数理解析研究所講究録
第 313 巻 1977 年 45-58

無限個のSinkをもつ Diffeomorphismについて

東大 理　坪井 俊

§1. 序

C^∞ manifold M上のC^r diffeomorphism全体を$\mathrm{Diff}^r(M)$と書く。$f\in\mathrm{Diff}^r(M)$に対し、$\Omega(f):=\{$non wandering pts of $f\}$ $\mathrm{Per}(f):=\{$periodic pts of $f\}$。fがAxiom Aをみたすとは (a) $\Omega(f)$がhyperbolic structure をもち, (b) $\overline{\mathrm{Per}(f)}=\Omega(f)$ となる事。

<u>問題(1.1)</u>(Smale [9]) Axiom A は$\mathrm{Diff}^r(M)$でdenseか? に対し

(1.2)(Abraham, Smale [1]) A(a) is not C^1 dense in $\mathrm{Diff}^r(T^2\times S^2)$

(1.3)(Newhouse [4]) A(a) is not C^2 dense in $\mathrm{Diff}^r(S^2)$ が示された。

Axiom A については 次がある。

<u>定理(1.4)</u>(Smale) Axiom A $\Longrightarrow$ Spectral decompositionをもつ。

但し, fがspec. dec. をもつとは ① $\Omega(f)=\bigcup\Omega_i$. finite disjoint union of closed invariant sets Ω_i for f. ② $f|\Omega_i$ は topologically transitive. i.e. $\exists\, x\in\Omega_i$ $\overline{O(x)}=\Omega_i$.

$O(x)=O_f(x)=\{f^n(x)\,;\,n\in\mathbb{Z}\}$ xのf orbit とする。

<u>定理(1.5)</u>(Smale) Axiom A, no-cycle $\Longrightarrow$ Ω-stable.

(定義については[8,9]) そこで

<u>問題(1.6)</u>(Shub[8]) Spec. dec. (with no-cycle) は generic か? generic とは $\mathrm{Diff}^r(M)$ の residual subset 上で成立している事である。これに対し、Newhouse[6] は Spec. dec. は C^r $(r \geqq 2)$ で generic ではないことを示した。この論文の紹介が目的である。

まず結果を述べる。sink とは hyperbolic periodic pt q of period ν で $Tf^\nu|_q$ のすべての固有値の絶対値 < 1 のものである。

<u>定理(1.7)</u>(Newhouse[6]) $\dim \geqq 2$ の任意の manifold M に対し、$\mathrm{Diff}^r(M)$ $(r \geqq 2)$ の open subset N さらに N の residual subset $\mathcal{B}$ が存在し、$\forall f \in \mathcal{B}$ は無限個の sink をもつ。

(1.7) から Spec. dec の non-genericity がわかる。Sink p に対し, $O(p)$ は $\Omega(f)$ で孤立している invariant set であることに注意すれば. $f \in \mathcal{B}$ について①,②は成り立たない。

§2. Set valued function と Genericity Theorem. (Pugh[7])

X を位相空間, Y を距離空間とする. $F(Y) = \{Y$ の閉集合全体$\}$。 $F(Y) \ni A_1, A_2$ に対し $d(A_1, A_2) = \max\{\sup_{a_1 \in A_1} d(a_1, A_2), \sup_{a_2 \in A_2} d(A_1, a_2)\}$ と定義すると. $(F(Y), d)$ は metric space となる。

<u>定義(2.1)</u> map $\Gamma : X \longrightarrow F(Y)$ が下半連続 (l.s.c) とは $\forall x \in X$, $\forall y \in \Gamma(x)$ $\forall U$ nbd of y $\exists N$ nbd of x s.t. $x' \in N \Rightarrow \Gamma(x') \cap U \neq \phi$.

補題(2.2) If. $\Gamma_n : X \longrightarrow FY$ l.s.c. $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ for $n=1,2,3\cdots$
$\Longrightarrow \Gamma(x) := \overline{\bigcup_n \Gamma_n(x)}$ は l.s.c. ($\overline{\quad}$ は閉包。証明は[3])

補題(2.3) Y: compact. $\Gamma : X \longrightarrow F(Y)$ l.s.c
$\Rightarrow$ Γの連続点全体は X の residual subset. ([3])

注意(2.4) xがΓの連続点ならば $\forall U$ nbd of $\Gamma(x)$. に対し
$\exists N$ nbd of x s.t. $y \in N \Rightarrow \Gamma(y) \subset U$.

例 (2.5) $P_n : \mathrm{Diff}^r(M) \longrightarrow F(M)$ $P_n(f) = \{$ hyperbolic periodic pts of period $\leq n \}$ とする. local stability により P_n は l.c.s.。 補題(2.2) により $\overline{P} = \overline{\bigcup P_n}$ は l.s.c.。補題(2.3) により, $\overline{P}$の連続点全体は residual subset $\mathcal{G}^r \subset \mathrm{Diff}^r(M)$。

例 (2.6) Sink_n $\overline{\mathrm{Sink}}$ についても同様。但し. $\mathrm{Sink}_n(f) = \{$ period $\leq n$ の sink of $f \}$ $\overline{\mathrm{Sink}} = \overline{\bigcup \mathrm{Sink}_n}$. (2.5)(2.6)では M: compact.

補題(2.3). をつかうと Improved Closing Lemma から General Density Theorem が導かれる. (Pugh [7]) これを follow すると M compactの時

定理(2.7) (Improved Closing Lemma) $\mathrm{Diff}^1(M) \ni \forall f$ $\Omega(f) \ni \forall p$ を固定する時. $\forall N$ nbd of f $\exists g \in N$ gはpを hyp. per pt とする。

定理(2.8) (General Density Theorem) Axiom A(b) は $\mathrm{Diff}^1(M)$ で generic. i.e. $\exists \mathcal{G}$ residual subset $\subset \mathrm{Diff}^1(M)$ s.t $\mathcal{G} \ni \forall f$ $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$。

証明 $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1$ (2.5). に対し. $\overline{P}(f) \supset \Omega(f)$ をいう. $\Omega(f) - \overline{P}(f) \neq \phi$ $q \in \Omega(f) - \overline{P}(f)$ とする。 $\exists V$ $\overline{P}(f)$のnbd s.t. $V \not\ni q$
fは$\overline{P}$の連続点ゆえ (2.4)から

$\exists N$ nbd of f in $\mathrm{Diff}^1(M)$ s.t. $N \ni \forall g$ に対し $\overline{P(g)} \subset V$

定理(2.7)により, このNに対し $\exists g' \in N$ s.t. g' has a hyp. per pt at q. $\therefore \overline{P(g')} \not\subset V$. 矛盾である。//

Newhouse の定理(1.7)はこれと同様に示される。まず定理(1.7)のNを(1.3)の例をつかって構成する。

§3. Open set $N \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ の構成

最初にNの性質を記述する定義を述べる。

<u>定義(3.1)</u> Λ compact f-invariant set が basic とは hyperbolic, topologically transitive, $\overline{Per(f|\Lambda)} = \Lambda$, local product structure をもつ(i.e. $\exists \varepsilon$, $\forall p, p' \in \Lambda$ $W^s_\varepsilon(p) \cap W^u_\varepsilon(p') \in \Lambda$) こと. この時,

(3.2) $\exists N_1$ nbd of f in $\mathrm{Diff}^r(M)$.

$\forall g \in N_1$ $\exists_1 \Lambda_g$ basic set.

$\exists h_{gf}$ homeo : $\Lambda_f \longrightarrow \Lambda_g$ s.t.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_f & \xrightarrow{f} & \Lambda_f \\ {\scriptstyle h_{gf}}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle h_{gf}} \\ \Lambda_g & \xrightarrow{g} & \Lambda_g \end{array}$$

<u>定義(3.3)</u> Λ basic set が nontrivial とは 2つ以上の orbit を含むこと。 このときΛは無限集合。

<u>定義(3.4)</u> $W^u(x) = W^u(x,f) = \{ y \in M ; \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}x, f^{-n}y) = 0 \}$

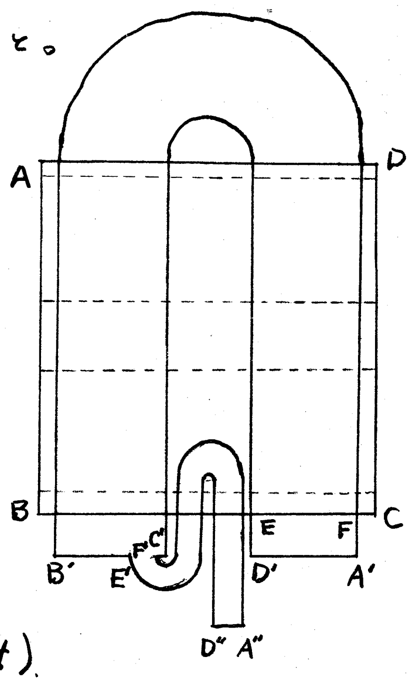
$W^s(x) = W^s(x,f) = \{ y \in M ; \lim_{n\to\infty} d(f^n x, f^n y) = 0 \}$.

$x \in \Lambda$ のときこれらは 1:1 immersed Euclidean space.

<u>定義(3.5)</u> $W^u(\Lambda_g) = \bigcup_{x\in\Lambda_g} W^u(x,g)$. $W^s(\Lambda_g) = \bigcup_{x\in\Lambda_g} W^s(x,g)$

<u>定義(3.6)</u> $W^u(x,g)[W^u(\Lambda_g)]$ と $W^s(y,g)[W^s(\Lambda_g)]$ の Point of

tangency とは $[\exists x, y \in \Lambda_g]$ $W^u(x,g)$ $W^s(y,g)$ の non transversal intersection point のこと。



(1.3) の Newhouse [4] の例は右図のようなものである。

f: ABED'A'FCD $\longrightarrow$ A'B'E'D''A''F'C'D'

$W^u(\Lambda)$, $W^s(\Lambda)$ は小さい ⌒ のあたりに pt of tangency をもつ。(1次の接触)

さらに f の nbd N があって $N \ni g$ に対し $W^u(\Lambda_g)$ $W^s(\Lambda_g)$ は pt of tangency をもつ。(Λ は $f|_{ABCD}$ の non wandering set)

pt of tangency $\in \Omega(f)$ がいえてここで Axiom A(a) がくずれる。

これを少し perturb したもの(と disc の contraction)を使って次をみたす $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ とその近傍 N が構成できる。

(3.7) (1) Λ_f nontrivial basic set がある。

(2) $\exists P \in \Lambda_f$ hyp. per. pt. $\dim W^s(P) = \dim M - 1$ $\mu(P)\cdot\lambda(P) < 1$

(3) $N \ni g$ に対し (3.2) で Λ_g が定まり $P_g = h_{gf}(P)$ に対し $\mu(P_g)\cdot\lambda(P_g) < 1$

(4) $N \ni g$ に対し、$W^u(\Lambda_g)$, $W^s(\Lambda_g)$ は pt of tangency をもつ。local に1次の接触となっている。

但し、hyp. per. pt. P, $\dim W^s(P) = \dim M - 1$ に対し、period ν の時 Tf^{ν}_{P} の固有値 $\mu_1 \cdots \mu_s$ λ, $|\mu_1| \leq \cdots \leq |\mu_s| < 1 < |\lambda|$. について $\mu(P) = |\mu_s|$ $\lambda(P) = |\lambda|$.

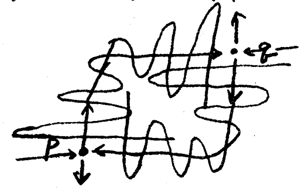
このNにて l.s.c. fun $\overline{\mathrm{Sink}}$ を考えて. §2のように $\overline{\mathrm{Sink}(g)} \supset \overline{W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g)}$ が N では generic に成立することを示す。
まず $W^s(\Lambda_g) \cap W^u(\Lambda_g)$ について考える。

§4. homoclinic point と homoclinic relation.

(4.6) が目標である。

定義(4.1) hyp. per. pts of f p, q が homoclinically related
$p \underset{h}{\sim} q \overset{\mathrm{def}}{\iff} W^u(O(p)) \pitchfork W^s(O(q)) \neq \phi \quad W^s(O(p)) \pitchfork W^u(O(q)) \neq \phi$.

これは equivalence relation. (λ-lemma).



p の equivalence class を H_p と書く.

定義(4.2) $h_p = W^u(O(p)) \pitchfork W^s(O(p)) - O(p)$: transverse homoclinic pt 全体。

補題(4.3) $\overline{h_p}$ は closed, f invariant, topologically transitive.

定理(4.4) (Newhouse[5]) H_p が 2つ以上の orbit を含むならば $\overline{h_p} = \overline{H_p}$. (証明: [5])

補題(4.5) p を f の hyp. per pt とし f の近傍 N, $N \ni g$ に対し p_g が定まる時. $N \longrightarrow F(M)$ $g \longmapsto \overline{H_{p_g}}$ は l.s.c.

証明 $g \longmapsto H^{(n)}_{p_g} = \{q \in P_n,\ q \underset{h}{\sim} p\}$ l.s.c ならば (2.2) によりいえる。hyp. per pt. の stability により. $\forall q_g \underset{h}{\sim} p_g$ に対し. $\exists N_1$ nbd of g. s.t. $g_1 \in N \Rightarrow q_{g_1} \underset{h}{\sim} p_{g_1}$ をいえばよい。
local stable (unstable) manifold を考える。$\exists\ n_1, n_2$.

$W^s_{loc}(o(g_g)) \pitchfork g^{n_1}(W^u_{loc}(o(P_g))) \neq \phi$ 　$W^u_{loc}(o(g_g)) \pitchfork g^{n_2}(W^s_{loc}(o(P_g))) \neq \phi$

が g を perturb するときかわらないことをみればよい。//

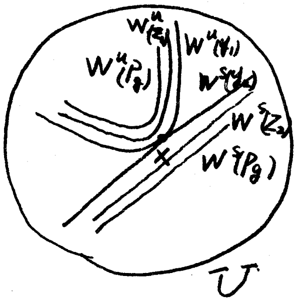
補題(4.6)　(3.7)(1), $p\in\Lambda_g$, N_1 s.t.(3.2) のとき、$B_1 = \{g \longmapsto \overline{H_{P_g}}$ の連続点$\}$ とすると　$g\in B_1 \Longrightarrow \overline{H_{P_g}} = \overline{W^s(\Lambda_g)\cap W^u(\Lambda_g)}$

証明　$\Lambda_g \ni P_g$. Λ_g topologically transitive. periodic pt dense. ゆえ Λ_g の per pt の $\widetilde{h}$ class を考えると (4.4)より $\overline{H_{P_g}} = \overline{h_{P_g}}$。

(4.4)(4.3)により $\overline{H_{P_g}} \supset \Lambda_g$。$\overline{H_{P_g}} \supset \overline{W^s(\Lambda_g)\cap W^u(\Lambda_g)}$ をいえばよい。

主張(4.7)　$W^s(\Lambda_g)\cap W^u(\Lambda_g) \ni {}^\forall x$ を固定するとき、$\forall U$ nbd of x $\forall N_2$ nbd of g in N_1 $\exists g_1 \in N_2$ s.t. $\overline{H_{P_{g_1}}} \cap U \neq \phi$

(4.7)⇒(4.6) は (2.7)⇒(2.8) と同様. $\overline{W^s(\Lambda_g)\cap W^u(\Lambda_g)} - \overline{H_{P_g}} \ni x$ とする。$x\in U$ $H_{P_g}\subset V$ $U\cap V = \phi$ をとり $U\cap(W^s(\Lambda_g)\cap W^u(\Lambda_g))\ni x_1$ をとって(4.7)を使い矛盾を導く。



(4.7)の証明　$W^s(\Lambda_g)\cap W^u(\Lambda_g)\ni x$ の近傍 U を固定する。$x\in W^u(y_1), x\in W^s(y_2)$ $y_1, y_2\in\Lambda_g$ とする。Λ_g で Per pt は dense ゆえ y_1, y_2 に十分近い per pt $z_1\ z_2$ をとる. $z_1\ z_2 \in H_{P_g}$

$W^u(P_g)$ $W^s(P_g)$ は $W^u(z_1)$ $W^s(z_2)$ にいくらでも近づくから.

U 内で $W^u(P_g)$ $W^s(P_g)$ は W^u, W^s through x に近づく。

$h_{P_g}\cap U = \phi$ のとき. g を $g^{-1}U$ にて N_2 で perturb して. $(P_{g_1} = P_g)$

$W^u(P_{g_1}, g_1) \pitchfork W^s(P_{g_1}, g_1) \neq \phi$ in U にできる。$h_{P_{g_1}}\cap U\neq\phi$

∴ $\overline{H_{P_{g_1}}}\cap U\neq\phi$. $g_1\in N_2$. //

§5. 定理(1.7)の証明

次の命題が定理(1.7)を与える。((3.3)に注意)

<u>命題(5.1)</u> (3.7) (1)(2)(3)(4) のもとで. $\mathcal{B}_1$ (4.6), $\mathcal{B}_2=\{\overline{\mathrm{Sink}}$ の連続点$\}$ $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2$ とする。$\mathcal{B}\ni g \Rightarrow \overline{W^u(\Lambda_g)\cap W^s(\Lambda_g)}\subset\overline{\mathrm{Sink}\, g}$

次を仮定する.

<u>命題(5.2)</u> P hyp. per pt of period ν of $f\in \mathrm{Diff}^r(M^{s+1})$ $\dim W^s(P)=\dim M-1=s$ $\mu(P)\cdot\lambda(P)<1$ $W^u(o(P))$, $W^s(o(P))$ は pt of tangency x をもつ.(1次の接触としてよい) このとき

$\forall U$ nbd of x $\forall N$ nbd of f $\exists g\in N$ s.t g has a sink in U.

<u>(5.1)の証明</u>

<u>主張(5.3)</u> $\forall g\in N$ $\forall q\in H_{P_g}$ を固定するとき

$\forall N_1$ nbd of g $\forall U$ nbd of q $\exists g_0\in N_1$ g_0 has a sink in U.

<u>(5.3) $\Rightarrow$ (5.1)</u> $\overline{W^u(\Lambda_g)\cap W^s(\Lambda_g)}-\overline{\mathrm{Sink}\, g}\neq\phi$ とする. $x\in \overline{W^u(\Lambda_g)\cap W^s(\Lambda_g)}-\overline{\mathrm{Sink}\, g}$ をとる。$g\in\mathcal{B}\subset\mathcal{B}_1$ $\therefore x\in \overline{H_{P_g}}$

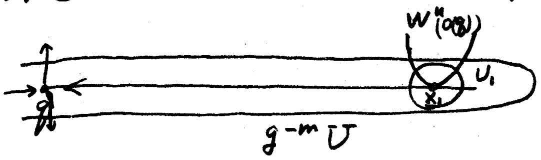
U, V. open set s.t. $x\in U$, $\overline{\mathrm{Sink}\, g}\subset V$, $U\cap V=\phi$ をとる.

$g\in\mathcal{B}_2$ ゆえ $\exists N_1\ni g$ nbd. $g\in N_1\Rightarrow\overline{\mathrm{Sink}\, g}\subset V$. $\therefore$ Sink $g\cap U=\phi$

(5.3)により $\exists g_1\in N_1$ $\overline{\mathrm{Sink}}\, g_1\cap U\neq\phi$ 矛盾。

<u>(5.3)の証明</u>. N_1の中で $O(q)$ $O(P_g)$ を動かさないように perturb する。$H_{P_g}=H_q$ (3.7)(1)により (4.7)と同様に $W^u(O(q))$ $W^s(O(q))$ は $W^u(\Lambda_g)$ $W^s(\Lambda_g)$ の pt of tangency x をとおる W^u W^s に近づく。gを $g^{-1}(x)$ の近傍で perturb して g_1 とし, g_1は pt of tangency

x_1 を x の近くにもつ。$\exists m.\ g_1^{-m}(U) \ni x_1,\ g_1^{-m}(U) \not\ni g_1^{-1}(x_1)$。



$X_1 \in U_1 \subset g_1^{m}(U)$ をとる.

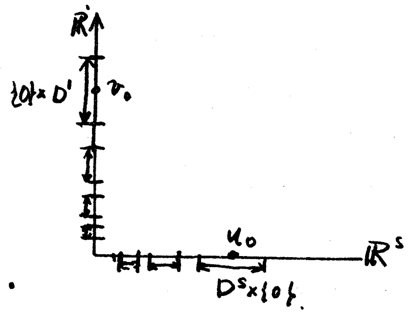
U_1 内で $W^s(o(P_g), g_1)$ $W^u(o(P_g), g_1)$ は X_1 を通る $W^s(o(g), g_1)$ $W^u(o(g), g_1)$ に近づく。$g_1^{-1}(U_1)$ で g_2 に perturb して、pt of tangency of $W^s(o(P_g))$ $W^u(o(P_g))$, x_2 near X_1 in U_1 をつくる。$g_2^{-1}(U_1) = g_1^{-1}(U_1)$ で (5.2) により ((3.7) (2), (3) (4)) 再び perturb して g_0 とすると g_0 は U_1 に sink s をもつ。$g_0^{m}(s) = g_1^{m}(s) \in U$ も sink ゆえ g_0 は U に sink をもつ。//

§6. 命題(5.2)の証明

Linearization Theorem によって p の局所座標を適当にとって、p の nbd と $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^1$ の 0 の nbd を同一視すると

$f^\nu : (u, v) \longrightarrow (Au, \lambda v)$. ($A$: linear contraction. $|\lambda| > 1$) とする。

必要なら ν を 2ν にして $\lambda > 1$ とする。適当に $n_1 < 0$ $n_2 > 0$ をとれば $f^{n_1}(x) = (0, v_0)$ $f^{n_2}(x) = (u_0, 0)$。



$\mathbb{R}^s \times \{0\} \supset D^s \times \{0\}$ u_0 中心の disc,

$\{0\} \times \mathbb{R}^1 \supset \{0\} \times D^1$ v_0 中心の disc. を

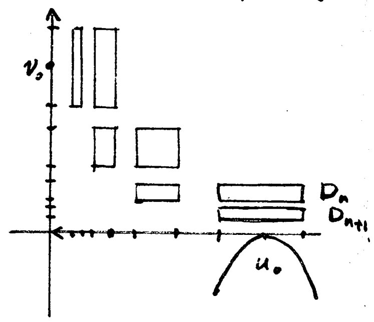
$A^n(D^s)$, $\lambda^{-n}(D^1)$ $n > 0$ が disjoint のようにとる。

$f^{n_2 - n_1}(0, v_0) = (u_0, 0)$ $(0, v_0)$ の nbd で (D^1 をとりなおして $\{0\} \times D^1$ の nbd で)

$f^{n_2 - n_1}(u, v) = g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$, $g(0, v_0) = (u_0, 0)$.

(6.1) $\quad g_{2v}(0, v_0) = 0, \quad g_{2vv}(0, v_0) < -K \quad K > 0$.

（又は $g_{2vv}(0,v_0) > K > 0$ だが上の場合にかぎる。）添え字は偏微分を表わす。



$D_n = D^s \times \lambda^{-n} D^1$ とおく。f^ν は $(A^d \times \lambda^d) D_n$ で linearize されているとしてよい。

$f_{n,t}(u,v) = (g_1(A^n u, \lambda^n v),\ g_2(A^n u, \lambda^n v) + t)$ とおく。

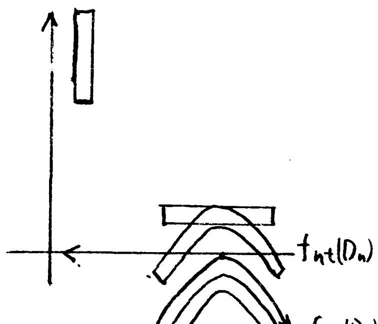
主張(6.2)　$\forall$ nbd U_1 of $(u_0, 0)$ $\exists N > 0$ $\forall n > N$ $\exists t_n$ $0 < t_n \leq K_1 \lambda^{-n+1}$ f_{n,t_n} は U_1 に fixed sink をもつ。（K_1 : const.）

(6.2) ⇒ (5.2)　$\forall U \ni x$ $\forall N \ni f$ (6.2) により n : 大のとき f_{n,t_n} は $U_1 = f^{n_2} U$ に fixed sink をもつ。n を大きくすると t_n は小さくとれるから、f を $f(x_1)$ の nbd で perturb して ($N \ni$) f_1 とし、$f_1^{n_2 - n_1 + \nu n} = f_{n,t_n}$ とできる。f_{n,t_n} の sink を s とすると $f_1^{-n_2} s \in U$ は f_1 の periodic sink. $f_1 \in N$. //

(6.2)の証明　$f_{n,t}$ の fixed pt は

$$\begin{cases} u = g_1(A^n u, \lambda^n v) \\ v = g_2(A^n u, \lambda^n v) + t \end{cases}$$

の解



上の式は v を $\lambda^{-n} v_0$ の nbd で固定すると

$D^s \longrightarrow D^s \times V \longrightarrow D^s$ は n 十分大のとき contraction 故 fixed pt がある。これを $u(v)$ と書くと

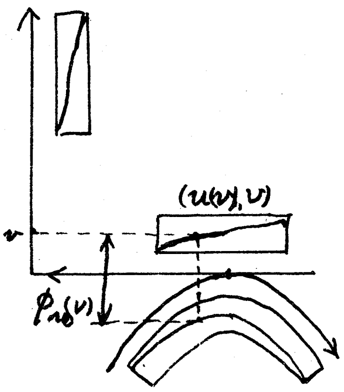
$\psi(u,v) = u - g_1(A^n u, \lambda^n v)$ について

$\frac{\partial \psi}{\partial u} = I - g_{1u}(A^n u, \lambda^n v) A^n$ は n が大のとき isomorphism 故 $u(v)$ は C^∞ map である。$u'(v)$ を計算すると、

(6.3) $u'(v) = (I - g_{1u}A^n)^{-1} g_{1v}\lambda^n$.（偏微分は $(A^n u(v), \lambda^n v)$ での値）

$f_{n,t}$ の fixed pt を $(u(v), v)$ とすると v は $\phi_{n,t}(v)=0$ をみたす.

但し $\phi_{n,t}(v) = g_2(A^n u(v), \lambda^n v) - v + t$.



n 大のとき $\phi_{n,t}$ は unique maximum をもつことを示す。

(6.4) $\phi'_{n,t}(v) = g_{2u}A^n u'(v) + g_{2v}\lambda^n - 1$

(6.5) $\mu\lambda < 1$ ゆえ $|A^n||u'(v)| \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$
ゆえ第一項 $\longrightarrow 0$. (6.3)

第二項は (6.1) により $\exists K_2 > 0$ $\exists v_1 < v_2 \in \lambda^{-n}(D')$（$n$:大のとき）
$g_{2v}(A^n u(v_1), \lambda^n v_1) > K_2$ $g_{2v}(A^n u(v_2), \lambda^n v_2) < -K_2$. $\lambda > 1$ ゆえ
n 大ならば正負の十分大きい値をとる。

$\therefore$ $\exists v_n \in \lambda^{-n}D'$ $\phi'_{n,t}(v_n) = 0$.

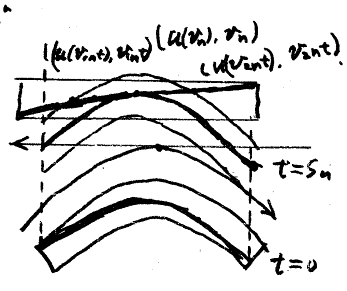
(6.6) $\phi''_{n,t}(v) < -K_3$（$K_3 > 0$ n 大のとき）が計算によりいえる。

$\therefore$ $\phi_{n,t}$ は v_n で unique max をもち. $\exists\, 0 < s_n < t_n < K_1\lambda^{-n+1}$

$\phi_{n,t}$ は s_n で1つの zero v_n をもち、 $s_n < t \le t_n$ で2つの zero
$v_{1nt} < v_{2nt}$ をもつ。（K_1 は g にのみよる const.）

このとき $(u(v_{1nt})\ v_{1nt})$, $(u(v_{2nt}), (v_{2nt}))$ は $f_{n,t}$ の fixed pt.

$(u(v_{2nt}), v_{2nt})$ が sink であることを示せば



$t \to s_n$ のとき $(u(v_{2nt}), v_{2nt}) \longrightarrow (u(v_n), v_n)$

$n \to \infty$ のとき $(u(v_n), v_n) \longrightarrow (u_0, 0)$（$f_{n s_n}$ の fixed pt ゆえ）だから (6.2) がいえる。

$f_{n,t}$ の Jacobian $=\begin{pmatrix} g_{1u}A^n & g_{1v}\lambda^n \\ g_{2u}A^n & g_{2v}\lambda^n \end{pmatrix}$, の $(u(v), v)$ での固有値を評価する。(t にはよらない)

$\begin{pmatrix} g_{1u}A^n & g_{1v}\lambda^n \\ g_{2u}A^n & g_{2v}\lambda^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(v) \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u'(v) \\ 1+\phi'_{n,t}(v) \end{pmatrix}$ に注意して $\begin{pmatrix} I & u(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で変換する。

$$\begin{pmatrix} I & -u'(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{1u}A^n & g_{1v}\lambda^n \\ g_{2u}A^n & g_{2v}\lambda^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & u(v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{1u}A^n-u'(v)g_{2u}A^n, & -u(v)\phi'_{nt}(v) \\ g_{2u}A^n, & 1+\phi'_{nt}(v) \end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ について $\forall\varepsilon$ n, 十分大にすれば V, が V_n に近いとき

$|E|, |F|, |G|<\varepsilon, |H-1|<\varepsilon$ ((6.5) など)

$\therefore \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を perturb したもの.

固有値の行列の成分に対する連続性から $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ は 0 に近い固有値を s 個, 1 に近い固有値を 1 個もつ。 $(u(v_{2nt}), v_{2nt})$ では 1 の近くの固有値 <1 を示す。

$v=v_n$ に対し $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ の固有値 1 の固有ベクトル。

$\alpha(v)\begin{pmatrix} W(v) \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W(v) \\ 1 \end{pmatrix}$ とおいて W, α を $W(v_n)=0$, $\alpha(v_n)=1$ をみたす函数として求める。 W は $\Phi(v,w)=0$ をみたす。但し

$\Phi(v,w)=(g_{1u}A^n-u'(v)g_{2u}A^n)W-u'(v)\phi'_{nt}(v)-(1+\phi'_{nt}(v)+g_{2u}A^nW)W.$

$\frac{\partial\Phi}{\partial w}(v_n,0)=g_{1u}A^n-u'(v)g_{2u}A^n-I$ は n 大のとき isomorphism

$\therefore \exists$ smooth fun $w(v)$ $W(v_n)=0$ $\Phi(v, W(v))=0$.

$\alpha(v)=1+\phi'_{n,t}(v)+g_{2u}A^nw.$

$\frac{d\alpha}{dV}(V_n) = \phi''_{nt}(V_n) + g_{2u}A^n\frac{dw}{dV}$ $\frac{dw}{dV}$を計算すると

$\frac{dw}{dV}(V_n) = (g_{1u}A^n - u'(V_n)g_{2u}A^n - I)^{-1}\phi''_{nt}(V_n)\ u'(V_n)$.

$\therefore\ g_{2u}A^n\frac{dw}{dV} \longrightarrow 0.$ (6.5) (6.6)により $\frac{d\alpha}{dV}(V_n) < 0$ (n:大)

$\therefore$ V_{2nt}がV_{2n}に近いとき $\alpha(V_{2nt}) < 1$ $\therefore$ $(u(V_{2nt})\ V_{2nt})$はSink。

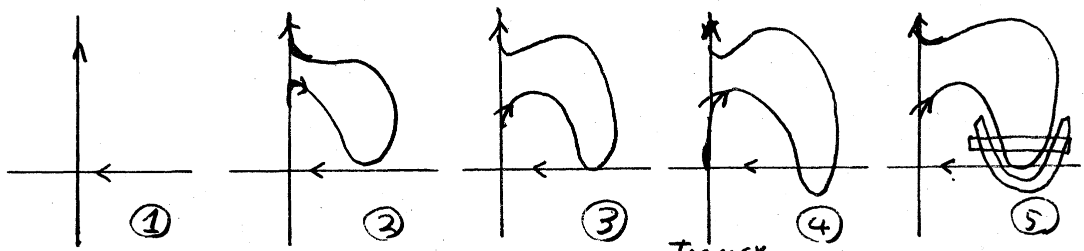
// ($(u(V_{int})\ V_{int})$ は saddle である。)

§ 7. 問題

問題(7.1) "Mの generic pt は attractorに向かう (sinkに向かう)" は$\mathrm{Diff}^r(M)$の generic property か? attractor = closed invariant set Λ, $^\exists$ compact nbd U s.t $\bigcap_{n\geq 0} f^n(U) = \Lambda$.

問題(7.2) generic diffeo は Sink 又は Source を持つか? 例えば $\mathrm{Diff}^r(S^3)$で.

問題(7.3) hyperbolic fixed pt のまわりで localに diffeo を変化させていくとき の Ω, W^s, W^uの様子を記述せよ。



①→②→③→④ を記述せよ。 ④は transv homoclinic pt があらわれる。③からの perturbation が~~命~~題(6.2)であるが、⑤で見ると sink を作ったのは③→②の過程である。Newhouseはこの問題からヒントを得たと述べている。

References.

[1] R. Abraham. S. Smale, Non-genericity of Ω-stability. Global Analysis XIV. (1970) 5-8.

[2] M. Hirsch, C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets. Global Analysis XIV (1970) 133-165.

[3] C. Kuratowski Topologie vol II. 1961.

[4] S. Newhouse. Non-density of axiom A(a) on S^2. Global Analysis XIV (1970). 191-203.

[5] S. Newhouse Hyperbolic limit sets. Trans. A. M. S 167 (1972) 125-150.

[6] S. Newhouse Diffeomorphisms. with Infinitely many sinks. Topology 12 (1974) 9-18.

[7] C. Pugh. An improved closing lemma and a general density theorem. Amer. J. Math. 89 (1967) 1010-1021.

[8] M. Shub Stability and genericity for diffeomorphisms. ~~Bull. A. M. S. 77~~ Dynamical Systems Peixoto. 1971. 493-514.

[9] S. Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. A.M.S. 73 (1967) 747-817.