 点過程は定常エルゴード的。

(A 2) 点過程は orderly ; $\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} P\{N(0,\delta) \geqq 2\} = 0$。

(A 3) $\sup_{0<\delta\leqq 1} \frac{1}{\delta} E\{N(0,\delta)^2 \mid \mathcal{H}_{-\infty,0}\}$ は P-可積分。

(A 4) Θ は compact , $\Theta \subset R^d$

(A 5) 任意の $\theta \in \Theta$, $t \in R^1$ に対して $\lambda_\theta(t,\omega) > 0$ a.s.。

(A 6) $\theta_1 = \theta_2$ if and only if $\lambda_{\theta_1}(0,\omega) = \lambda_{\theta_2}(0,\omega)$ a.s. P。

(A 7) $\forall \theta \in \Theta$, $t \in R$ に対して $\partial \log\lambda/\partial\theta_i$, $\partial^2 \log\lambda/\partial\theta_i\partial\theta_j$, $\partial^3 \log\lambda/\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k$, $i,j,k = 1,2,\cdots,d$, が存在する。

(A 8) 任意 $t \in R$, $\theta \in \Theta$ について $|\partial\lambda/\partial\theta_i| \leqq \Lambda_1(t,\omega)$, $|\partial\lambda/\partial\theta_i\partial\theta_j| \leqq \Lambda_2(t,\omega)$, $i,j = 1,2,\cdots,d$, で $\Lambda_1(t,\omega)$, $\Lambda_2(t,\omega)$ は $\mathcal{H}_{-\infty,t}$-adapted かつ P に関して2乗可積分。

(A 9) 任意の θ に対して $I(\theta) = \left\{E\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}\right)\right\}_{i,j=1,\cdots,d}$ は正則行列で $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}$, $i,j = 1,\cdots,d$, は P に関して2乗可積分。

(A 10) 任意の $\theta \in \Theta$, $t \in R$ に対して $|\partial^3\lambda/\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k| \leqq$

$H(t,\omega)$, $|\partial^3 \log \lambda / \partial\theta_i \partial\theta_j \partial\theta_k| \leqq G(t,\omega)$, $i,j,k=1,\cdots,d$,

であり適当な正数 $M>0$ に対して $E_\theta\{H(t,\omega)\}<M$,

$E_\theta\{\lambda_\theta(t,\omega)^{2} G(t,\omega)^2\}<M$。

<u>補題 1</u>

(A1)～(A3) のもとで

1°. $E[N(0,1)^2] < \infty$

2° $\displaystyle \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t,t+\delta) \geqq 2 \mid \mathcal{H}_t\} = 0$

3° $\displaystyle \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} E[N(t,t+\delta)^2 \mid \mathcal{H}_t] = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} E[N(t,t+\delta) \mid \mathcal{H}_t]$

<u>証明</u>

1°. $\delta=1$ として (A3) からただちに導かれる。

2° $E[1/\delta \cdot P\{N(t,t+\delta) \geqq 2 \mid \mathcal{H}_t\}]$

$$\leqq E\left[\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{\infty} i^2 P\{N(t,t+\delta)=i \mid \mathcal{H}_t\}\right] \leqq E\left[\frac{1}{\delta} E\{N(t,t+\delta) \mid \mathcal{H}_t\}\right]$$

だから (A3) によって orderliness (A2) とあわせて

$$E\left[\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t,t+\delta) \geqq 2 \mid \mathcal{H}_t\}\right]$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t,t+\delta) \geqq 2\} = 0$$

被積分関数はいたるところ non-negative だから

$$\lim_{\delta \to 0} P\{N(t,t+\delta) \geqq 2 \mid \mathcal{H}_t\} = 0。$$

3° orderliness (A3) によって $n\to\infty$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)^2-\sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)\to 0 \quad \text{a.s.}.$$

$$N(0,1)=\sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right) \text{ であり}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)^2 \leqq \left\{\sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)\right\}^2=N(0,1)^2$$

1°によって有界収束定理がつかえて

$$n\,E\left[N\left(0,\frac{1}{n}\right)^2\right]\to E\{N(0,1)\}$$

$$n\,E\left[N\left(0,\frac{1}{n}\right)\right]\to E\{N(0,1)\}\text{。}$$

すなわち

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}E\{N(t,t+\delta)^2\}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}E\{N(t,t+\delta)\}=E[N(0,1)]$$

$N(t,t+\delta)$ は非負 integer-valued だから次の非積分関数は non-negative であって

$$E\left[\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}E\{N(t,t+\delta)^2|\mathcal{H}_t\}-\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}E\{N(t,t+\delta)|\mathcal{H}_t\}\right]$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{\delta}E\{N(t,t+\delta)^2\}-\frac{1}{\delta}E[N(t,t+\delta)]\right]=0$$

だから 3° が導かれる。

§3. 結果

我々は確率過程 $\xi=\{\xi(t,\omega),t\geqq 0\}$ が <u>adapted</u> であるとは、固定した $t\geqq 0$ に対して $\xi(t,\omega)$ が $\mathcal{H}_{-\infty,t}$ 可測

であるときに言う。ここでは定義を与えないがadptedな確率過程のsubclass 亜とは<u>predictableな確率過程</u>(c.f. [3] page 2)のことを意味する。ここでは、我々は$\xi = \{\xi(t,\omega);\ t \geq 0\}$がa.s.な$\omega$に対して標本関数が左連続ならば亜$\ni \xi$である事実を知るだけで満足することとしよう。仮定のときに述べるのを忘れてしまったことであるが$\lambda_\theta(t,\omega)$, $\frac{\partial}{\partial\theta_i}\lambda_\theta(t,\omega)$, $\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\lambda_\theta(t,\omega)$などのintensity processの必要な汎関数はすべてpredictableであることとする。

さて、これも我々はすでに書いてしまったことであるが確率積分(Stieltjes) $\int_0^T \xi(t,\omega)\,dN(t) = \sum_{0 \leq t_i \leq T} \xi(t_i(\omega),\omega)$は、ここではpredictableな$\xi$に対して考えている。そうすると我々は次のような形式的な演算をすることを許されている。

$\int_0^T E\{\lambda_{\theta_0}(t,\omega)\,|\xi(t,\omega)|\}\,dt < \infty$ ならば

$$E\left\{\int_0^T \xi(t,\omega)\,dN(t)\right\} = E\left[E\left\{\int_0^t \xi(t,\omega)\,dN(t)\,\middle|\,\mathcal{H}_{-\infty,t}\right\}\right] = E\left[\int_0^t \xi(t,\omega)\,E\{dN(t)\,|\,\mathcal{H}_{-\infty,t}\}\right] = E\left\{\int_0^T \xi(t,\omega)\,\lambda_{\theta_0}(t,\omega)\,dt\right\}$$

以下、結果をあげて証明のあらすじを述べる。

<u>定理1</u>

仮定(A1)から(A9)のもとに$\theta = \theta_0$に対して

$$E\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\theta_i}\right\} = 0 \quad , i = 1, 2, \cdots d$$

$$E\left\{\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\theta_i}\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial\theta_j}\right\} = -E\left\{\frac{\partial^2 \mathcal{L}_T}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right\} = T\cdot E\left\{\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}\right\} \quad i, j = 1, \cdots, d。$$

証明.

後半を示す。$\theta=\theta_0$ に対して補題1の1°, 2°によって

$$E\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}_T}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]=E\left[-\int_0^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial\theta_i\partial\theta_j}dt+\int_0^T\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\theta_i\partial\theta_j}dN(t)-\int_0^T\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}dN(t)\right]$$

$$=E\left\{-\int_0^T\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}dt\right\}=-T\cdot E\left\{\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}\right\}。$$

他方，$\theta=\theta_0$ に対して

$$E\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\theta_i}\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial\theta_j}\right\}$$

$$=E\left[\int_0^T\int_0^T\frac{\partial\lambda(s)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda(t)}{\partial\theta_j}\left\{ds\,dt-\frac{dN(s)dt}{\lambda(s)}-\frac{ds\,dN(t)}{\lambda(t)}+\frac{dN(s)dN(t)}{\lambda(s)\lambda(t)}\right\}\right]$$

$$=E\left[\iint_{\{0\le s<t\le T\}}+\iint_{\{0\le t<s\le T\}}+\iint_{\{0\le s=t<T\}}\right]$$

$$=I_1+I_2+I_3,$$

ここに $\lambda(s)=\lambda_{\theta_0}(s,\omega)$。$s<t$ に対して形式的にいうと

$E\{dN(s)dN(t)\mid\mathcal{H}_t\}=dN(s)\lambda(t)dt$ となるから $I_1=0$

同様にして $I_2=0$。最後に補題1の3°によって形式的にいうと

$$E\{(dN(t))^2\mid\mathcal{H}_t\}=E\{dN(t)\mid\mathcal{H}_t\}=\lambda(t)dt$$

が成立するから

$$I_3=E\left\{\int_0^T\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}dt\right\}=T\cdot E\left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_j}\right]。$$

以上にでてくる被積分関数が non-anticipating であることや2乗可積であることは仮定たちから明らかなことである。

補題2

確率過程 $\xi(t,\omega)$ は定常で2次モーメントをもち non-anticipating であるとせよ。すると

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t,\omega)\,dt = E\{\xi(0,\omega)\} \quad a.s.,$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t,\omega)\frac{dN(t)}{\lambda(t)} = E\{\xi(0,\omega)\} \quad a.s.$$

証明

補題の仮定と(A1)によって $\xi(t,\omega)$ はエルゴード的であるから最初のものはエルゴード定理。2番目について、

$$\eta(T,\omega) = \int_0^T \xi(t,\omega)\frac{dN(t)}{\lambda(t)} - \int_0^T \xi(t,\omega)\,dt$$

とおけ。

$$Y_i = \eta(i,\omega) - \eta(i-1,\omega), \quad i=1,2,\cdots,[T]$$

は定常なマルチンゲールの差になっている。よって Kolmogorov の不等式によって $\sum_{i=1}^{[T]} Y_i / T \to 0$ a.s. となる。故に $\eta(T,\omega)/T \to 0$ a.s. となって前半の結果とあわせて後半が得られた。

補題3

単位区間 $[0,1]$ における対数尤度比、

$$L_1^*(\theta) = \int_0^1 (\lambda_\theta - \lambda_{\theta_0})\,dt + \int_0^1 \log\frac{\lambda_{\theta_0}}{\lambda_\theta}\,dN(t)$$

に対して

$$E[L_1^*(\theta)] \geq 0, \quad \theta \in \Theta$$

ただし等号は $\lambda_\theta(0,\omega)=\lambda_{\theta_0}(0,\omega)$ a.s. のときにかぎる。

<u>証明</u>

$$E[L_1^*(\theta)]=E\left[\lambda_\theta(0,\omega)-\lambda_{\theta_0}(0,\omega)+\lambda_{\theta_0}(0,\omega)\log\frac{\lambda_{\theta_0}(0,\omega)}{\lambda_\theta(0,\omega)}\right]$$

一般に $x>0$ に対して $\log x \geqq 1-x^{-1}$ が成立して等号は $x=1$ のときにかぎることにより証明できる。

<u>定理2.</u>

仮定(A1)～(A7)のもとに最尤推定量 $\hat{\theta}_T=\hat{\theta}_T(t_i,\ 0\leqq t_i\leqq T)$ は一致性をもつ。

<u>証明</u>

θ の近傍 U が $\{\theta\}$ に縮まると同時に、仮定(A7)から λ_θ は θ について連続であるから、

$$E[\inf_{\theta'\in U}\lambda_{\theta'}]\longrightarrow E[\lambda_\theta]$$

$$E\left[\lambda_{\theta_0}\log\frac{\lambda_{\theta_0}}{(\sup_{\theta'\in U}\lambda_{\theta'})}\right]\longrightarrow E\left[\lambda_{\theta_0}\log\frac{\lambda_{\theta_0}}{\lambda_\theta}\right]$$

となる。いま θ_0 の近傍を任意に U_0 ととる。任意の $\theta\in\Theta\setminus U_0$ に対して $E[L_1^*(\theta)]\geqq 3\varepsilon$ となるような適当な $\varepsilon>0$ をとることができる。$L_1^*(\theta)$ は θ について連続だから補題3と仮定(A6)をつかえばよいからである。

さて任意の $\theta\in\Theta\setminus U_0$ に対して θ の近傍 U を適当にとれば

$$E\left[\inf_{\theta'\in U}\lambda_{\theta'}-\lambda_{\theta_0}+\lambda_{\theta_0}\log\frac{\lambda_{\theta_0}}{\sup_{\theta'\in U}\lambda_{\theta'}}\right]\geqq L_1^*(\theta)-\varepsilon\geqq 2\varepsilon$$

とできる。Θ\\$U_0$はコンパクト集合であるからこれを覆う有限個の$\theta_s$, $s=1,2,\cdots N$を選ぶことが出来る。すなわち$U_s = U(\theta_s)$とおけば$\Theta \setminus U_0 \subset \bigcup_{s=1}^{N} U_s$。ところで$\inf_{\theta\in U} \lambda_\theta(t,\omega)$, $\sup_{\theta\in U} \lambda_\theta(t,\omega)$はpredictable processだからTを充分大きくとると補題2によって$\varepsilon>0$および$s=1,2,\cdots,N$に対して$(T \geqq T_0(\varepsilon))$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\mathcal{L}_T(\theta_0) - \sup_{\theta\in U_s}\frac{1}{T}\mathcal{L}_T(\theta) \\
&\geqq \frac{1}{T}\int_0^T \left(\inf_{\theta\in U_s}\lambda_\theta - \lambda_{\theta_0}\right)dt + \frac{1}{T}\int_0^T \log\frac{\lambda_{\theta_0}}{\sup_{\theta\in U_s}\lambda_\theta}\,dN(t) \\
&\geqq E\left[\inf_{\theta\in U_s}\lambda_\theta - \lambda_{\theta_0} + \lambda_{\theta_0}\log\frac{\lambda_{\theta_0}}{\sup_{\theta\in U_s}\lambda_\theta}\right] + \varepsilon \\
&\geqq \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成立する。すなわちθ_0の任意の近傍U_0について$T_0 = T_0(U_0)$が存在して、$T \geqq T_0$ならば

$$
\sup_{\theta\in U_0}\mathcal{L}_T(\theta) \geqq \sup_{\theta\in\Theta - U_0}\mathcal{L}_T(\theta) + \varepsilon T \qquad a.s.
$$

これは定理2を導く。

<u>定理3</u>

θ_0の適当な近傍で尤度のHessian $\left\{\frac{1}{T}\frac{\partial^2\mathcal{L}_T(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right\}_{i=1,2,\cdots,d}$は漸近的にnegative-definite.

証明略。

例5. intensity function の parametrization と尤度の単峰性。

$$\lambda_\theta(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \xi_i(t,\omega) + \eta(t,\omega)$$

$$\lambda_\theta(t,\omega) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i \xi_i(t,\omega) + \eta(t,\omega) \right\}$$

(ただし ξ_i, η は点過程について predictable)

は尤度は単峰である。事実，それぞれ $u_i \in R$ $i=1,2,\cdots,d$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{d} u_i u_j \frac{\partial^2 \mathcal{L}_T}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^{k} u_i \xi_i \right)^2 \Big/ \lambda_\theta^2 \right\} dN(t) \\ -\displaystyle\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{k} u_i \xi_i \right)^2 \lambda_\theta \, dt \end{cases}$$

となる。

定理4

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial\theta} \longrightarrow N(\underline{0}, I(\theta_0)), \quad T \to \infty$$

証明。

$0 \leqq S \leqq T$, $i=1,2,\cdots d$ について

$$E\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial\theta_i} \Big| \mathcal{H}_S \right\} = \frac{\partial \mathcal{L}_S(\theta_0)}{\partial\theta_i} + E\left[\Delta(S,T) \,|\, \mathcal{H}_S \right]$$

ただし

$$E\{\Delta(S,T) \,|\, \mathcal{H}_S\} = E\left[\int_S^T \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \left\{ \frac{dN(t)}{\lambda} - dt \right\} \Big| \mathcal{H}_S \right] = 0$$

となることから $\partial\mathcal{L}_T(\theta_0)/\partial\theta$ はマルチンゲールである。そこで

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{[T]} \Delta(k-1, k) + \Delta([T], T)$$

と分解すると確率変数列 $\{\Delta(k-1, k)\}_{k=1,2,\cdots}$ は定常エルゴード的なマルチンゲール差になり $E\{\Delta(0,1)\Delta(0,1)'\}$ $= I(\theta_0)$ となることが定理1より導かれるから

$$\frac{1}{\sqrt{[T]}} \sum_{k=0}^{[T]-1} \Delta(k, k+1) \longrightarrow N(\underline{0}, I(\theta_0))。$$

一方 $1/\sqrt{T} \cdot \Delta([T], T) \to 0$ in prob. から定理4を得る。

定理5

$\hat{\theta}_T$ が最尤推定量のとき $T \to \infty$ とともに

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) \longrightarrow N(0, I(\theta_0)^{-1})$$

$$2\{\mathcal{L}_T(\hat{\theta}_T) - \mathcal{L}_T(\theta_0)\} \longrightarrow \chi^2_d$$

証明

$$0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) +$$

$$+ \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0)' \left\{ -\frac{\alpha}{T}\int_0^T H(t,\omega)\,dt + \frac{\beta}{T}\int_0^T G(t,\omega)\,dN(t) \right\} (\hat{\theta}_T - \theta_0)$$

は仮定(A7)〜(A10)と定理2によって充分大きなTに対して導かれる。ここに α, β は確率変数を成分とする行列で $|\alpha_{ij}|, |\beta_{ij}| \leq d^2/2$。任意の $\delta > 0$ に対して T を充分大きくとったとき $\theta = \theta_0$ に対して

$$\left| -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial\lambda}{\partial\theta\partial\theta'}dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta'}dN(t)\right| < \delta d^2$$

$$\left| I(\theta_0) + \frac{1}{T}\int_0^T -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}dN(t)\right| < \delta d^2$$

$$\left| \frac{\alpha}{T}\int_0^T H(t,\omega)dt + \frac{\beta}{T}\int_0^T G(t,\omega)dN(t)\right| < 2d^3M^3$$

となる。$T\to\infty$ とともに $|\hat\theta_T-\theta_0|\to 0$ a.s. だから適当な $\varepsilon_T>0$, 但し $T\to\infty$ とともに $\varepsilon_T\to 0$, に対して

$$\left|\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial\mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial\theta} - \sqrt{T}\,I(\theta_0)(\hat\theta_T-\theta_0)\right| \leq \varepsilon_T\left|\sqrt{T}(\hat\theta_T-\theta_0)\right|$$

を得るので前半の結果がいえる。後半については、

$$2\{\mathcal{L}_T(\hat\theta_T)-\mathcal{L}_T(\theta_0)\}$$
$$= 2\frac{\partial\mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial\theta'}(\hat\theta_T-\theta_0) + (\hat\theta_T-\theta_0)'\frac{\partial^2\mathcal{L}_T(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'}(\hat\theta_T-\theta_0) +$$
$$+ |\hat\theta_T-\theta_0|^3\left\{\int_0^T \alpha^* H(t,\omega)dt + \int_0^T \beta^* G(t,\omega)dN(t)\right\}$$

となるような α^*, β^*, $|\alpha^*|, |\beta^*| \leq d^2/2$ が存在し最後の項は0に収束 (a.s) するから後半の結果をうる。

4、初期条件についての問題.

いままで漸近的な結果を出すために intensity function $\lambda_\theta(t,\omega)$ は定常過程である必要があった。しかしこれは、とりもなおさず $\lambda_\theta(t,\omega)$ が $\mathcal{H}_t=\mathcal{H}_{-\infty,t}$ の関数である

こと，すなわち$-\infty$の過去からの影響があることを考慮にいれているということである。実際には観測できるのは時間区間$[0,T]$なのだから、当然 intensity function としては、たとえば$\lambda^*_\theta(t,\omega)=E[\lambda_\theta(t,\omega)\mid \mathcal{H}_{0,t}]$を代用することになる。これは$T\to\infty$とともに$\lambda(t,\omega)$に収束することはわかるが、問題は、そのスピードである。その違いが、補題2のタイプの極限定理や中心極限定理に影響を与えない程度のものである必要がある。確率収束のいみでの条件を要求したとき下の条件は見易い規準になるものと思う。

<u>条件B</u>

$$\left|\lambda_\theta(t,\omega)-\lambda^*_\theta(t,\omega)\right| \leqq f_0(t,\theta)\,\xi_0(\theta,\omega),$$

$$\left|\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i}-\frac{\partial\lambda^*}{\partial\theta_i}\right| \leqq f_1(t,\theta)\,\xi_1(\theta,\omega),$$

$$\left|\frac{\partial\lambda}{\partial\theta_i\partial\theta_j}-\frac{\partial\lambda^*}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right| \leqq f_2(t,\theta)\,\xi_2(\theta,\omega)$$

$$\left|\frac{\partial^3\lambda}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}-\frac{\partial^3\lambda^*}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}\right| \leqq f_3(t,\theta)\,\xi_3(\theta,\omega)$$

$$i,j,k=1,\cdots,d.$$

ただし$T\to\infty$とともに

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f_\nu(t,\theta)\,dt \longrightarrow 0, \quad \nu=0,1,2,3,$$

これらの条件は、例1ならば定常ポアソン、例2,3は自動的に満足している。例4についてもたとえば

$$\lambda_\theta = \mu + \int_{-\infty}^{t} \alpha e^{-\beta(t-u)} dN(u) \quad , \quad 0<\alpha<\beta ,$$

ならば

$$\lambda^*_\theta = \mu + \frac{\alpha\mu}{\beta-\alpha} e^{-\beta t} + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-u)} dN(u)$$

だから

$$|\lambda_\theta - \lambda^*_\theta| = e^{-\beta t} \cdot \left\{ \frac{\alpha\mu}{\beta-\alpha} + \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{\beta u} dN(u) \right\}$$

である。よって $f_2(t,\theta) = (-t)^{\nu} e^{-\beta t}$ となって条件が満されていることになる。

§5. Cramer-Rao の不等式

いま区間 $(0,T)$ において点列 $0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq T$ が観測されたとして点過程 P_θ の母数 $\theta \in \Theta \subset R^k$ に対する推定量 $\delta_T = \delta_T(\omega)$, $(\omega = (\cdots, t_1, t_2, \cdots, t_n \cdots))$, を考える。さてここで点過程 P_θ, $\theta \in \Theta$, は区間 $(0,T)$ で、intensity 1 のポアソン過程 P_π に対して絶対連続であるとする。このとき Radon-Nykodim 微分は

$$p_\theta(\omega) = \frac{dP_\theta}{dP_\pi} = \exp\left\{ \int_0^T \log \lambda^*_\theta(t) dN(t) + \int_0^T (1-\lambda^*_\theta(t)) dt \right\}$$

で与えられることが知られている。以下において必要な正則条件(たとえば微分と積分の交換など)は、すべて満す

ものとする。

定理 6

$E_\theta(\delta_T) = \theta + b_T(\theta)$, $I_T^*(\theta) = \int_0^T E\{\frac{1}{\lambda^*(t)}\frac{\partial\lambda^*}{\partial\theta}\frac{\partial\lambda^*}{\partial\theta'}\}dt$

$$\Sigma(\delta_T) \geq \left(I + \frac{db_T(\theta)}{d\theta}\right)' I_T^*(\theta)^{-1}\left(I+\frac{db_T(\theta)}{d\theta}\right)$$

ここで $\Sigma(\delta_T)$ は δ_T の共分散行列。等号は $\delta_T = \mathrm{const} \times \frac{\partial}{\partial\theta}\log p_\theta(\omega)$ の時。不等号は非負定値を意味する。

証明

$E_\theta(\delta_T) = \int \delta_T P_\theta(d\omega) = \int \delta_T(\omega) p_\theta(\omega) P_\pi(d\omega)$。

$\therefore \frac{d}{d\theta}E_\theta(\delta_T) = \int_\Omega \delta_T \frac{\partial}{\partial\theta'} p_\theta(\omega)P_\pi(d\omega) = \int \delta_T \left(\frac{\partial}{\partial\theta'}\log p_\theta(\omega)\right) p_\theta(\omega) P_\pi(d\omega)$

$$= \int_\Omega \delta_T \frac{\partial}{\partial\theta'}\log p_\theta(\omega) P_\theta(d\omega) = E_\theta\left[\delta_T \frac{\partial}{\partial\theta'}\log p_\theta(\omega)\right]$$

定理1と同様に $E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log p_\theta(\omega)\right] = \underline{0}$ がいえるから任意のベクトル $s, t \in R^k$ に対して

$$\left\{t'\left(I + \frac{d}{d\theta}b_T(\theta)\right)s\right\}^2 = \left\{t' \mathrm{cov}\left(\delta_T \frac{\partial}{\partial\theta'}\log p_\theta(\omega)\right)s\right\}^2$$

$$\leq E\left(t'(\delta_T-\theta-b_T(\theta))(\delta_T-\theta-b(\theta))'t\right) E\left[s\frac{\partial}{\partial\theta}\log p_\theta(\omega)\frac{\partial}{\partial\theta'}\log p_\theta(\omega)s\right],$$

ここで $S = E[(\delta_T-\theta-b_T(\theta))(\delta_T-\theta-b_T(\theta))']^{-1}\left(I+\frac{d}{d\theta}b_T(\theta)\right)t$ と置いて代入すると証明は終る。

さて $I_T^*(\theta)/T \longrightarrow I(\theta)$, $T\to\infty$, となることが λ^* と λ の条件からわかるから、この定理6と定理5によって次の定理を得る。

定理7

仮定Aと条件Bのもとに最尤推定量$\hat{\theta}_T$はBest Asymptotic Normal推定量である。

例5

ポアソン過程のintensity θについてのFisher情報量は$1/\theta$である。最尤推定量は$N(0,T)/T$であり、$(0,\infty)$で一様な事前分布を与えたベイズ推定量は$(N(0,T)+1)/T$となる。これらはいずれもCramer-Raoのlower-boundをattainするが前者が不偏推定量である。

§6、ポアソン過程の最尤推定量による特徴づけ

更新過程を生き残り関数によって以下のようにパラメトライズする。すなわち、いま$\int_0^\infty dF(x)=1$, $\int_0^\infty x\,dF(x)=1$なる分布関数に対して生き残り関数が$\mathcal{F}_\theta(x)=1-F(\theta x)$なる更新過程を考えたとき$E[N(0,1)]=\theta$となることが知られている。$F(x)$は必要な正則条件をすべてみたすとする。

定理8

更新過程の平均intensity θに関しての最尤推定量が$N(0,T)/T$であるための必要十分条件は$F(x)=e^{x}$, すなわち

定常ポアソン過程となることである。

証明

十分条件は前節の例5で与えた。必要条件。いま観測 $0\leqq t_1<t_2<\cdots<t_n\leqq T$ を任意に与えたとき対数尤度は

$$\log L_T(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\log \theta f(\theta(t_i-t_{i-1}))+\log\{1-F(\theta(T-t_n))\}$$

で与えられることが計算できる。(c.f. 例2)このとき $(\partial/\partial\theta)\log L_T(\frac{n}{T})=0$ が条件から要求されて、これから

$$0=T+\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\frac{f'(\frac{n}{T}(t_i-t_{i-1}))}{f(\frac{n}{T}(t_i-t_{i-1}))}+\frac{-(T-t_n)f(\frac{n}{T}(T-t_n))}{1-F(\frac{n}{T}(T-t_n))}$$

ただし $f(x)=dF(x)/dx$, $t_0=0$。$T=t_n$, $\xi_i=\frac{n}{T}(t_i-t_{i-1})$, $g(\xi)=\{\xi f'(\xi)/f(\xi)\}+1$, とおくと

$$\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)=0,\ \forall\xi_i>0,\ \sum\xi_i=n,$$

となる。いま $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_{n-1}=1+h$, $\xi_n=1-(n-1)h$, とおき $G(\xi)=g(1+\xi)$ とおくと

$$G(-(n-1)h)=-(n-1)G(h)。$$

このことから $G(h)=-ch$ が導かれ、条件 $\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty xf(x)dx=1$ によって $c>0$ に対して

$$f(x)=\frac{c^c}{\Gamma(c)}x^{c-1}e^{-cx}$$

が得られる。しかるに $t_n<T$ の時には、この $f(x)$ に対して、$n=T$, $t=T-t_n$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L_T\left(\frac{n}{T}\right) = ct + \frac{-f(t)}{1-F(t)} = 0$$

となって定数cはc=1となる。よって証明おわり。

References

[1] Kabanov, Yu. M. & Liptser, R. Sh. & Shiryaev, A. N., (1975), Martingale Method in the theory of Point Processes, Proceeding of Vilnius Symposium U.S.S.R. (in Russian).

[2] Hawkes, A. G. & Oakes, D., (1974), A Cluster Process Representation of a Self-exiting Point Process, J. Appl. Prob., 11, 493-503.

[3] Meyer, P. A., (1972), Martingale and Stochastic Integrals I, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

[4] Ogata, Y. (1977), The Asymptotic Behavior of Maximum Likelihood Estimator of Stationary Point Processes, submitted to Annals of Institute of Statistical Mathematics.

[5] Ozaki, T. (1977), The Maximum Likelihood Estimator of the Hawkes' Self-exciting Point Processes, This Volume.

[6] Vere-Jones, D., (1975), Lectures on Point Processes, Department of Statistics, University of California, Berkeley.