数理解析研究所講究録
第 313 巻 1977 年 126-136

Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems II

名大 教養部 池上宜弘

§1. はじめに

Periodic time dependent dynamical system (以後, これを periodic system と呼ぶ) が $\tilde{\Omega}\omega$-stable である為の必要条件を[2]で示したが, 本論では, この必要条件に近い条件が十分条件にもなる事を示す. 以後, M はなめらかな compact 多様体とする.

§2. 主な定義

M 上の C^r 級 periodic system とは, 次の形の方程式である.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

但し, f は $f(x, t+1) = f(x)$ をみたす C^r 級関数である. M 上の C^r 級の periodic system 全体の集合を $\mathbb{P}^r(M \times \mathbb{R})$ で表わす. (*) は, 次の様な $M \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場(自励系) X に対応する.

$$X_{(x,t)} = (f(x,t), 1) \in T_x(M) \times T_t(\mathbb{R}) \approx T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}).$$

$M\times\mathbb{R}$ 上の vector 場として，一様 C^r 位相を入れることにより，$\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ は位相空間となる．自励系 X の flow を

$$\Phi_X:(M\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}\longrightarrow M\times\mathbb{R}$$

とする．$\pi: M\times\mathbb{R}\to M$ を自然な射影とするとき，

$$\varphi_X(x_0, t_0, \cdot)=\pi\Phi_X(x_0, t_0, \cdot)\ :\ \mathbb{R}\to M$$

が，$(x, t)=(x_0, t_0)$ を初期条件とする periodic system (*) の解である．$\Phi_X(x_0, t_0, \mathbb{R})$ 又は $\varphi_X(x_0, t_0, \mathbb{R})$ を各々，periodic system X の $M\times\mathbb{R}$ 上又は M 上の<u>軌跡</u>という．$\varphi(x_0, t_0, \cdot)$ が<u>周期解</u>であるとは，$\sigma\neq 0$ が存在して，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\varphi(x_0, t_0, t+\sigma)=\varphi(x_0, t_0, t)$ が成立することである．

$\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$ を，$M\times S^1$ 上の自励系全体に C^r 位相を入れた空間とする．$X\in\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ に対して，$\bar{X}\in\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$ が次の様に対応する．但し，$S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である．$\rho: M\times\mathbb{R}\to M\times S^1$ を $\rho(x, t)=(x, [t])$ により定義するとき，

$$\bar{X}_{(x,[t])}=(f(x,t),\ 1)\ \in T_x(M)\times T_{[t]}(S^1)=T_{\rho(x,t)}(M\times S^1).$$

X は周期 1 を持つから，$\bar{X}$ は矛盾なく定義される．

$$\mathfrak{X}^r_1(M\times S^1)=\{\bar{X}\in\mathfrak{X}^r(M\times S^1)\mid \bar{X}_{(x,s)}\text{ の }T_s(S^1)\text{ 成分}=1\}$$

を $\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$ の部分空間とする．$\rho_*(X)=\bar{X}$ として，写像 $\rho_*:\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})\longrightarrow\mathfrak{X}^r_1(M\times S^1)$ が得られる．ρ_* は同相写像である．$\Phi_{\bar{X}}$ を $\bar{X}$ の流れとし，自然な射影 $M\times S^1\longrightarrow M$ をやはり π で表わすとき，

$$\pi\Phi_X(x,s,t)=\varphi(x,s,t)=\pi\Phi_X(x,[s],t)$$

が成立する．$P_X(x)=\varphi_X(x,0,1)$で定義されるC^r級微分同相写像 $P_X: M\to M$をXの<u>Poincaré map</u> という．

<u>定義</u>1．次の条件をみたす点$x\in M$をX又は周期系(*)の<u>wandering point</u> という．任意の$t_0\in\mathbb{R}$に対して，xの開近傍$U\subset M$と自然数nが存在して，$|t|>n$なる任意の$t\in\mathbb{R}$に対して，

$$\varphi_X(U,t_0,t)\cap U=\phi$$

が成立する．wandering point でない点$x\in M$を<u>non-wandering point</u> という．non-wandering point全体の集合を<u>non-wandering set</u> といい，$\omega(X)$であらわす．

次の条件をみたす$(x,t)\in M\times\mathbb{R}$全体の集合を$\tilde{\Omega}(X)$とする；$(x,t)$の任意の開近傍$U\subset M\times\mathbb{R}$と任意の自然数$n$に対して，$|m|>n$なる整数$m$が存在して，$U_m\cap\Phi_X(U_0,m)\neq\phi$となる．但し，$U_m=\{(y,s+m)\mid(y,s)\in U\}$とする．一方，$M\times S^1$上の自励系$\bar{X}$の non-wandering set を$\Omega(\bar{X})$で表す．

<u>命題</u>1．$\rho_*(X)=\bar{X}$とするとき，次が成立する．

(i) $\tilde{\Omega}(X)=\rho^{-1}(\Omega(\bar{X}))$．従って$\tilde{\Omega}(X)$は$X$の不変集合である．

(ii) $\omega(X)=\pi(\tilde{\Omega}(X))=\pi(\Omega(\bar{X}))$．（以後$\omega(\bar{X})=\pi(\Omega(\bar{X}))$とする．）

(iii) $\omega(X)\subset M$と$\tilde{\Omega}(X)\subset M\times\mathbb{R}$は閉集合である．

<u>定義</u>2．$X,\ Y\in P^r(M\times\mathbb{R})$が<u>$\tilde{\Omega}\omega$-equivalent</u>であるとは，

同相写像$h:\tilde{\Omega}(X)\to\tilde{\Omega}(Y)$と$h_0:\omega(X)\to\omega(Y)$が存在して，次の条件をみたすことである．

(i) hは$X|\tilde{\Omega}(X)$と$Y|\tilde{\Omega}(Y)$のtopological equivalence．

(ii) $h_0\circ\pi=\pi\circ h$．

(iii) hは時間に対して，周期1を持つ．即ち，$\pi_R: M\times R\to R$を自然な射影とするとき，

$$h(x,t+1)=(\pi h(x,t),\ \pi_R h(x,t)+1)\in M\times R.$$

<u>命題</u>2．X, Yが$\tilde{\Omega}\omega$-equivalentならば，$(x,t_0)\in\tilde{\Omega}(X)$に対し，$\omega(X)$に含まれる軌跡$\varphi_X(x,t_0,R)$の$h_0$による像は$\omega(Y)$の1つの軌跡$\varphi_Y(y,s_0,R)$となる．

<u>定義</u>3．$\bar{X},\bar{Y}\in\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$が<u>$\Omega\omega$-equivalent</u>であるとは，同相写像$h:\Omega(\bar{X})\longrightarrow\Omega(\bar{Y})$と$h_0:\omega(\bar{X})\to\omega(\bar{Y})$が存在して，次の条件をみたすことである．

(i) 次の条件を持つisotopy $H_s:\Omega(\bar{X})\to\Omega(\bar{Y})$，$s\in I$が存在する．但し，$M_0=M\times[0]\subset M\times S^1$とする．

(a) $H_0=h$，$H_1(\Omega(\bar{X})\cap M_0)=\Omega(\bar{Y})\cap M_0$．即ち，$H_1$は，cross-section M_0をM_0にうつす．

(b) 任意の$s\in I$に対して，H_sは$\bar{X}|\Omega(\bar{X})$と$\bar{Y}|\Omega(\bar{Y})$のtopological equivalenceである．

(ii) $\pi\circ h=h_0\circ\pi$

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\bar{X}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega(\bar{Y}) \arrow[d, "\pi"] \\
\omega(\bar{X}) \arrow[r, "h_0"] & \omega(\bar{Y})
\end{tikzcd}$$

<u>命題</u> 3. X と Y が $\tilde{\Omega}w$-equivalent. $\Longleftrightarrow$ $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ が Ωw-equivalent.

<u>定義</u> 4. $X \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ が <u>$C^r\tilde{\Omega}w$-stable</u> であるとは，X の近傍 $N \subset \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ が存在して，任意の $Y \in N$ は X と $\tilde{\Omega}w$-equivalent であることである．同様に，$\bar{X} \in \mathfrak{X}_1^r(M \times S^1)$ に対して，<u>$C^r\Omega w$-stable</u> であることが定義される．又，$\bar{X}$ が <u>$C^r\Omega$-stable</u> というのは，良く知られている意味で使う．

<u>命題</u> 4. $X \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ が $\tilde{\Omega}w$-stable. $\Longleftrightarrow$ $\bar{X} \in \mathfrak{X}_1^r(M \times S^1)$ が，Ωw-stable.

§3. $\tilde{\Omega}w$-stability の必要条件.

本論の目的は，X が $\tilde{\Omega}w$-stable である為の条件を示すことであるが，これに関連して，transversal condition ともいうべき $\Omega(\bar{X})$ に関する次の条件を掲げておく．

G(1)　$\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の軌道 γ に対して，$\pi|\gamma : \gamma \to M$ は正則写像である．

G(2)　$\dim M \geqq 3$ のとき，次の $G'(2)$ がみたされ，$\dim M = 2$ のとき，次の $G''(2)$ がみたされる．

$G'(2)$　実数 $K > 0$ が存在して，$\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる2点 (x, s), (y, t) に対して，

$$d(x, y) > K \cdot d'(s, t).$$

$G''(2)$　実数 $K>0$ が存在して，$\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の相異なる3点 (x,s), (y,t), (z,u) に対して，次の少くとも1つの式が成立する．

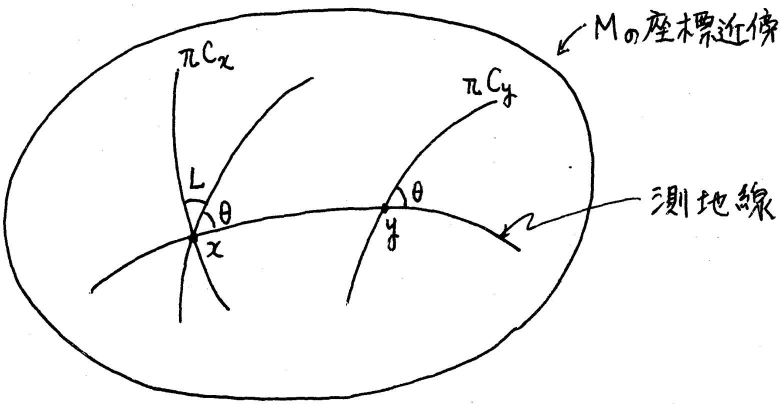
$$d(x,y) > K\cdot d'(s,t)$$
$$d(y,z) > K\cdot d'(t,u)$$
$$d(z,x) > K\cdot d'(u,s).$$

但し，d と d' は各々 M と S^1 上の距離とする．

$G(3)$　$\dim M = 2$ のとき，$\varepsilon>0$ と $\theta>0$ が存在して，$\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる2点 (x,s), (y,t) に対して，

$$d(x,y) < \varepsilon\cdot d'(s,t) \implies \angle((x,s),(y,t)) > \theta\cdot d'(s,t)$$

が成立する．但し，$\angle$ は次のように与えられるものである．(x,s), (y,t) を通る軌跡に含まれていて，(x,s), (y,t) を含む線分を各々，C_x, C_y とするとき，M 上の曲線，πC_x, πC_y の x, y に於ける角度が $\angle((x,s),(y,t))$ である．ここに，M の Riemannian metric は任意に固定されているものとする．



$d'(s,t)<1$, 従って $d(x,y)<\varepsilon$ より, $\angle$ の定義は意味を持つ.

$G'(3)$ $\varepsilon>0$ と $\theta>0$ が存在して, $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる2点 (x,s), (y,t) に対して

$$d(x,y)<\varepsilon$$
$$\Longrightarrow \quad \angle((x,s),(y,t)) > \theta$$

が成立する.

<u>命題</u> 5.

$G'(2) \Longrightarrow$ $\pi:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$ の2重点は存在しない.

$G''(2) \Longrightarrow$ $\pi:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$ の3重点は存在しない.

$G(3) \Longrightarrow$ $\pi:\Omega(\bar{X})\longrightarrow M$ の2重点に於て, 軌跡の π による像は横断的に交わる.

$G'(3) \Longrightarrow$ $G(3)$.

<u>定理</u> 1. $X\in\mathcal{P}^1(M\times\mathbb{R})$ が $C^1\tilde{\Omega}\omega$-stable (即ち, $\bar{X}$ が $C^1\Omega$ ω-stable) ならば, 次の (i), (ii) が成立する.

(i) $\bar{X}$ は $C^1\Omega$-stable である.

(ii) $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$ が満たされる.

この定理は, $G(3)$ の代りに, 「軌跡の π による像は, 横断的である.」という, 少し弱い形で[2]に示されている. これは, $\tilde{\Omega}\omega$-stable になる為の必要条件であるが, 次の節で十分条件を示す.

§4. $\tilde{\Omega}$w-stabilityの十分条件

定義4. M^m, N^n を各々，m次元，n次元の微分可能多様体とする．M^mの部分集合Λに対して，写像$f: \Lambda \longrightarrow N^n$が，点$x \in M^m$に於て微分可能であるとは，線型写像$\lambda_x : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$が存在して，$x$と$f(x)$の局所座標を$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$と考えて，

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - \lambda_x(h) \|}{\| h \|} = 0 \qquad (h \in \mathbb{R}^m)$$

が成立することである．導関数$x \longmapsto \lambda_x$が連続であるとき，fはC^1-級であるという．

以後，Λはcompactとする．fがC^1-級ならば，fはΛの近傍上のC^1級写像に拡張できる．

命題6. $C^1(\Lambda, N)$ をC^1-写像$f: \Lambda \to N$全体の集合にC^1-位相を入れた空間とすると，$C^1(\Lambda, N)$はBanach空間となる．

定義5. fをM上のC^2級微分同相写像とし，Λをfの閉不変集合とする．ΛがC^1級双曲型集合であるとは，C^1級の双曲型直和分解

$$T_\Lambda(M) = E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$$

で，fに対して不変なものが存在することである．

命題7. (Hirsch-Pugh [1]) $\dim M = 2$とするとき，$f \in \mathcal{D}^2(M)$の双曲型集合Λが，C^2級部分多様体ならば，ΛはC^1級双曲型集合である．

ここに，$\mathcal{D}^2(M)$ は，M上の C^2 級微分同相写像全体の集合に C^2 位相を入れたものである．

<u>命題</u>8. $f \in \mathcal{D}^2(M)$ とし，Λ を f の C^1 級双曲型集合とする．このとき，恒等写像の任意の近傍 $N_1 \subset C^1(\Lambda, M)$ に対して，次のような f の近傍 $N_2 \subset \mathcal{D}^2(M)$ が存在する．

$$\forall g \in N_2,\quad \exists h \in N_1,\quad g \circ h = h \circ f.$$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\Omega"] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\
h(\Lambda) \arrow[r, "g"'] & h(\Lambda)
\end{tikzcd}$$

<u>命題</u>9. $h \in C^1(\Lambda, M)$ が十分に恒等写像に近ければ，h はいくらでも 1 に近い *Lipschitz constant* を持つことができる．

<u>定義</u>6. M上の C^2 級微分同相写像 f が次の条件を満たすとき，f は <u>*Axiom* C^1A</u> を満たすという．

(a) $\Omega(f)$ は C^1 級双曲型集合である．

(b) $\Omega(f)$ の中に f の周期点は稠密に存在する．

次の定理は主定理である．

<u>定理</u>2. $X \in \mathcal{P}^2(M \times \mathbb{R})$ が次の条件をみたすとする．

(i) X の *Poincaré map* $P_X : M \to M$ は *Axiom* C^1A と *no-cycle property* を持つ．

(ii) $\Omega(\bar{X})$ は $G(1)$, $G(2)$, $G'(3)$ の条件をみたす.

すると，X は $C^2\,\tilde{\Omega}w$-stable である.

<u>問題</u> $G'(3)$ の代りに $G(3)$ の仮定のもとで，定理2は成立しないか?

定理2を使うことにより，$\Omega(\bar{X})$ の中に周期軌道以外の軌道を含む様な周期系 X で $\tilde{\Omega}w$-stable であるものを作ることができる.

$\Omega(\bar{X})$ が周期軌道のみから成る場合は，次の様な X が $\tilde{\Omega}w$-stable になるための必要十分条件が求まる.

<u>定理</u>3. $X \in \mathcal{P}^1(M \times \mathbb{R})$ とし，$\tilde{\Omega}(X)$ が有限個の軌道しか含まない場合，X が以下の全ての条件をみたすことが，X が $\tilde{\Omega}w$-stable である為の必要十分条件となる.

(i) Poincaré map p_X の周期点は双曲型で，p_X は no-cycle property をみたす.

(ii) $\gamma \subset \Omega(\bar{X})$ に対して，$\pi|\gamma$ は正則写像.（γ は軌道とする.）

(iii) $\dim M \geqq 3$ のとき，$\pi|\Omega(\bar{X})$ は2重点を持たない.

$\dim M = 2$ のとき，$\pi|\Omega(\bar{X})$ は3重点を持たない.

(iv) $\dim M = 2$ のとき，$\pi|\Omega(\bar{X})$ の交わりは全て横断的である.

文　献

[1] M. W. Hirsch－C. C. Pugh, Stable manifolds for hyperbolic sets, Bull. A. M. S., (1969), 149－152.

[2] 池上宜弘, Stability of periodic time dependent dynamical systems, 京都大学数理解析研究所講究録284, 1976年10月, 64－78.