数理解析研究所講究録
第314巻 1977年 74-87

C^*-環の近似問題について

山形大 理　富山 淳

まえがき. よく知られたGrothendieckのBanach空間における近似性質のC^*-環版なとり扱いとしてC^*-環のFubini積が考えられることは以前にもこの講究録[1]においてのべたことがあるがそれ以後ここ1, 2年の間に問題が大きく進展したのでそれらを中心にここではのべることにする.

§1. C^*-環のFubini積について. C, DをC^*-環, A, BをそのC^*-部分環とする(単位元は仮定しない). $A \otimes_\alpha B$は$C \otimes_\alpha D$のC^*-部分環と考えられるからA, Bの($C \otimes_\alpha D$についての)Fubini積を

$$F(A, B) = \{x \in C \otimes_\alpha D \mid R_\varphi(x) \in B,\ L_\psi(x) \in A \quad \forall \varphi \in C^*,\ \psi \in D^*\}$$

と定義する. 定義から$F(A, B)$は$C \otimes_\alpha D$の中の自己共役な部分空間になっているが実はC^*-部分環になっている.

命題1.1 $F(A, B)$は$C \otimes_\alpha D$のC^*-部分環である. 特にA, BがそれぞれC, Dのイデアルである時は, $F(A, B)$は又$C \otimes_\alpha D$の

イデアルになる.

証明. 前半は C, D の第二共役空間を von Neumann 環とみたものを $\tilde{C}, \tilde{D}$ とかくと, A, B のそれはそれぞれ $\tilde{C}, \tilde{D}$ の中の σ-weak 位相で閉な自己共役部分環になっている. 従ってこの意味で $C \otimes_\alpha D$, $\tilde{A} \bar{\otimes} \tilde{B}$ 等は皆 $\tilde{C} \bar{\otimes} \tilde{D}$ の部分環と考えられ, この時弱位相の性質から $\tilde{A} \cap C = A$, $\tilde{B} \cap D = B$ が成り立つ. 従って von Neumann 環のテンソル積の時と同様に

$$F(A, B) = \tilde{A} \bar{\otimes} \tilde{B} \cap C \otimes_\alpha D \quad \text{in } \tilde{C} \bar{\otimes} \tilde{D}.$$

よって $F(A, B)$ は C^*-環である. 後半は [9 ; Lemma 2.3] による. 前半は右各氏の注意による.

そこで $F(A, B) = A \otimes_\alpha B$ の問題を次の三つにわける.

問題(a) 任意の三つ組 (B, C, D) に対して $F(A, B) = A \otimes_\alpha B$ となるような A はどんな C^*-環か?

問題(b) $A = C$ としたとき, 任意の組 (B, D) について $F(A, B) = A \otimes_\alpha B$ の成り立つのはいつか?

問題(c) $B = D$ としたとき, 任意の組 (C, D) について $F(A, B) = A \otimes_\alpha B$ が成り立つのはいつか?

これらの問題は C^*-環の構造理論と深い関係をもっている. そして von Neumann 環の時と同様に C^*-テンソル積の中の基本的な問題のいくつかは上の問題の解決にかかっている ([9] [10] 参照). これらについて既知肯定的な結果としては

定理 1.2　A の既約表現が有限次元で且つその次元が有界な C^*-環については問題(a)は肯定的である。

この定理の著者の[9]での証明はいささか長いものであったが現在では次のようにしても証明出来る。即ちまず A は nuclear であるから [3; 定理 3.1] により Grothendieck の (metrical) 近似性質をもつ。よって $F(A, B)$ の $C \otimes_\lambda D$ (λ-ノルムでのテンソル積、λ は最小のクロスノルム) での image は次節の定理 2.1 から $A \otimes_\lambda B$ に含まれる。一方このとき [17; Proposition 1] により $A \odot B$ では α-ノルムと λ-ノルムは同値になっている。従って $F(A, B) = A \otimes_\alpha B$.

上の定理の直接の結果としては例えば $C \otimes_\alpha D$ の中心は各 C と D の中心の C^*-テンソル積であることなどが言える。このことは又 C, D の任意のテンソル積 $C \otimes_\beta D$ の中でも成り立っている ([1], [15]).

問題(B),(C)については次のことが成り立つ。

定理 1.3.

(1) A が nuclear の時(B)の解になる

(2) A が injective ならば (C)の解である。

証明. (2) は [　; Proposition 3.7] に含まれるので(1)のみのべる。A は nuclear であるから定理 1.2 の証明でものべたように finite rank の completely positive contraction $\{\varphi_\alpha\}$ が存

在してρ_αは単位写像に各点ごとにノルムで収束している。このとき$A \underset{\alpha}{\otimes} D$には又completely positive map $\rho_\alpha \otimes 1$が定義出来て且つ$\|\rho_\alpha \otimes 1\| \leq 1$（[2]参照）。従って$\{\rho_\alpha \otimes 1\}$は$A \underset{\alpha}{\otimes} D$において単位写像に各点ごとにノルム収束している。$x \in F(A, B)$をとる。今$\rho_\alpha$を

$$\rho_\alpha(a) = \sum_{i=1}^{n} \langle a, \varphi_i \rangle a_i \quad \forall a \in A$$

とすると

$$\rho_\alpha \otimes 1 (a \otimes b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes R_{\varphi_i}(a \otimes b) \in A \underset{\alpha}{\otimes} B$$

よって　$x = \lim_\alpha \rho_\alpha \otimes 1(x)$　は　$\rho_\alpha \otimes 1(x)$が$A \underset{\alpha}{\otimes} B$に入るから$x$も又$A \underset{\alpha}{\otimes} B$に入る.

さて問題(A)はvon Neumann環の時とは違って一般には成立しないだろうと予想されていたがWassermann [18]によって次のことが示されている.

定理1.4　$A = C = M$, von Neumann環とすると次のことは同値である.

(1) Mは(B)の解である

(2) Mはnuclearである

(3) MはI_n型のvon Neumann環の有限和である.

これからほとんどのvon Neumann環はC^*-型のcommutation theoremを満足しないわけである. Wassermannは[18]で更に可分なC^*-環でも(B)のnegative exampleがあることを示していたがごく最近古谷氏はWassermannの方法を発展させ

て次の結果を証明されたので問題(α)の解は,"nuclear であろう"という最初の予想とは大きく違ったものになってきた.

定理 1.5. H を可分な無限次元のヒルベルト空間とし、$C(H)$, $B(H)$ をそれぞれその上のコンパクトな作用素, 有界な作用素のつくる環とする. このとき $B(H)\otimes_\alpha B(H)$ の中の $F(C(H), B(H))$ は $C(H)\otimes_\alpha B(H)$ より exact に大きい.

考え方を中心に証明の概略をのべてみる. p_n を H 内の n 次元の projection とし, $p_n p_m = 0$ $(n \neq m)$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ とする.

$p_n B(H) p_n = B(p_n H)$ を $n\times n$ の matrix 環 M_n と同一視し M_n の直和を M とする. $x \in M_n \longrightarrow \tilde{x} \in M_n$ を M_n 内の transpose map とし、それを M に拡大したものもやはり $\tilde{x}$ とかく. M_n 上の trace τ_n をとり $M_n \otimes_\alpha M_n$ の state φ_n を $\langle x\otimes y, \varphi_n\rangle = \tau_n(\tilde{x}\tilde{y})$ で定義する. $\mathcal{U}$ を自然数の集合の 極限点に対する free ultrafilter とし、$M\otimes_\alpha M$ の state φ_0 を

$$\langle x\otimes y, \varphi_0\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x\otimes y, \varphi_n\rangle = \tau(\Phi(\tilde{x}\tilde{y}))$$

で定義する. ここで Φ は M をその ideal

$$I = \{x \in M \mid \lim_{\mathcal{U}} \langle a^* x b, \tau_n\rangle = 0 \quad \forall a, b \in M\}$$

でわった時の quotient map であり、この時 M/I は II_1-型の factor としての同型表現 N をもつ. 更にその上の trace τ は

$$\langle [x], \tau\rangle = \langle \Phi(x), \tau\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x, \tau_n\rangle$$

であたえられることはよく知られている. 又上の φ_0 が $M\otimes_\alpha M$ ま

で拡大出来ることは[18]の議論によっている。そこで更にφ_0の$B(H)\otimes_\alpha B(H)$への拡大φを

$$\langle x\otimes y,\ \varphi\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle p_n x p_n \otimes p_n y p_n,\ \varphi_n\rangle$$

で定義する。つくり方からφは$M\otimes_\alpha M$-centralになっている。π_φをφのGNS-表現，ξ_0をその空間H_φの中のπ_φについてのcyclic vectorとする。F_2を2ヶの生成元をもつ自由群とする。[18]によりF_2はMの中へ忠実なunitary表現をもちそれらの元aは$\tilde{a} = a^* = a^{-1}$となるようにとれる。今Mの中で考えたF_2の元a, b, c, dについて$ba^{-1} = dc^{-1}$とすると

$$\|\pi_\varphi(a\otimes b)\xi_0 - \pi_\varphi(c\otimes d)\xi_0\|^2$$
$$= 2 - \langle c^*a\otimes d^*b,\ \varphi\rangle - \langle a^*c\otimes b^*d,\ \varphi\rangle$$
$$= 2 - \tau(\Phi(d^{-1}ba^{-1}c)) - \tau(\Phi(b^{-1}dc^{-1}a)) = 0$$

これから　$[\pi_\varphi(F_2\otimes F_2)\xi_0] = [\pi_\varphi(1\otimes F_2)\xi_0]$
（[ ]は中の元で生成されたH_φの部分空間を示す）。
Pを$[\pi_\varphi(1\otimes F_2)\xi_0]$へのprojectionとする。

さて$B(H)\otimes_\alpha B(H)$の$B(H)\otimes_\alpha C(H)$による商環は$B(H)$と$B(H)/C(H)$のC^*-テンソル積と考えられるからそのcross-normをγとおく（定理は$F(C(H), B(H))$の形であるが証明はnotationの見易さのためにあとの方をCalkin algebraとし$F(B(H), C(H))$の形でのべることにする）。AをF_2の生成するMのC^*-部分環とすると$\pi_\varphi(A\otimes_\alpha A)$は$PH_\varphi$を不変にする。$\gamma > \alpha$であることを

示せば $B(H)\otimes_\alpha B(H) \longrightarrow B(H)\otimes_\alpha B(H)/C(H)$ の準同型の核が $F(B(H), C(H))$ であるから証明は完結する。そこで $\eta=\alpha$ とする. 仮定から

$$\rho : A\otimes_\alpha \pi_\varphi(1\otimes A) \longrightarrow \pi_\varphi(A\otimes_\alpha A)|P$$

は $*$-準同型である. ρ の $A\otimes_\alpha B(H_\varphi)$ への拡大 $\hat{\rho}$ をその表現空間 K が $K\supset H_\varphi$ をみたし

$$\hat{\rho}\,|\,A\otimes_\alpha \pi_\varphi(1\otimes A)\,|\,PH_\varphi = \rho$$

となるようにつくる. そこで任意の $t\in B(H_\varphi)$ について

$$\psi(t) = P\hat{\rho}(1\otimes t)P$$

とおくと、つくり方から ψ は、$a, b\in F_2$ について

$$\psi(\pi_\varphi(1\otimes a)\,t\,\pi_\varphi(1\otimes b)) = \pi_\varphi(1\otimes a)\psi(t)\pi_\varphi(1\otimes b)$$

をみたす。$f\in \ell^\infty(F_2)$ について PH_φ 上の作用素 M_f を

$$M_f\pi_\varphi(1\otimes a)\xi_0 = f(a)\pi_\varphi(1\otimes a)\xi_0$$

で定義する. $P^\perp H$ で $M_f=0$ とおけば M_f は $B(H_\varphi)$ の元と考えてよい。f_a を $f_a(b)=f(a^{-1}b)$ となる関数とすると前にやった計算から

$$\pi_\varphi(1\otimes a)M_f\pi_\varphi(1\otimes a^{-1})|PH_\varphi = M_{f_a}|PH_\varphi$$

が成立する. $P^\perp H$ 上では両方共に0だから上式は制限なしで成り立つ。そこで $\mu(f) = (\psi(M_f)\xi_0, \xi_0)$

とおくとこれが F_2 の invariant mean になることが次のようにしてわかるので $\eta=\alpha$ が矛盾をおこすわけである. 即ち

$$\mu(f_a) = (\psi(\pi_\varphi(1\otimes a)M_f\pi_\varphi(1\otimes a^{-1}))\xi_0, \xi_0)$$

$= (\psi(M_f)\pi_\varphi(1\otimes a^{-1})\xi_0,\ \pi_\varphi(1\otimes a^{-1})\xi_0)$

$= (\psi(M_f)\pi_\varphi(a\otimes 1)\xi_0,\ \pi_\varphi(a\otimes 1)\xi_0) = (\psi(M_f)\xi_0,\ \xi_0)$

$= \mu(f)$ 　　　　　　　　証明了.

上の証明を更に考えると同じようにして M_n の $C^*(\infty)$-和 $\sum_{n=1}^{\infty}\oplus M_n$ が $M\otimes_\alpha B(H)$ の中で non-trivial な Fubini 積 $F(\sum\oplus M_n,\ B(H))$ をもつことが示せるので、C^*-環 A はたとえその既約表現が有限次元だけと仮定しても問題(A)に対して反例をもつことになり、従って(A)の解は非常に狭く、定理1.2がある意味では best possible ではないかと考えられてきた. 尚問題(B)については逆が成り立つのではないかと思われる. 古谷氏は更に **C** が I 型の C^*-環の時 $\mathbf{C}\otimes_\alpha\mathbf{D}$ (**D**は任意) の中の任意の C^*-部分環 $A\otimes_\alpha B$ は product functional $\varphi\otimes\psi$ で分離出来ることを証明しているが(知られていたのはイデアルの場合) 詳細は略する.

§2. Banach空間の Fubini 積と近似問題. Banach空間の最小のクロスノルム λ による Fubini 積は本質的には既に[14]によって Waelbroeck に考えられており、それが Grothendieck の近似問題と同値になることがわかっているが著者の[9]においては、前者と、ここでの定式化との関係をはっきりした形では述べていなかったのでそれを求めておく。E, F を Banach空間, $E\otimes_\lambda F$

をλ-ノルムによるテンソル積とする.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\| = \sup_{\substack{\|\varphi\| \leq 1 \\ \|\psi\| \leq 1}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i, \varphi \otimes \psi \right\rangle \right|$$

GとHをEとFを含むBanach空間とする. G上の有界線型汎関数φに対してここでも右 slice map R_φが定義出来る. 左の slice map についても同様である.

$$F(E, F) = \{ x \in G \otimes_\lambda H \mid R_\varphi(x) \in F,\ L_\psi(x) \in E, \\ \forall \varphi \in G^*,\ \psi \in H^* \}.$$

とおく。λ-ノルムについては$E \otimes_\lambda F$が$G \otimes_\lambda H$の部分空間として考えられるようになっているから上の定義は意味をもっている。そしてここではC^*-環の時と異なり問題(a), (b), (c)がすべて同値な形になる. これはλ-ノルムの構造がC^*-環の時のα-ノルムの定義と比べてはるかに簡単になっていることに起因している.

定理2.1. Eを固定したとき次のことは同値である.

(1) 任意の三つ組(G, F, H)について$F(E, F) = E \otimes_\lambda F$

(2) $E = G$としたとき任意の組(F, H)について

$$F(E, F) = E \otimes_\lambda F$$

(3) $F = H$としたとき任意の組(F, G)について

$$F(E, F) = E \otimes_\lambda F$$

(4) Eは approximation property をもつ.

証明は[14]の議論の変形であるが詳細は富山[12]にゆずる。ここで前講演の von Neumann 環の場合はその状況でいわば最大の環として $B(H_1)\overline{\otimes}B(H_2)=B(H_1\otimes H_2)$ があり定理は実質上 $M_1=B(H_1)$, $M_2=B(H_2)$ の時のみのべれば十分であった。Banach 空間の時にそれにあたるものは X, Y をそれぞれ E^*, F^* の単位球に弱＊一位相を考えたものとした時の連続関数環 $C(X)$, $C(Y)$ である。実際このとき G, H をどのようにとっても $G\check{\otimes}H$ に関する E, F の Fubini 積 $F(E, F)$ は

$C(X)\check{\otimes}F\cap E\check{\otimes}C(Y)$ （$C(X)\check{\otimes}C(Y)$ の部分空間と考えての共通部分）

の中に embed 出来ること、即ち上の空間が E, F のみによってきまる最大の Fubini 積であることが示せる。これまでの議論はいわばその状況でのこのような canonical なものは何かということである。このような状況の中で Banach 空間の近似性質の C^*-環的表現として nuclear C^*-環をとらえ実際それが metrical approximation property を持つことが示されるに及んでその逆も又成立するのではないかと予想されていたがごく最近 U. Haagerup が nuclear 環とはおよそ反対にある 2 ケの生成元をもつ自由群 F_2 の群環 $C_r^*(F_2)$ (reduced) が又 metrical approximation property をもつことを証明したので C^*-環における completely positive finite rank operator

による近似性質は Banach 空間のそれとはきわめて違ったものであることが認識されつつある。

共通文献

1. R. J. Archbold, On the center of a tensor product of C^*-algebras, J. London Math. Soc. 10 (1975), 257–262
2. W. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras, Acta Math. 123 (1969), 141–224
3. M. Choi and E. Effros, Nuclear C^*-algebras and the approximation problem, Amer. J. Math. に掲載予定
4. E. Effros and C. Lance, Tensor product of operator algebras, preprint
5. A. Grothendieck, Produits tensoriels Topologiques et espaces nucleaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955)
6. S. Sakai, On the σ-weak topology of W^*-algebras, Proc. Japan Acad. 32 (1956), 329–332
7. M. Takesaki, A note on the direct product of operator algebras,
8. J. Tomiyama, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Seminar Univ. of Copenhagen 1970.
9. ———, Tensor products and approximation problems of C^*-algebras, Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyôto Univ. 11 (1975), 163–183

10. ———, Fubini algebras and the commutation theorem for tensor products of C^*-algebras, Symposia Math. 20 (1976), 27-37, Rome.

11. ———, On the Fubini product of von Neumann algebras, Bull. of Yamagata Univ. 9 (1976), 53-56

12. ———, Some aspects of commutation theorem for tensor products of operator algebras, Proc. on the Colloquium "Algebras of operators and their applications to mathematical physics" (1977) Marseille.

13. ———, C^*-環における近似問題, 数理解析研究所講究録 265, Approximation theory in functional Analysis", (1976), 76~88

14. L. Waelbroeck, Duality and the injective tensor products, Math. Ann. 163 (1966), 122-126

15. G. F. Vincent-Smith, The centre of the tensor product of A(K)-spaces and C^*-algebras, Quart. J. Math. Oxford, 28 (1977), 87-91

16. S. Wassermann, Extensions of normal functionals on W^*- tensor products, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), 301-307

17. ———, The slice map problem for C^*-algebras,

Proc. London Math. Soc. 32 (1976), 537-559

18. ———, On tensor products of certain group C^*-algebras, J. Functional Analysis, 23 (1976), 239-254

19. J. Andersen and J. Bunce, A Type II_∞ factor representation of the Calkin algebras, Amer. J. Math. 99 (1977), 515-521