数理解析研究所講究録
第 312 巻 1977 年 109-114

時系列推定における Second Order Asymptotic Efficiency

東大 経　竹内 啓
電通大　赤平昌文

§1. 序

次のような自己回帰過程$\{X_i\}$について考察する。

$$X_i = \theta X_{i-1} + U_i \quad (i=1,2,\cdots)$$

ここで $X_0 = 0$ で $\{U_i\}$ は平均 0，分散σ^2をもつ密度関数 f に従う独立な確率変数列とする。いま $|\theta|<1$ であると仮定する。θ の 2 次の漸近的中央値不偏 (asymptotically median unbiased = AMU) 推定量の 2 次の漸近分布の bound を、一様に attain する 2 次の AMU 推定量を 2 次の漸近的有効 (as. (asymptotically) efficient) 推定量と定義する。[1] において、θ の 2 次の AMU 推定量の漸近分布の bound を求め、さらに f が正規分布の密度関数であるとき、最小 2 乗推定量 (LSE) は 2 次の as. efficient であることを示した。ここでは、「LSE の他に 2 次の as. efficient になる推定量はないであろうか？」という問題について考えてみる。実

はYule-Walker推定量が2次のas. efficientになることが示される。

§2. 定義

$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$を標本空間、$\Theta$をパラメーター空間で$R^1$の開集合であるとする。$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$の$n$個の直積を$(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$で表わす。$(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$上に次のような確率測度の族の列$\{P_{n,\theta} : \theta \in \Theta\}$ $(n=1,2,\cdots)$を考える。

$$P_{n,\theta}(B^{(n)}) = P_{n+1,\theta}(B^{(n)} \times \mathcal{X}), \quad \forall B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}.$$

$\mathcal{X}^{(n)}$からΘの中への$\mathcal{B}^{(n)}$-可測関数の列$\{\hat{\theta}_n\}$をθの推定量とよぶ。これからは簡単のために$\{\hat{\theta}_n\}$を$\hat{\theta}_n$と書くことにする。ある正数の単調増加列$\{c_n\}$ $(\lim_{n\to\infty} c_n = \infty)$に対して推定量$\hat{\theta}_n$が$\{c_n\}$-一致推定量であるとは、任意の$\varepsilon > 0$と任意の$\vartheta \in \Theta$に対して、十分小さな$\delta > 0$と十分大きな$L > 0$が存在して $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} P_{n,\theta}(\{c_n|\hat{\theta}_n - \theta| \geq L\}) < \varepsilon$ が成り立つことである([2], [3])。ここでの議論は$c_n = \sqrt{n}$の場合のみを考えている。$\hat{\theta}_n$を$\{\sqrt{n}\}$-一致推定量であるとする。

定義1. $\hat{\theta}_n$が2次のAMUであるとは、任意の$\vartheta \in \Theta$に対して、ある正数δがあって

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \sqrt{n} \left| P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq 0\}) - \frac{1}{2} \right| = 0 ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta:|\theta-\vartheta|<\delta} \sqrt{n}\,\left|P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\geq 0\})-\frac{1}{2}\right|=0$$

となることである。

定義2. 2次のAMU推定量 $\hat{\theta}_n$ について、$F_\theta(t)+\frac{1}{\sqrt{n}}G_\theta(t)$ が $\hat{\theta}_n$ の2次の漸近分布であるとは、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\left|P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\leq t\}) - F_\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{n}}G_\theta(t)\right|=0$$

となることである。

$\hat{\theta}_n$ を2次のAMU推定量とする。$\theta_0(\in\Theta)$ を任意に固定する。このとき帰無仮説 $H^+: \theta=\theta_0+tn^{-\frac{1}{2}}\ (t>0)$, 対立仮説 $K: \theta=\theta_0$ なる検定問題を考える。$A_{\hat{\theta}_n,\theta}=\{c_n(\hat{\theta}_n-\theta)\leq t\}$ とおくと、$P_{n,\theta_0+tn^{-1/2}}(A_{\hat{\theta}_n,\theta_0})=1/2+o(n^{-1/2})$ となる。$\mathcal{U}_2$ を2次のAMU推定量の全体とする。また $\Phi_{1/2}$ を $E_{n,\theta_0+tn^{-1/2}}(\phi_n)=1/2+o(n^{-1/2})$ を満たす検定関数の列 $\{\phi_n\}$ の集合とする。このとき $\hat{\theta}_n\in\mathcal{U}_2$ について $A_{\hat{\theta}_n,\theta_0}$ の定義関数の列 $\{\chi_{A_{\hat{\theta}_n,\theta_0}}\}$ は $\Phi_{1/2}$ に属する。$\mathcal{U}_2$ の推定量の中で $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_{n,\theta_0}(A_{\hat{\theta}_n,\theta_0})$ の upper bound を求めるためには $\Phi_{1/2}$ の検定関数列の中で $\lim_{n\to\infty} E_{n,\theta_0}(\phi_n)$ を最大にする検定関数列 $\{\phi_n^*\}$ をとればよい。このような $\{\phi_n^*\}$ の存在は、Neyman-Pearson の基本定理によって保証されている。$t<0$ の場合も同様にして、$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, P_{n,\theta_0}(A_{\hat{\theta}_n,\theta_0})$ の lower bound が求められる。そこで2次の asymptotic efficiency を次のようにして定義する。

定義3. 2次のAMU推定量 $\hat{\theta}_n^*$ の2次の漸近分布が2次のAMU推定量の2次の漸近分布のboundを一様にattainするとき、$\hat{\theta}_n^*$ は2次のas. efficient推定量であるという。

§3. 結果.

$\mathcal{X}=R^1$, $\Theta=(-1,1)$ と仮定し、§1で与えられた自己回帰過程 $\{X_i\}$ について考察する。$\psi(u)=\log f(u)$ とおく。

仮定(A). $f(u)>0$ $(\forall u\in\mathcal{X})$ で f は4回連続微分可能。

仮定(B). $\psi^{(4)}(u)$ は有界でかつ

$$\lim_{u\to\pm\infty} f(u)=\lim_{u\to\pm\infty} f'(u)=\lim_{u\to\pm\infty} f''(u)=0\ ;$$

$$E_f[U_i^4]<\infty.$$

定理1 ([1]). 仮定(A), (B) の下で2次のAMU推定量 $\hat{\theta}_n$ の2次の漸近分布のboundは

$$\Phi\left(\frac{t\sigma\sqrt{I}}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)+\phi\left(\frac{t\sigma\sqrt{I}}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\left\{\frac{t^2\sigma\sqrt{I}\,\theta}{\sqrt{n}\,(1-\theta^2)^{3/2}}+\frac{t^2\sqrt{1-\theta^2}\,\mu_3}{6\sigma\sqrt{I}\sqrt{n}\,(1-\theta^2)}(3J+K)\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

で与えられる。ここで $\Phi(u)=\int_{-\infty}^{u}\phi(v)dv$ で $\phi(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}$, $I=E_f[\{\psi'(U)\}^2]$, $J=E_f[\psi'(U)\psi''(U)]$, $K=E_f[\{\psi'(U)\}^3]$, $\mu_3=E_f(U^3)$ とする。

次に定理1で与えられたboundをattainする推定量を求める。θ の最小2乗推定量 $\hat{\theta}_{LS}$ は $\left(\sum_{i=2}^{n}X_iX_{i-1}\right)/\sum_{i=2}^{n}X_{i-1}^2$ で与えられる。ここで f が正規分布の密度関数であると仮定

する。このとき

$$P_{n,\theta}\left(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_{LS}-\theta)\le t\}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)+\phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\left\{\frac{\theta t^2}{\sqrt{n}(1-\theta^2)^{3/2}}+\frac{\theta}{\sqrt{n}\sqrt{1-\theta^2}}\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。この式からわかるように $\hat{\theta}_{LS}$ は2次のAMU推定量でないから、少し修正して

$$\hat{\theta}^*_{LS}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\hat{\theta}_{LS}$$

とすれば、$\hat{\theta}^*_{LS}$ は2次のAMU推定量になる。f が正規分布であるから $\sigma^2 I=1$, $\mu_3=0$ となり定理1から次の定理が成り立つ。

<u>定理2</u>([1]). f が平均0, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数ならば、$\hat{\theta}^*_{LS}$ は2次の as. efficient 推定量である。

次に Yule-Walker 推定量 $\hat{\theta}_{YW}=\left(\sum_{i=2}^{n}X_iX_{i-1}\right)/\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ について考える。この推定量とLSEとを比較してみると、LSEとは分母が異なっていて、Yule-Walker 推定量の方が X_n^2 だけ余計に加わっているから、n が十分大きいとき X_n^2 の影響が2次の asymptotic efficiency に起らないかということも興味ある問題である。ここで f が正規分布の密度関数であると仮定すれば

$$P_{n,\theta}\left(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_{YW}-\theta)\le t\}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)+\phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\left\{\frac{\theta t^2}{\sqrt{n}(1-\theta^2)^{3/2}}+\frac{2\theta}{\sqrt{n}\sqrt{1-\theta^2}}\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。この式からすぐわかるように $\hat{\theta}_{YW}$ は2次のAMU推定量でないから修正して

$$\hat{\theta}^*_{YW} = \left(1+\frac{2}{n}\right)\hat{\theta}_{YW}$$

とすれば、$\hat{\theta}^*_{YW}$ は2次のAMU推定量になる。

<u>定理3.</u> f が平均0，分散 σ^2 の正規分布の密度関数ならば、$\hat{\theta}_{YW}$ は2次の as. efficient 推定量である。

REFERENCES

[1] M.Akahira (1975). A note on the second order asymptotic efficiency of estimators in an autoregressive process. Rep. Univ. Electro-Comm. 26-1,143-149.

[2] M.Akahira (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases,I: Order of convergence of consistent estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 22, 8-26.

[3] 竹内 啓 (1974). 統計的推定の漸近理論 (教育出版).