数理解析研究所講究録
第312巻 1977年 125-136

On some conditions for weak and strong consistency of Simple Least Squares Estimators for regression parameters and strong consistency of an estimator for spectral density function.

慶應義塾大学 工学部 豊岡康行

§1. Introduction

時系列の線形の mean function の推定を含めた model は, statistical linear model $y_t = \beta' x_t + u_t$ $(t=1,2,\cdots)$ として扱われよう。この model で, $\{u_t\}$ が i.i.d. Normally の場合には, $\beta(p\times 1)$ の Simple Least Squares Estimator $\hat{\beta}_T$ (以下 SLSE と略) が strongly consistent になる為の必要十分条件は, $A_T = \sum_{t=1}^{T} x_t x_t'$ が nonsingular の下で, $A_T^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$ であることを, Anderson, T.W ([1]) は, ある martingale limit theorem を使って示した。

ここでは, $p=1$ のときには, Normality と identicality の仮定なしに $\hat{\beta}_T$ の strong consistency の必要十分条件が, $(\sum_{t=1}^{T} x_t^2)^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$ で与えられることを示す。$p>1$ の場合は, 難かしい様である。

しかし, weak consistency に関しては, $\{u_t\}$ が orthogonal でありさえすれば, $\hat{\beta}_T \to \beta$ in P as $T\to\infty$ $(p\geq 1)$ の必要十分条件は, $A_T^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$ で与えられる。

$\{u_t\}$ が weakly stationary process に従うときには，$p=1$ の Hannan, E.J. ([8]) の $\hat{\beta}_T \to \beta$ a.e. as $T\to\infty$ の十分条件の結果が，ある条件の下で，$p>1$ のときにも成立することがわかる。証明方法は Hannan の方法と同様である。

$\{u_t\}$ に次数既知の AR-model を仮定すれば，残差を使って形式的につくった，係数の Simple Least Squares Estimator が strongly consistent になる為の条件を考察する。更にこの推定量の関数として表わされる spectral density の推定量が strongly consistent であることを示す。

§2. Notations and some lemmata

model は，

$$y_t = \beta' x_t + u_t \qquad t=1,2,\cdots \tag{2.1}$$

ここで，$\beta=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p]'$，$\hat{\beta}_T$: β の SLSE，$x_t=[x_{1t},x_{2t},\cdots,x_{pt}]'$，$\{u_t;\ t=1,2,\cdots\}$ を $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上の $Eu_t=0$ $Eu_t^2=\sigma_t^2<\infty$ for all $t=1,2,\cdots$ の確率変数の列とする。

Lemma 1.

$\{u_t\}$ を independent で $Eu_t=0$, $Eu_t^2=\sigma_t^2<\infty$ の確率変数列とする。$b_t\geqq 0$ を発散列とする。このとき，もし $\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_t^2/b_t^2<\infty$ であれば，$\dfrac{\sum_{t=1}^{T}u_t}{b_T}\to 0$ a.e. as $T\to\infty$ である。

proof: (See, Breiman, L ([3]))

Lemma 2.

$\{u_t\}$ を Lemma 1 と同じ仮定の確率変数列とする。このとき、$\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_t^2<\infty$ であれば，$\sum_{t=1}^{\infty}u_t$ は a.e. で収束する。

proof: (See, Lukacs, E. ([10]))

Lemma 3.

$\{u_t\}$ を無相関で $Eu_t=0$, $Eu_t^2=\sigma_t^2<\infty$ for all $t=1,2,\cdots$ の確率変数列とする。このとき，$\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_t^2<\infty$ であれば，$\sum_{t=1}^{\infty}u_t$ は確率収束する。

proof: (省略)

Lemma 4.

$\{A_T^{-1}\}$ を positive definite matrix $(p\times p)$ の列とする。このとき $A_T^{-1}\to 0$ as $T\to\infty$ と $\gamma' A_T\gamma\to\infty$ as $T\to\infty$ for any fixed $\gamma(\neq 0)\in R^p$ と同等である。

proof: (省略)

今 $\{u_t\}$ を無相関，等分散の確率変数列とする。このとき Anderson, T.W. ([1]) に従って次の notations を使う。

$\beta\equiv\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta^{(2)}\end{bmatrix}$, $x_t\equiv\begin{bmatrix}x_{1t}\\ x_t^{(2)}\end{bmatrix}$, $\hat{\beta}_T\equiv\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{1T}\\ \hat{\beta}_T^{(2)}\end{bmatrix}$, $A_T\equiv\begin{bmatrix}a_{11T} & a_{12T}'\\ a_{21T} & A_{22T}\end{bmatrix}$ とおくと，

$\hat{\beta}_{1T}-\beta_1=Y_T/S_T$ (但し $Y_T\equiv\sum_{t=1}^{T}(x_{1t}-a_{12T}'A_{22T}^{-1}x_t^{(2)})u_t$, $S_T\equiv\sum_{t=1}^{T}(x_{1t}-a_{21T}'A_{22T}^{-1}x_t^{(2)})^2$

となる。$\gamma_1^2\equiv S_p$, $v_1\equiv Y_p/\gamma_1$ とおく。$T\geqq p$ のときは，

$Y_{T+1}-Y_T=(a_{12T}'A_{22T}^{-1}-a_{12T+1}'A_{22T+1}^{-1})\sum_{t=1}^{T}x_t^{(2)}u_t+(x_{1T+1}-a_{12T+1}'A_{22T+1}^{-1}x_{T+1}^{(2)})u_{T+1}$ と

なって，$Y_{T+1}-Y_T$ は，$Y_{p+1}, Y_{p+2},\cdots,Y_T$ と無相関になる。

$\gamma_t \equiv S_{t+p-1} - S_{t+p-2}$, $v_t \equiv \dfrac{Y_{t+p-1} - Y_{t+p-2}}{\gamma_t}$, $t=2,3\cdots$とおけば、$\{v_t\}$は、$Ev_t=0$, $Ev_t^2=\sigma^2$という無相関、等分散の確率変数になる。更に $\sum_{t=1}^{T-p+1}\gamma_t^2 = S_T = \sum_{t=1}^{T}(x_t - a_{12T}'A_{22T}^{-1}x_t^{(2)})^2 = a_{11T} - a_{12T}'A_{22T}^{-1}a_{21T}$ は A_T^{-1}の(1,1) elementの逆数である。

Lemma 5.

$$\hat{\beta}_{1T} - \beta_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T-p+1}\gamma_t v_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1}\gamma_t^2}$$ となる。(但し γ_t, $\{v_t\}$ は上で定義したもの)

§3. Conditions for strong consistency of SLSE (independent but not identical case)

$p=1$のときは、Anderson, T.W. ([1])の結果は、Normalityとidenticalityの条件をはずすことができる。

Theorem 1.

$p=1$で、$0<\sigma_t^2<M_1<\infty$の下で、$\hat{\beta}_T \to \beta$ a.e. as $T\to\infty$の必要十分条件は、$(\sum_{t=1}^{T}x_t^2)^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$である。

proof(略証):(Sufficiency) $\hat{\beta}_T - \beta = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}x_t u_t}{\sum_{t=1}^{T}x_t^2} \to 0$ a.e.の1つの十分条件はLemma.1.で、$b_T \equiv \sum_{t=1}^{T}x_t^2$とおいて、定理の前提を使えば、$\sum_{T=1}^{\infty}\dfrac{x_T^2}{(\sum_{t=1}^{T}x_t^2)^2}<\infty$となる。$\sum_{T=1}^{\infty}\dfrac{x_T^2}{(\sum_{t=1}^{T}x_t^2)^2} \leqq 1 + \sum_{T=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sum_{t=1}^{T-1}x_t^2} - \dfrac{1}{\sum_{t=1}^{T}x_t^2}\right)$ と $\sum_{t=1}^{T}x_t^2 \to \infty$ を使えば、明らか。

(Necessity) 対偶(i.e. $\sum_{t=1}^{\infty}x_t^2<\infty \Longrightarrow \dfrac{\sum_{t=1}^{T}x_t u_t}{\sum_{t=1}^{T}x_t^2} \to 0$ a.e.でないこと)を示す。Lemma 2より $\sum_{t=1}^{\infty}x_t^2<\infty$ なら、$\sum_{t=1}^{\infty}x_t u_t$ はa.e.で収束する。

$\therefore \dfrac{\sum_{t=1}^{T}x_t u_t}{\sum_{t=1}^{T}x_t^2} \to \dfrac{\sum_{t=1}^{\infty}x_t u_t}{\sum_{t=1}^{\infty}x_t^2}$ a.e. ところが $E\left(\dfrac{\sum_{t=1}^{\infty}x_t u_t}{\sum_{t=1}^{\infty}x_t^2}\right)^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{\infty}x_t^2\sigma_t^2}{(\sum_{t=1}^{\infty}x_t^2)^2} > 0$ で0と

いう定数にa.e.収束するということに反する。□

§4. Conditions for weak consistency of SLSE. (orthogonal case)

$p>1$のときには，strong consistencyについての必要十分条件は与えられなかったが，weak consistencyについては必要十分条件が得られる。$\{u_t\}$は，orthogonal，equal varianceの確率変数の列とする。

Theorem 2.

$A_p = \sum_{t=1}^{p} x_t x_t'$はnonsingularとする。このとき$\hat{\beta}_T \to \beta$ in P as $T\to\infty$の必要十分条件は，$A_T^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$で与えられる。

proof: (sufficiency) $\hat{\beta}_T - \beta \to 0$ in Pの1つの十分条件は，

$Cov(\hat{\beta}_T - \beta) = \sigma^2 (\sum_{t=1}^{T} x_t x_t')^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$である。

(necessity) $\hat{\beta}_T - \beta = (\sum_{t=1}^{T} x_t x_t')^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t u_t$の第1要素は，Lemma 5によって

$\hat{\beta}_{1T} - \beta_1 = \dfrac{\sum_{t=1}^{T-p+1} \gamma_t v_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1} \gamma_t^2}$（但し，$\{v_t\}$は$Ev_t=0$，$Ev_t^2=\sigma^2$のorthogonal確率変数）

と表現できる。必要性の対偶命題は，「$A_T^{-1} \not\to 0$なら，$\exists j$ s.t. $(\hat{\beta}_T - \beta)_j \not\to 0$ in P as $T\to\infty$」である。よって$\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t^2 < \infty$（$\Leftrightarrow A_T^{-1}$の(1,1)要素が0に収束しない。）なら，$\dfrac{\sum_{t=1}^{T-p+1} \gamma_t v_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1} \gamma_t^2} \not\to 0$ in Pを示す。

Lemma 3.より$\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t^2 < \infty$なら$\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t v_t$が確率収束している。故に

$\dfrac{\sum_{t=1}^{T-p+1} \gamma_t v_t}{\sum_{t=1}^{T-p+1} \gamma_t^2} \to \dfrac{\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t v_t}{\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t^2}$ in P as $T\to\infty$。しかし$E\left(\dfrac{\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t v_t}{\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t^2}\right)^2 = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t^2} > 0$。これは0に確率収束することに反する。

以上より，$\hat{\beta}_T \to \beta$ in P as $T\to\infty$と$A_T^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$と同等。□

Remark：この結果は，Eicker, F ([5]) のTheorem 1の拡張となっ

ていると考えられる。（Eicker, F は $\{u_t\}$ の Normality を仮定している。）

Remark：§3 の Theorem 1 で $p>1$ のときは，必要性は Theorem 2 と同様に示せるが，十分性が問題となる。もし $\hat{\beta}_T - \beta$ が Normally distributed であれば良い。（Anderson, T. W.（[1]））

次に $\{u_t\}$ を orthogonal な確率変数の列とし，分散に有界性を仮定すると，次の事がわかる。

Theorem 3

$0 < M_1 < \sigma_t^2 < M_2 < \infty$ for all $t=1,2,\cdots$ とする。A_p は nonsingular とする。このとき，$\hat{\beta}_T \to \beta$ in P as $T\to\infty$ の必要十分条件は，$A_T^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$ である。

proof：（略証）(2.1) で，$y_t/\sigma_t = \beta' x_t/\sigma_t + u_t/\sigma_t$ $t=1,2,\cdots$ とすれば，これは Theorem 2 の場合に帰着されたことになる。ところで，$B_T = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\sigma_t^2} x_t x_t'$ とすると，Lemma 4 より $B_T^{-1} \to 0$ as $T\to\infty$ と $\sum_{t=1}^{T} \gamma' \frac{x_t x_t'}{\sigma_t^2} \gamma \to \infty$ as $T\to\infty$ for any fixed $\gamma (\neq 0) \in R^p$ と同等。また $x_t x_t'$ が positive semidefinite matrix であるので $\frac{1}{M_1}\gamma' A_T \gamma \geq \gamma' B_T \gamma \geq \frac{1}{M_2}\gamma' A_T \gamma$ が成立。$\therefore$ $A_T^{-1} \to 0$ と $B_T^{-1} \to 0$ は同等。□

§5. Sufficient conditions for strong consistency of SLSE (weakly stationary process case)

Hannan, E. J.（[8]）の結果は，容易に multiparameter case に

拡張される。

$\{u_t\}$ を real valued weakly stationary process with mean zero とし，$f(\lambda)$をその spectral density function とする。又 $\{\sigma(h); h=0,\pm 1,\cdots\}$ をその covariance function の列とする。このとき SLSE $\hat{\beta}_T$ の strong consistency の十分条件は以下の Theorem で与えられる。

Theorem 4.

R.1. 任意の $i,j=1,2,\cdots,p$ と任意の $h=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ に対して，$\lim_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T-h} x_{it}x_{j\,t+h}}{\|x_i\|_T\|x_j\|_T}$ が存在するものとし，これを $\rho_{ij}(h)$ とおく。但し，$\|x_i\|_T \equiv \left(\sum_{t=1}^{T} x_{it}^2\right)^{1/2}$ とする。又 $R(h)\equiv[\rho_{ij}(h)]$ とし，$R(0)$ は nonsingular とする。

R.2. $0<\liminf_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T} x_{it}^2}{T^\alpha}\ (\leqq)\ \limsup_{T\to\infty}\frac{\sum_{t=1}^{T} x_{it}^2}{T^\alpha}<\infty$ が，$i=1,2,\cdots,p$ と $\alpha>\frac{1}{2}$ に対して成立するものとする。

R.3. $0\,(\leqq)\, f(\lambda)<C_1<\infty$ for $-\pi\leqq\lambda\leqq\pi$ とする。

以上の下で，$\hat{\beta}_T\to\beta$ a.e. as $T\to\infty$.

proof:(略証) R.1.の条件は，SLSE の asymptotic efficiency を考えたときに，出て来た regularity condition で，すでに Grenander U.([6])が使っている。$D_T\equiv \mathrm{diag}(\|x_1\|_T,\|x_2\|_T,\cdots,\|x_p\|_T)$ とすれば，$\hat{\beta}_T-\beta=\left(\sum_{t=1}^{T}x_t x_t'\right)^{-1}\sum_{t=1}^{T}x_t u_t=D_T^{-1}\left(D_T^{-1}\sum_{t=1}^{T}x_t x_t' D_T^{-1}\right)^{-1}D_T^{-1}\sum_{t=1}^{T}x_t u_t$ となって $D_T^{-1}\sum_{t=1}^{T}x_t x_t' D_T^{-1}\to R(0)$ as $T\to\infty$ と R.2.を使って，$p=1$ の場合に還元する。後は，Hannan, E.J.([8]) の方法と同様である。□

Remark: $u_t=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\lambda}c(t)\,dZ(\lambda,\omega)$ (但し $c(t)$: bounded function) と

いうような uniformly modulated process の場合でもこの Theorem の内容は成立する。すなわち，直交増分過程 $Z(\lambda,\omega)$ の modulation process であれば成立する。

§6. Strong consistency of sample spectral density function by using estimated residuals.

estimated residual から $\{u_t\}$ の spectral density function を推定したときの研究は沢山ある。(ex. Hannan, E.J. ([7]) の Chap VIII)

この節での目的は，error process $\{u_t\}$ に order known の AR-model を仮定したとき，推定残差から形式的にその係数の SLSE を作って，それが strong consistent である条件を考察し，その係数の SLSE を使った spectral density function の推定量が strong consistent であることを示す。

estimated residuals を $u_t^* = y_t - \hat{\beta}_T' x_t \quad t=1,2,\cdots,T$ とする。

Lemma 6.

1°. $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{pt})'$ の各要素の関数を t の有界関数とする。

2°. Theorem 4 の仮定を満たすものとする。

このとき，$\dfrac{\sum_{t=1}^{T} u_t^*}{T} \to 0$ a.e. as $T \to \infty$ である。

proof: $\{u_t\}$ の sample mean の SLLN を調べる。$\dfrac{\sum_{t=1}^{T} u_t}{T} \to 0$ a.e. as $T \to \infty$ の1つの十分条件は，Doob, J.L ([4]) より，

$\exists K$ s.t. $\dfrac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\rho(t-s) \leqq \dfrac{K}{T^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ である。今の model では，R.3 を使えば，$\dfrac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\rho(t-s) \leqq \dfrac{2\pi c_1}{T}$ となる。故に $\dfrac{\sum_{t=1}^{T} u_t}{T} \to 0$ a.e. は成

立している。又，1°を使えば

$\bar{u}_T^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\beta}_T' x_t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(u_t + (\beta - \hat{\beta}_T)' x_t) = o(1)$ a.e.

as $T\to\infty$ である。□

次に，sample autocovariance function based on estimated residuals を $C^*(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}(u_t^* - \bar{u}_T^*)(u_{t+h}^* - \bar{u}_T^*)$ で定義する。

Lemma 7.

1° $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{pt})'$ の各要素は t の関数として有界な関数とする。

2° $u_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ ($\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2 < \infty$, $\{\varepsilon_t\}$: i.i.d.) とする。

3° Theorem 4 の仮定を満たすものとする。

これらの条件の下で，$C^*(h) \to \sigma(h)$ a.e. as $T\to\infty$ for each $h = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ である。

proof; $C^*(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h} u_t^* u_{t+h}^* - \frac{1}{T(T-h)}\sum_{t=1}^{T-h} u_t^* \sum_{t=1}^{T} u_t^* - \frac{1}{T(T-h)}\sum_{t=1}^{T-h} u_{t+h}^* \sum_{t=1}^{T} u_t^* + \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h} \bar{u}_T^{*2}$ で，第2，3，4項は，Lemma 6 より 0 に a.e. 収束しているので，$C^*(h)$ の a.e. での asymptotic behaviour は，$C^{**}(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h} u_t^* u_{t+h}^*$ の behaviour と同じ。更に，

$C^{**}(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}\{u_t u_{t+h} + (\hat{\beta}_T - \beta)' x_t u_{t+h} + (\hat{\beta}_T - \beta)' x_{t+h} u_t + (\hat{\beta}_T - \beta)' x_t (\hat{\beta}_T - \beta)' x_{t+h}\}$

の第2，3，4項は 1° と Theorem 4 の結果から 0 に概収束する。よって $C^{**}(h)$ と $C(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h} u_t u_{t+h}$ の a.e. での asymptotic behaviours は同じ。又 2°より $\{u_t\}$ は ergodic になるので，$C(h) \to EC(h) = \sigma(h)$ a.e. as $T\to\infty$。故に $C^*(h)\to\sigma(h)$ a.e.

as $T\to\infty$ for each $h=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。□

次に $\{u_t\}$ に order K の AR-model を仮定する。 i.e.
$u_t-\sum_{j=1}^{K}a_ju_{t-j}=\xi(t)$ (但し, $\{\xi(t)\}$ は $E\xi(t)=0$, $E\xi(t)^2=\sigma^2$ の i.i.d. の innovation とする。) 又, この特性多項式の roots 全てが単位円の外部にあるものとする (stationarity)。これで $\{u_t\}$ は, Lemma 7 の 2 の形に表現できるので, ergodic である。$\{u_t^*;\ t=1,2,\cdots,T\}$ を使って, $a_1,a_2,\cdots a_K$ を推定する。criteria は, least squares principle で, $\sum_{t=K+1}^{T}\{u_t^*-\sum_{j=1}^{K}a_ju_{t-j}^*\}^2\to\min$. である。Normal equations は, $\frac{1}{T}\sum_{t=K+1}^{T}\{u_t^*-\sum_{j=1}^{K}a_ju_{t-j}^*\}u_{t-k}^*=0$, $k=1,2,\cdots,K$ である。
この matrix equation は, $\hat{C}^*\hat{a}^*=\hat{c}_0^*$ と表現される。但しここで, $\hat{C}^*\equiv[\hat{c}^*(h,h')\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=K+1}^{T}u_{t-h}^*u_{t-h'}^*,\ h,h'=1,2,\cdots,K]'$, $\hat{c}_0^*=[\hat{c}^*(0,1),\hat{c}^*(0,2),\cdots,\hat{c}^*(0,K)]'$ で, $\hat{a}^*\equiv[\hat{a}_1^*,\hat{a}_2^*,\cdots,\hat{a}_K^*]'$ は, $a=[a_1,a_2,\cdots,a_K]'$ の SLSE である。又パラメータの間には, $Ca=c_0$ (但し, $C\equiv[\sigma(i-j)\ \ i,j=1,2,\cdots,K]'$, $c_0\equiv[\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(K)]'$) の関係がある。Lemma 7 より, $\hat{c}^*(i,j)\to\sigma(i-j)$ a.e. as $T\to\infty$, $\hat{c}^*(0,j)\to\sigma(j)$ a.e. as $T\to\infty$ がわかっている。故に $\hat{C}^*\hat{a}^*=\hat{c}_0^*$ と $Ca=c_0$ との関係より, $\hat{a}^*\to a$ a.e. as $T\to\infty$。

さて, 真の spectral density は, $f(\lambda)=\dfrac{\sigma^2}{2\pi|\sum_{j=0}^{K}a_je^{i\lambda j}|^2}$ (但し, $a_0\equiv-1$) で, これを $\hat{f}(\lambda)\equiv\dfrac{\hat{\sigma}^{*2}}{2\pi|\sum_{j=0}^{K}\hat{a}_j^*e^{i\lambda j}|^2}$ で推定する。
ここで, $\sigma^2=E\xi(t)^2=E(u_t-\sum_{j=1}^{K}a_ju_{t-j})^2=\sum_{j=0}^{K}\sum_{l=0}^{K}a_ja_l\sigma(j-l)$
$\hat{\sigma}^{*2}\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(u_t^*-\sum_{j=1}^{K}\hat{a}_j^*u_{t-j}^*)^2$ である。

$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} u_t^{*2} - 2u_t^* \sum_{j=1}^{k} \hat{a}_j^* u_{t-j}^* + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} \hat{a}_j^* \hat{a}_l^* u_{t-j}^* u_{t-l}^*\right)$ で，第1項は Lemma 7 より $\sigma(0)$ に概収束し，第2項は，$-2\sum_{j=1}^{k} a_j \sigma(j)$ に概収束し，第3項は $\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} a_j a_l \sigma(j-l)$ に概収束する。よって $\hat{\sigma}^{*2}$ は $\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k} a_j a_l \sigma(j-l) = \sigma^2$ に概収束する。故に $\hat{f}(\lambda)$ は，strong consistent estimators の連続関数像であるので，$f(\lambda)$ に a.e. で収束する。(i.e. $\hat{f}(\lambda)$ は $f(\lambda)$ の strong consistent estimator である。) 定理としてまとめておく。

Theorem 5.

1° X_t の各要素の関数が t の有界な関数とする。

2° $\{u_t\}$ を order known (k) の AR process で stationarity condition は満たされているとし，innovation は i.i.d. とする。

3° Theorem 4 の仮定の条件を満たしているものとする。

以上の条件の下で，$\hat{f}(\lambda) \equiv \frac{\hat{\sigma}^{*2}}{2\pi\left|\sum_{j=0}^{k} \hat{a}_j^* e^{i\lambda j}\right|^2} \longrightarrow f(\lambda)$ a.e. as $T \to \infty$ for each $\lambda \in [-\pi, \pi]$ である。

REFERENCES.

1. ANDERSON, T. W. and J. B. TAYLOR (1976). Strong Consistency of Least Squares Estimates in Normal Linear Regression. Ann. Statist. 4 788-790

2. ANDERSON, T. W. and J. B. TAYLOR (1976). Conditions for stron consistency of least squares estimates in linear models. Tech Rep. Stanford Univ. No. 213 (The Economic Series).

3. BREIMAN, L. (1968) Probability. Addison-Wesley.

4. DOOB, J. L. (1953) Stochastic processes. John Wiley.

5. EICKER, F. (1963) Asymptotic normality and consistency of the least squares estimators for families of linear regressions. Ann. Math. Statist. 34 447-456

6. GRENANDER, U. (1954) On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. Ann. Math Statist. 25 252-272

7. HANNAN, E. J. (1970) Multiple time series. John Wiley.

8. HANNAN, E. J. (1971) Non-linear time series regression. J. Appl. Prob. 8 767-780

9. LAI, T. L. and H. ROBBINS (1977) Strong consistency of least squares estimates in regression models. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 74 2667-2669

10. LUKACS, E. (1975) Stochastic convergence. 2nd ed. Academic Press.