数理解析研究所講究録
第314巻 1977年 36-48

Generalized Induced Transformation とその応用

立教大理学部　伊藤雄二

§0 序論. σ-finiteな測度空間$(X, \mathcal{B}, m)$上のrecurrentな変換Tから、Xのsubset A上に、first return timeに依って定義されるinduced transformation T_Aは、1940年代にS. Kakutani [3]に依って導入されて以来、エルゴード理論の研究に基本的な役割を果たして来たが、Tに不変測度が存在すると、T_Aも必ず不変測度を持つので、不変測度を持たない変換のクラスを不変測度を持つ変換のクラスと関係づける手段としては用いられる事が出来なかった。そこで[2]で、Hajian-Ito-Kakutaniは、在来のinduced transformationを特別の場合として含む様な、変換のpairに依る(generalized) induced transformationのideaを導入し、不変測度を持たぬergodicな変換のあるクラス(所謂$\mathcal{E}_{\text{III}_\lambda}$-型$(0<\lambda\leq 1)$の変換)は、dissipativeな変換Sと、σ-finiteな不変測度を持つergodicな変換Tのpairから、Sの

section A 上に、(generalized の意味で) induce される事を示した。此の講演では、pair に依る induced transformation の定義と、$\mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}$-型 $(0<\lambda\leq 1)$ の変換が与えられた時、その変換を induce する様な pair (T, S) の構成法を紹介し、更に、其処で用いられる section の概念が A. Connes [1] や W. Krieger [4] に依って得られた幾つかの結果を、直観的に解り易い(エルゴード理論の立場から見て)形に捉えるのに有効な役割を果たす事を示す。

§1 定義と準備. $(X, \mathcal{B}, m)$ を σ-finite な Lebesgue 空間とし、$\mathcal{G}(X)$ で X 上に定義された bi-measurable, non-singular な変換の全体の成す群を表わす。$T\in\mathcal{G}(X)$ と $x\in X$ に対して、$\mathrm{Orb}_T(x)=\{T^n(x)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ と定義し、$[T]=\{V\in\mathcal{G}(X)\mid \mathrm{Orb}_V(x)\subset \mathrm{Orb}_T(x), \forall x\in X\}$ とすると、$[T]$ は $\mathcal{G}(X)$ の部分群であって、T の full group と呼ばれる。$S\in\mathcal{G}(X)$ に対して、X の部分集合 A が、S-section であるとは、すべての $x\in X$ に対して、$\mathrm{Orb}_S(x)\cap A$ が一点のみから成る様な集合である事を云う。$\mathcal{G}(X)$ の部分集合 $\mathcal{J}$ が ergodic であるとは、可測集合 A に対して、$T(A)=A$ がすべての $T\in\mathcal{J}$ に対して成立するならば、$m(A)=0$ か $m(X-A)=0$ が成り立つ事と定義し、$T\in\mathcal{G}(X)$ が ergodic とは $\{T\}$ が ergodic になる事を云

う。変換 $S\in\mathcal{G}(X)$ が dissipative であるとは、可測集合 A が存在して、$X=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}S^n(A)$ (disj.) となる事を云い、この様な集合 A を S-wandering set と呼ぶ。$P\in\mathcal{G}(X)$ が periodic であるとは、各点 $x\in X$ に対して、$n(x)\in\mathbb{N}$ が存在して、$P^{n(x)}(x)=x$ が成り立つ事を云う。以下、$\mathcal{G}(X)$ の sub-class を次の様に表わす。

$$\mathcal{S}(X)=\{T\in\mathcal{G}(X)\mid \text{可測な } T\text{-section が存在する}\}$$

$$\mathcal{P}(X)=\{T\in\mathcal{G}(X)\mid T\text{ は periodic}\}$$

$$\mathcal{D}(X)=\{T\in\mathcal{G}(X)\mid T\text{ は dissipative}\}$$

$$\mathcal{E}(X)=\{T\in\mathcal{G}(X)\mid T\text{ は ergodic}\}$$

$\mathcal{E}(X)\cap\mathcal{S}(X)=\phi$, $\mathcal{S}(X)\supset\mathcal{D}(X)\cup\mathcal{P}(X)$ であり、又、任意の $S\in\mathcal{S}(X)$ に対して、X の分割 $X=X_1\cup X_2$ が存在して、$S(X_1)=X_1$、$S(X_2)=X_2$、且、$S|_{X_1}\in\mathcal{D}(X_1)$、$S|_{X_2}\in\mathcal{P}(X_2)$ となる事が容易に示される。 $\mathcal{E}(X)$ は更に三つの sub-class に区分される。即ち $\mathcal{E}_{\mathrm{II}_1}(X)=\{T\in\mathcal{E}(X)\mid m$ と同値で有限な測度 μ で T に関して不変なものが存在する$\}$、$\mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)=\{T\in\mathcal{E}(X)\mid m$ と同値で σ-finite, infinite な測度 μ で T-不変なものが存在する$\}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{III}}(X)=\{T\in\mathcal{E}(X)\mid m$ と同値な σ-finite な測度で T-不変なものは存在しない$\}$ と定義すれば、$\mathcal{E}(X)=\mathcal{E}_{\mathrm{II}_1}(X)\cup\mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)\cup\mathcal{E}_{\mathrm{III}}(X)$ (disj.) である。

変換 $T\in\mathcal{G}(X)$ と、m に同値な測度 μ に対して、μT で

$(\mu T)(A)=\mu(TA)$, $\forall A\in\mathcal{B}$ で定義される測度を表わし、同値な測度 μ と ν に対して、$\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ で、ν の μ に関する Radon-Nikodym derivative を表わす。変換 $T\in\mathcal{G}(X)$, m と同値な測度 μ, 正数 α に対して、$A_\alpha=\{x\in X \mid \frac{d\mu T}{d\mu}(x)=\alpha\}$, 更に、$\Lambda=\{\alpha\in\mathbb{R}^+ \mid \mu(A_\alpha)>0\}$ と定義した時、$X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ (disj.) となり、又、$\{V\in[T] \mid \mu V=\mu\}$ が ergodic になるならば、T は測度 μ を contain すると云う。T が μ を contain する時 Λ から generate される $\mathbb{R}^+$ の multiplicative subgroup を $\Delta(\mu)$ で表わすと、$\Delta(\mu)=\{1\}$ か、ある λ $(0<\lambda<1)$ に対して $=\{\lambda^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ か、或いは、$\mathbb{R}^+$ の countable dense subgroup になるかのいずれかである。$\Delta(\mu)=\{1\} \Longleftrightarrow T\in\mathcal{E}_{\mathrm{II}_1}(X)\cup\mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)$ であり、$\Delta(\mu)=\{\lambda^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ であれば、T が contain する任意の測度 ν に対して、$\Delta(\nu)=\{\lambda^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ が成り立つ。この時変換 T は sub-class $\mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(X)$ に属すると云う。又、$\Delta(\mu)$ が $\mathbb{R}^+$ の dense subgroup であれば、T が contain する任意の測度 ν に対して、$\Delta(\nu)$ も dense subgroup である。この時 T は sub-class $\mathcal{E}_{\mathrm{III}_1}(X)$ に属すると云う。contain する測度を持たない様な $\mathcal{E}_{\mathrm{III}}(X)$ の変換の全体を $\mathcal{E}_{\mathrm{III}_0}(X)$ で表わすと、$\mathcal{E}_{\mathrm{III}}(X)=\bigcup_{0\le\lambda\le1}\mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(X)$ (disj.) となる。Class $\mathcal{E}(X)$ の以上の分類は、group measure space construction を通して、W*-代数の factor の II_1, II_∞, III_λ $(0\le\lambda\le1)$ 型への分類に対応する。

§2 pair に依る induced transformation。 この節以降、可測集合のみを考察するので、一々断らない。$S \in \mathcal{S}(X)$ に対して、A が S-section であるとすると、full group $[S]$ の任意の元 S' に対して、$S'(A)$ は、S-section であり、又、逆に、任意の S-section B に対して、$[S]$ の元 S' が存在して、$B = S'(A)$ となる。しかも、$S'' \in [S]$ に対しても、$S''(A) = B$ であるとすれば、$S'(x) = S''(x)$, $\forall x \in A$ が成り立つ。今、$T \in \mathcal{G}(X)$, $S \in \mathcal{S}(X)$, S-section A に対して、$T^{-1}(A)$ が S-section であるとすると、$S'(A) = T^{-1}(A)$ となる $[S]$ の元 S' を用いて、測度空間 $(A, \mathcal{B} \cap A, m_A)$ 上に変換 R を

$$(*) \qquad R(x) = TS'(x) \quad , \quad x \in A$$

と定義すると、$R \in \mathcal{G}(A)$ である事が確められる。(*)に依って定義された変換を、pair (T, S) に依って、S-section A 上に induce された変換と呼ぶ。

$T \in \mathcal{E}(X)$, A を $m(A) > 0$ な subset とする時、$n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n = \{ x \in A \mid T^n(x) \in A,\ T^j(x) \notin A \quad 1 \leq j < n \}$ と定義すると

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(A_n) \quad (\text{disj.})$$

となるが、今

$$P(x) = \begin{cases} T(x), & x \in T^j(A_n) \quad 0 \leq j \leq n-2,\ n \geq 2 \text{ の時} \\ T^{-(n-1)}(x), & x \in T^{n-1}(A_n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ の時} \end{cases}$$

と定義すると、$P \in \mathcal{P}(X)$ であって、A は P-section, $T^{-1}(A)$ も又 P-section となるから、pair (T, P) に依って P-section

A上に変換Rが、induceされるが、このRは、first return time に依って、TからA上にinducedされた変換 T_A に他ならない。

次に $\mathcal{G}(X)$ の変換 S が、class $\mathcal{S}(X)$ に属する場合を考える。この時、一つの S-section A を固定すると、$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(A)$ (disj.) と表わされるから、δ_1 で空間 $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$ 上に $\delta_1(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ で定義された測度を表わせば、測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ は、直積空間 $(A \otimes \mathbb{Z}, \mathcal{B}_A \otimes 2^{\mathbb{Z}}, m_A \otimes \delta_1)$ と同一視出来、変換 S は、A上の恒等写像と $\mathbb{Z}$ 上の shift $n \to n+1$ の直積、即ち $(a, n) \to (a, n+1)$, $\forall (a,n) \in A \otimes \mathbb{Z}$、と考えて差支えない。変換 $T \in \mathcal{G}(X)$ が、上の S-section A に対して、$T^{-1}(A)$ を又 S-section にすると云う条件は、例えば、$T[S] = [S]T$, 即ち T が sub-group $[S]$ の normalizer であれば、満たされる。$T[S]=[S]T$ と云う条件は、又、「Tがすべての $x \in X$ に対して、$Orb_S(x)$ を $Orb_S(Tx)$ の上に写す」と云う条件と同値である。この時、任意の S-section B に対して、$T^k(B)$ が S-section となる事が容易に示される。上の条件を満たす T に対して、pair (T, S) が A上に induce する変換を R とすれば、T と R の関係は、直積空間 $A \otimes \mathbb{Z}$ 上で次の様に表わされる事が解る。$(a, n) \in A \otimes \mathbb{Z}$ に対して、$T(a, n) = (R(a), \theta(a, n))$。此処で $\theta(a, n)$ は $A \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ の可測変換であって、も

しTとSが可換であれば、ある $A \to \mathbb{Z}$ の可測変換 θ_0 が存在して、$\theta(a,n) = \theta_0(a) + n$, $\forall(a,n) \in A \otimes \mathbb{Z}$ となる。

さて、$S \in \mathcal{D}(X)$, A を S-section とした時、$\mathcal{G}(A)$ に属する任意の R に対して、pair (T, S) が R を induce する様な、$T \in \mathcal{G}(X)$ は沢山存在する。即ち、$X = A \otimes \mathbb{Z}$ とし、$S(a,n) = (a, n+1)$ と考え、与えられた $R \in \mathcal{G}(A)$ に対して $\tilde{R} \in \mathcal{G}(X)$ を $\tilde{R}(a,n) = (R(a), n)$, $\forall(a,n) \in A \otimes \mathbb{Z}$ と定義して、$\mathcal{T}_R = \tilde{R}[S] = \{\tilde{R}S' \mid S' \in [S]\}$ とすれば、$\mathcal{T}_R$ に属する任意の T は $[S]$ の normalizer であり pair (T, S) は A 上に R を induce する。又逆に、上に述べた R と T の関係式から、pair (T, S) が A 上に R を induce する様な T はすべて、$\mathcal{T}_R$ の元である事も容易に解る。R の性質と Class $\mathcal{T}_R$ の性質は、次の様に結びついている。

<u>Proposition</u>. i) R が ergodic になる為の必要充分條件は、$\mathcal{T}_R$ が ergodic な事である。

ii) R に m_A と同値な σ-finite 不変測度が存在する為の必要充分條件は、$m_A \otimes \delta_1$ に同値な σ-finite な測度で、$\mathcal{T}_R$ の各元に対して不変なものが存在する事である。

証明は [2] 参照。

上の ii) の條件は、「$m_A \otimes \delta_1$ に同値な σ-finite な測度で、S と $\tilde{R}$ に共通な不変測度が存在する」と云う條件とも同値であ

る。変換Sの任意の不変測度は、A上のあるσ-finiteな測度とδ_1の直積の形をしている事が容易に解るから$\mathcal{E}_{\mathrm{II}}(X)$に属する変換$T$で、$[S]$のnormalizerであり、且、$T$の不変測度が、その様な形をしていない物が、存在すれば、pair (T, S)はA上に$\mathcal{E}_{\mathrm{III}}(A)$に属する変換$R$をinduceする事になる。pairに依るinduced transformationの方法で$\mathcal{E}_{\mathrm{II}}$に属する変換と$\mathcal{E}_{\mathrm{III}}$に属する変換が結びつけられるかと云う問題は、$\mathcal{E}_{\mathrm{III}}(A)$に属する変換$R$に対応するclass $\mathcal{J}_R$の中に$\mathcal{E}_{\mathrm{II}}(X)$に属する変換が入っているかと云う問題に置き換えられる。これに関して次の結果が成り立つ。

<u>Theorem.</u> $S \in \mathcal{D}(X)$, AをS-sectionとすると、$0<\lambda\leq 1$の時、任意の$R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(A)$に対応するclass $\mathcal{J}_R$は、$\mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)$に属する変換$T$を含む。逆に、$R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}}(A)$に対して、$\mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X) \neq \phi$であれば、$R$は$m$に同値な測度$\mu$をcontainし、従って、ある$\lambda$ $(0<\lambda\leq 1)$に対して、$R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(A)$となる。

証明の概略　まず$\mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X) \neq \phi$であれば、$R$はある測度$\mu$をcontainする事を示そう。$T \in \mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)$, νを$m_A \otimes \delta_1$と同値なX上のT-不変測度とする。$\nu(A)>0$であるから、Tからfirst return timeに依ってA上にinduceされる変換T_Aは測度$\nu|_A$を不変にするergodicな変換であり、TとRの関係から、$T_A \in [R]$となる事も明らかである。従っ

て、mと同値な測度$\nu|_A$に対して、$\{V\in[R]\mid \nu|_A V=\nu|_A\}$はergodicになる。Rが$\nu|_A$をcontainするかどうかは解らないが、Kriegerの結果[5]を使えば、この様な測度$\nu|_A$が存在すれば、Rは他の測度μをcontainし、従って、$R\in\mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(A)$ $(0<\lambda\leq 1)$となる事が示される。

次に、$R\in\mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(A)$ $(0<\lambda\leq 1)$の時、$\mathcal{J}_R\cap\mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)$に属するTが存在する事を示す。簡単の為に、$0<\lambda<1$の場合を考えよう。Rは$m_A$と同値な測度$\mu$をcontainし、$\Delta(\mu)=\{\lambda^n\mid n\in\mathbb{Z}\}$であるが、殆どすべての$x\in A$に対して、$\left\{\frac{d\mu R^k}{d\mu}(x)\;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}=\Delta(\mu)$が成立する事が解る。今、$(\mathbb{Z},2^{\mathbb{Z}})$上の測度$\delta_\lambda$を$\delta_\lambda(n)=\lambda^{-n}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$で定義し、$(X,\mathcal{B})=(A\otimes\mathbb{Z},\mathcal{B}_A\otimes 2^{\mathbb{Z}})$上の測度$\tilde{\mu}=\mu\otimes\delta_\lambda$を考えると、$\tilde{\mu}$は、明らかに、測度$m_A\otimes\delta_1$と同値である。そこで、X上の変換Tを

$$T(x)=T(a,n)=\left(R(a),\ n+\log_\lambda\frac{d\mu R}{d\mu}(a)\right)$$

と定義すると、$T\in\mathcal{G}(X)$, $TS=ST$は明らかで、又、Tは測度$\tilde{\mu}$を不変にする事も確かめられる。又、Rがμをcontainする事から、Tのfirst return timeに依る、A上へのinduced transformation T_Aがergodicになる事が解り、更に、この事と、$\left\{\frac{d\mu R^k}{d\mu}(a)\;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}=\Delta(\mu)$が殆どすべての$a\in A$に対して成り立つ事を併せると、Tがergodic、従って、$T\in\mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)\cap\mathcal{J}_R$となる事が結論される。$R\in\mathcal{E}_{\mathrm{III}_1}(A)$の場

合も $\S 2$ と同様（詳細は[2]参照）にして、$T \in \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X) \cap \mathcal{J}_R$ が構成出来るが、但し、この場合、T は $[S]$ の normalizer にはなるが、S と可換になる様には作れない。

註 (1) $R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}}(A)$ であれば、$\mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\mathrm{II}_1}(X)$ は常に空集合である。 (2) $R \in \mathcal{E}_{\mathrm{II}_1}(A) \cup \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(A)$ に対しても、上の構成法と略同じ様にして、$T \in \mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)$ が存在する事を示す事が出来る。又、$R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}_0}(A)$ に対しては、$\mathcal{J}_R$ は $\mathcal{E}_{\mathrm{II}}(X)$ の元を含み得ないが、σ-finite な不変測度を持ち、aperiodic, recurrent で、且 $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n A = X$ となる様な T を必ず含んで居る事が示される。

§3 応用 (1) $R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(A)$ $(0<\lambda<1)$ とし、μ を R に依って contain される測度とする。上の Theorem で構成された T を用いて、R に contain される測度の全体を次の様に特徴づける事が出来る。即ち、$\mathcal{M}_R = \{(A, \mathcal{B}_A)$ 上の測度 $\nu \mid \nu$ は m_A と同値、且、変換 R は ν を contain する$\}$ と定義すると、$\mathcal{M}_R$ の元は、X 上の T-不変測度 $\tilde{\mu} = \mu \otimes \delta_\lambda$ の S-section への制限と一対一に対応する。実際、B を S-section とすると、T の first return time に依る B 上への induced transformation T_B は ergodic で $\tilde{\mu}|_B$ を不変にするが、$S' \in [S]$ で $S'(A) = B$ となる変換を用いて、$\nu = \tilde{\mu}|_B S'$, $V = S'^{-1} T_B S'$ と定義すると、$V \in [R]$, V ergodic $\nu V = \nu$ となって、$\nu \in \mathcal{M}_R$ が示される。一方、$\nu \in \mathcal{M}_R$ と

とすると、或る正数 c が存在して、$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = c\lambda^{n(x)}$ と表わされる事が示されるから、$A_k = \{x \in A \mid n(x) = k\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$S'(a, n) = S^{-k}(a, n) = (a, n-k)$, $a \in A_k$, $n \in \mathbb{Z}$ と定義すれば、$S' \in [S]$ となって、$B = S'(A)$ は S-section になり、測度 ν は $c\,\tilde{\mu}|_B S'$ と一致し、induced transformation T_B に対して、変換 $V = S'^{-1} T_B S'$ が ν を不変にする ergodic な $[R]$ に属する変換となる事も示される。

$R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}_1}(A)$ の時にも、X 上の T-不変測度 $\tilde{\mu}$ の S-section への制限は、上と同様にして、$\mathfrak{M}_R$ のある元に対応する事が示されるが、しかし、この場合、$\mathfrak{M}_R$ は本質的にその様にして捉えられるものとは違った元も含んでいる。

(2) Theorem に依って得られた T と S-section の概念を用いる事に依って、次の結果 (Connes の定理の特殊な場合) を導く事も可能である。

<u>Theorem</u> (Connes): $R \in \mathcal{E}_{\mathrm{III}_\lambda}(A)$ $(0 < \lambda < 1)$ とすると、次の性質を持つ変換 R_1 と R_2 が $[R]$ に存在する。

i) $R_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(A)$

ii) R_2 は $[R_1]$ の normalizer である。

iii) R_1 の不変測度 ν に対して、$\nu R_2 = \lambda \nu$ が成り立つ。

iv) $[R] = [R_1, R_2]$.

証明の概略。 T を §2 の Theorem の証明で構成され

た $\mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(X)$ の元, $\tilde{\mu} = \mu \otimes \delta_\lambda$ を T-不変測度とする。Tは変換 S と可換になっている。$[S]$ の元 S' を適当に取ると $B = S'(A)$ は $\tilde{\mu}(B) = \infty$ となる S-section を与え, $C = S(B) = SS'(A)$ も又, $\tilde{\mu}(C) = \infty$ となる S-section である。Tの first return time に依る B 上への induced transformation T_B に対して, $R_1 = S'^{-1} T_B S'$ は $[R]$ に属する A 上の変換で, A 上の σ-finite, infinite な測度 $\nu = \tilde{\mu}|_B S'$ を不変にするから, $\mathcal{E}_{\mathrm{II}_\infty}(A)$ に属する。T の C への induced transformation T_C に対して, $(SS')^{-1} T_C (SS')$ はやはり $[R]$ に属する変換になるが, T と S とが可換な事から, この変換は R_1 に一致する事が解る。一方, $\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(C) = \infty$ であるから, T に compatible な変換 $U : B \to C$ が存在するが, T と S が可換な事を用いて, この U を $[T]$ の元 T' として拡張し, 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して, $T'^{j}(B) = S^{j}(B)$ が成り立つ様に出来る。この T' は, 又, $[R]$ の元 R_2 と natural に対応する。この R_2 に対して, R_1 の不変測度 ν は, $\nu R_2 = \lambda \nu$ の性質を持つ事が, $\frac{d\tilde{\mu}S}{d\tilde{\mu}}(x) = \lambda^{-1}$, $\forall x \in X$ が成り立つ事を用いて, 証明出来る。又, T_B と T_C が共に R_1 に対応する事から, $R_2[R_1] = [R_1]R_2$ が成り立つ事, 又, $T'^{j}(B) = S^{j}(B)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$ から, $[R] = [R_1, R_2]$ となる事が結論される。

References

[1] Connes, A., Une classification des facteur de type III, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e serie, 6 (1973), 133-252.

[2] Hajian, A., Ito, Y., Kakutani, S., Orbits, sections and induced transformations, Israel J. of Math. 18 (1974), 97-115.

[3] Kakutani, S., Induced measure preserving transformations, Proc. Japan Acad. 19 (1943), 635-641.

[4] Krieger, W., On non-singular transformations of a measure space I, II., Z. Wahrsch. u. verw. Geb. 11 (1969), 83-97, 98-119.

[5] Krieger, W., On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space, Lecture Notes in Mathematics #160, Springer Verlag, 1970, 158-177.