

銀河と気体の相互作用

京大・工・航空 武田英徳

第I章 緒言

彗星・星風、銀河風、星・銀河の爆発等、走りながらガスを放出する天体现象が数多くみられる。そこでこの問題を理想化し、球対称に、超音速でガスを放出しつつ、ガス中を超音速で走っている天体のまわりの流れの様子を、数値計算によって simulate した結果を報告する。第II章では、数値計算の方法と結果を、第III章では、上流対称軸近くの流れについてやや詳しく述べる。第IV章は 結び とする。

第II章 数値計算の方法と結果

a) 計算の方法

流れの場を数値計算で解く為に、連続の式、運動方程式、エネルギー式を差分式で近似する。この方法は数多くあるが、計算の安定性のよい FLIC^{*} (Fluid In Cell) 法を採用した。軸対称を仮定し、円柱座標を用いてこの計算方法を簡単に説明する。($U_\theta = 0$ とする)

解くべき方程式は次の (1)(2)(3)(4) 式である。但し、

$$\rho = (r-1)\rho I \quad \text{である。}$$

* R.A. Gentry et al. Journal of Computational Physics VOL1, NO1 (1966) P

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u = f^z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = f^r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (v \cdot \nabla) I = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} v \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (4)$$

ここで γ は比熱比 (以後 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ とする), I は単位質量当りの内部エネルギー, f^z, f^r は外力の成分,

$$v \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial r}, \quad \operatorname{div} A = \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r)$$

である。 (1) ~ (4) 式を解くことは, (4) 及び (1) 式の

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho f^z - \frac{\partial p}{\partial z} - \operatorname{div}(\rho u v) \quad (1')$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \rho f^r - \frac{\partial p}{\partial r} - \operatorname{div}(\rho v v) \quad (2')$$

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} = -\rho \operatorname{div}(v) - \operatorname{div}(\rho I v) \quad (3')$$

を解くことと同値である。

FLIC法では (1)(2)(3) 式で慣性項 = 0 として u, v, I を求め、次にこれらの値を用いて (4), (1')(2')(3) 式で圧力, 外力を 0 とおいて $u^{n+1}, v^{n+1}, I^{n+1}, \rho^{n+1}$ を求めるというやり方をする。(n は時刻 t を, $n+1$ は時刻 $t+\Delta t$ を表わす。) 即ち, $\tilde{u}_{ij}, \tilde{v}_{ij}$ は次の差分式によつて計算される。(図 II-1 を参照)

$$\frac{\tilde{u}_{ij} - u_{ij}^n}{\Delta t} = f_{ij}^z - \frac{1}{\rho} \frac{(p+\bar{p})_{i+\frac{1}{2},j}^n - (p+\bar{p})_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z} \quad (5)$$

$$\frac{\tilde{v}_{ij} - v_{ij}^n}{\Delta t} = f_{ij}^r - \frac{1}{\rho} \frac{(p+\bar{p})_{ij, \frac{1}{2}}^n - (p+\bar{p})_{ij, -\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} \quad (6)$$

ここで β は artificial viscosity で

$$q_{i+\frac{1}{2},j}^n = B C_{i+\frac{1}{2},j}^n \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n (u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n) \quad K(u^2 + v^2)_{i+\frac{1}{2},j}^n < (C^2)_{i+\frac{1}{2},j}^n \text{ かつ } u_{i,j}^n > u_{i+1,j}^n \text{ のとき}$$

$$= 0 \text{ otherwise.}$$

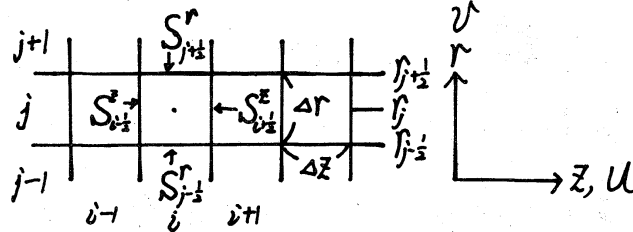
C は音速.

$q_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ も上と同様な式で表わされる.

(4), (1), (2), (3) 式に現われる

図 II-1

$\text{div}(\rho F \vec{v})$ の差分式は、
面 $S_{i+\frac{1}{2}}^x, S_{i+\frac{1}{2}}^y$ を通じて流入する ρF
 V_{ij}



で評価する。このとき

$F = \rho, u, v, I$ は mesh の中心で定義されそれぞれを F_{ij} で表す。 S は mesh の境界の面積を示し、 F は座標では、 $S_{i+\frac{1}{2}}^x = 2\pi \rho_{i+\frac{1}{2}} \Delta x$, $S_{i-\frac{1}{2}}^x = 2\pi \rho_{i-\frac{1}{2}} \Delta x$ である。 cell の体積 $V_{ij} = 2\pi \rho_{ij} \Delta x \Delta y$.

ρF は上流側の値をとる。

即ち

$$[\text{div}(\rho F \vec{v})]_{ij} = \left\{ (\rho F)_-^x S_{i-\frac{1}{2}}^x u_{i-\frac{1}{2},j}^n - (\rho F)_+^x S_{i+\frac{1}{2}}^x u_{i+\frac{1}{2},j}^n + (\rho F)_-^y S_{j-\frac{1}{2}}^y v_{i,j-\frac{1}{2}}^n - (\rho F)_+^y S_{j+\frac{1}{2}}^y v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right\} / V_{ij}$$

$$\therefore \begin{cases} (\rho F)_-^x = \rho_{i-1,j}^n F_{i-1,j}^n, & u_{i-1,j}^n > 0 \text{ のとき} \\ (\rho F)_-^x = \rho_{i,j}^n F_{i,j}^n, & u_{i-1,j}^n < 0 \text{ のとき} \end{cases}, \begin{cases} (\rho F)_+^x = (\rho F)_{i,j}^n, & u_{i+1,j}^n > 0 \text{ のとき} \\ (\rho F)_+^x = (\rho F)_{i+1,j}^n, & u_{i+1,j}^n < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\rho F)_-^y = (\rho F)_{i,j-1}^n, & v_{i,j-1}^n > 0 \text{ のとき} \\ (\rho F)_-^y = (\rho F)_{i,j}^n, & v_{i,j-1}^n < 0 \text{ のとき} \end{cases}, \begin{cases} (\rho F)_+^y = (\rho F)_{i,j}^n, & v_{i,j+1}^n > 0 \text{ のとき} \\ (\rho F)_+^y = (\rho F)_{i,j+1}^n, & v_{i,j+1}^n < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

この表わしかたを用いると、 \tilde{I}_{ij} と $\rho^{n+1}, u^{n+1}, v^{n+1}, I^{n+1}$ は、

$$\frac{\tilde{I}_{ij} - I_{ij}^n}{\Delta t} = \frac{(\rho + \beta)_{ij}^n}{\rho_{ij}^n} \cdot [\text{div}(\rho I \vec{v})]_{ij}, \quad \vec{v} = \frac{1}{2}(v^{n+1} + \vec{v}^n) \quad (7)$$

$$\frac{(\rho F)_{ij}^{n+1} - (\rho F)_{ij}^n}{\Delta t} \cdot [\text{div}(\rho \tilde{F} \vec{v})]_{ij}, \quad F = \rho, u, v, I \quad (8)$$

(5)(6)(7)(8)式を解くことは (Taylor 展開することによって),

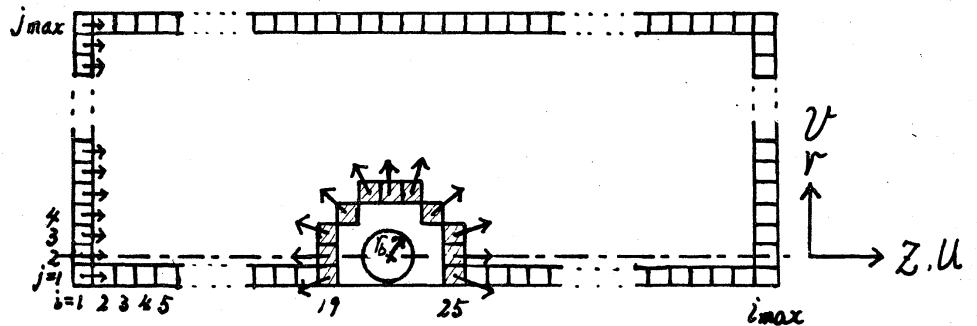
$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= \rho f^z - \frac{\partial(\rho+\delta)}{\partial z} - \text{div}(\rho u v) + O(\delta t) \\ &+ \left[\frac{\delta r}{2} \left\{ \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} \right\} + \frac{\delta z}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right) \right] + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次}) \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= \rho f^r - \frac{\partial(\rho+\delta)}{\partial r} - \text{div}(\rho v v) + O(\delta t) \\ &+ [\rho u \rightarrow \rho v] + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次}) \\ \frac{\partial(\rho I)}{\partial t} &= -(\rho+\delta) \text{div} v - \text{div}(\rho I v) + O(\delta t) + [\rho u \rightarrow \rho I] + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\text{div}(\rho v) + O(\delta t) + [\rho u \rightarrow \rho] + O(\delta t) + O(\delta z, \delta r \text{ の } 2 \text{ 次}) \end{aligned}$$

の4つの式を解くこと、即ち (4), (4)', (5), (5)' を近似的に解くことになっている。この時の誤差は $\delta t, \delta r, \delta z$ の1次の order であり、これが計算を安定化する。それゆえ FLIC 法では, artificial viscosity を入れないで計算されることも多い。

b) 数値計算の例

実際に行った数値計算の meshes を図 II-2 に示す。簡単の為、計算は重力の無視できる場合 ($f^r = f^z = 0$) に行った。

図 II-2
数値計算の meshes を示す。
図は吹



き出し口の meshes である, $\Delta r = \Delta z = 0.11758$

初期条件

図の斜線の外の全 mesh を一様流が満たしている中で, $t=0$ に図 mesh からガスが吹き出し始める。各図 mesh の ρ, u, v, I は, $r=r_b$ での値 ρ_b, u_b, v_b, I_b を定めて, 定常断熱球対称を仮定して求めた。

境界条件

$0 \leq t$ において, ($i=1, 1 \leq j \leq j_{max}$), 図 meshes で, ρ, u, v, I は一定, ($i=i_{max}, 1 \leq j \leq j_{max}$), ($2 \leq i \leq i_{max}, j=j_{max}$) meshes は流出境界とする。

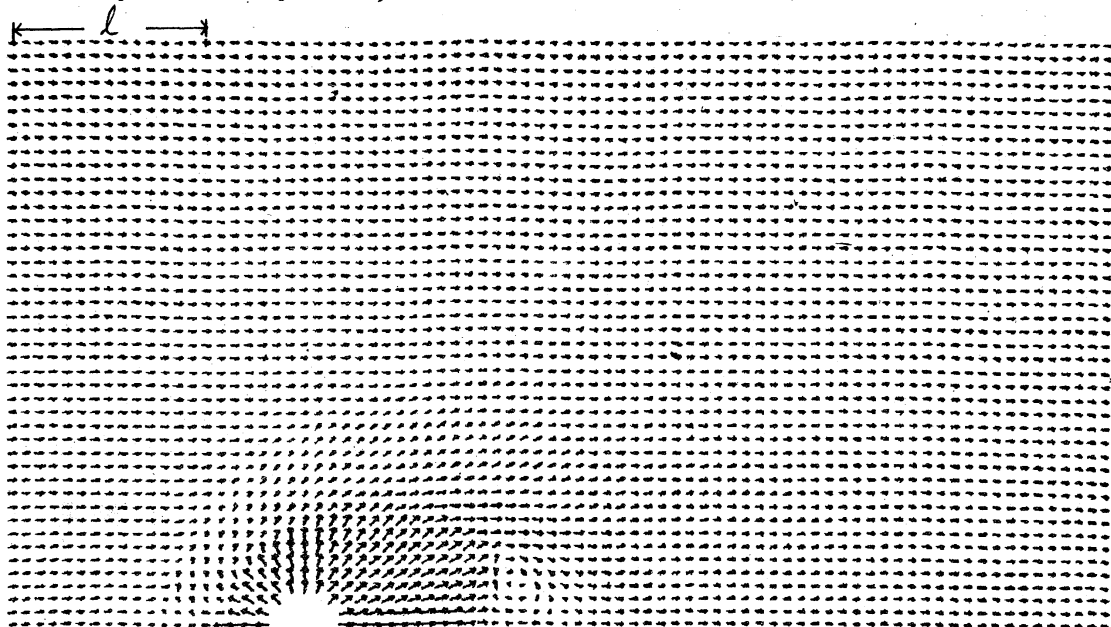
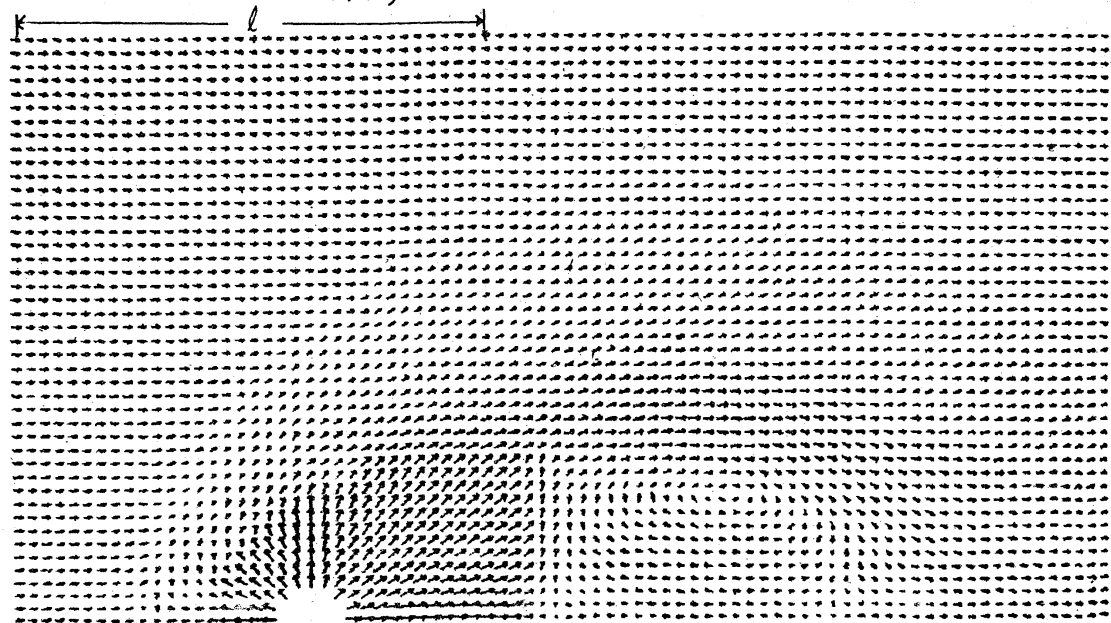
数値計算は次の 2 つの Cases について行った。

$$\text{Case I} \begin{cases} u_1 = 1.5, & u_2 = 15.4 \\ M_1 = 4.5, & M_2 = 10.9 \\ \rho_1 = 1.0, & \rho_2 = 3.9 \cdot 10^{-2} \\ I_1 = 10^{-3}, & I_2 = 1.8 \cdot 10^{-2} \end{cases} \quad \text{Case II} \begin{cases} u_1 = 1.0, & u_2 = 2.0 \\ M_1 = 10, & M_2 = 10 \\ \rho_1 = 1.0, & \rho_2 = 1.1 \\ I_1 = 9 \cdot 10^{-3}, & I_2 = 3.6 \cdot 10^{-2} \end{cases}$$

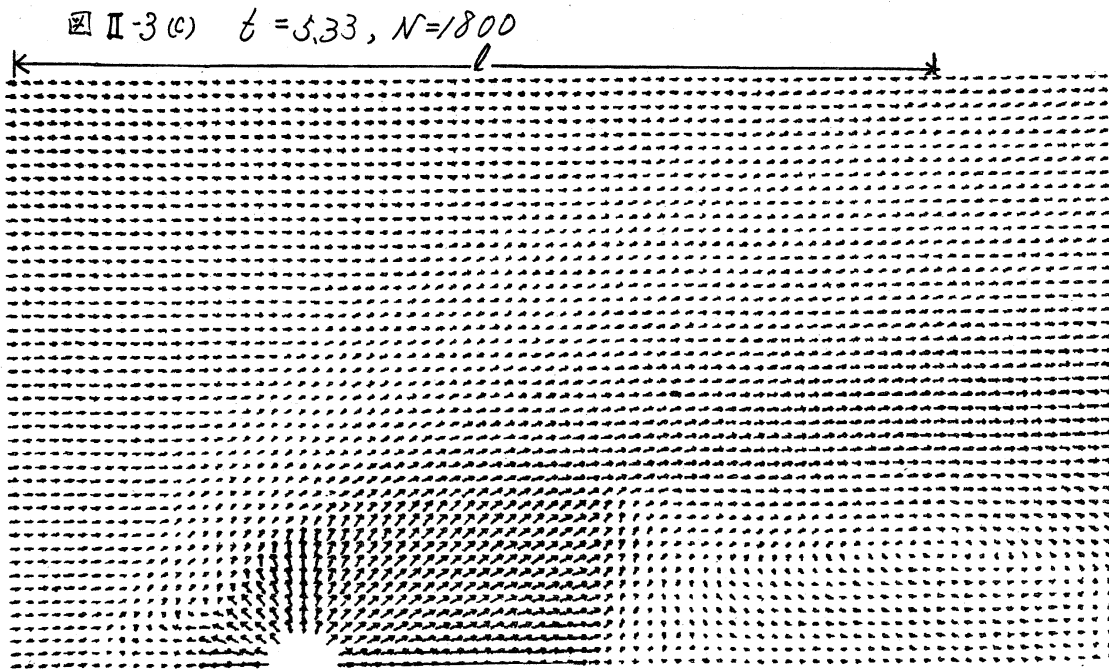
F_1 は初期に与えた一様流の値, F_2 は ($i=25, j=2$) mesh 1 における値を示す。

$\rho, u, v, I, \rho, r(\infty), t$ はそれぞれ $\rho_0, v_0, I_0 = v_0^2, \rho_0 = \rho_0 v_0^2, r_0, t_0 = r_0/v_0$ で normalized してある。例えば, Case I の場合, $v_0 = 20 \text{ km/sec}$, $\rho_0 = 120 \text{ M}_H = 0.1 \text{ M}_H$, $r_0 = 141.7 \text{ a.u.}$ とすると, $r_b = 50 \text{ a.u.}$, $\rho_1 \rightarrow \rho_1 \rho_0 = 0.1 \text{ M}_H$, $u_1 = 30 \text{ km/sec}$, $I_1 \rightarrow I_1 v_0^2 = 4 \times 10^9 \text{ erg/gm}$ ($T_1 = 16^\circ \text{K}$, 水素の完全電離気体として) $\rho_2 \rightarrow \rho_2 \rho_0 = 0.9 \cdot 10^{-3}$, $u_2 = 308 \text{ km/sec}$, $I_2 \rightarrow I_2 v_0^2 = 7.214 \cdot 10^9 \text{ erg/gm}$ ($T_2 = 16^\circ \text{K}$ //), $t_0 = 33.7 \text{ yrs}$ となる。

Case I の時刻 $t = 1.18, 2.96, 5.33$ における速度場を図 II-3(a), (b), (c) に示す。

図 II-3 (a) $t = 1.18, N = 400$ 図 II-3 (b) $t = 2.96, N = 1000$ 

図は速度場を示す。 N は計算の step 数である。図右上の $l = 4.0$ である。矢印は流速ベクトルの方向を示す、矢が長い程速度は大きい。 $linear$ との関係ではない。 $mesh$ の数は 80×45 で 図には $j=1$ の $mesh$ は描いていない。



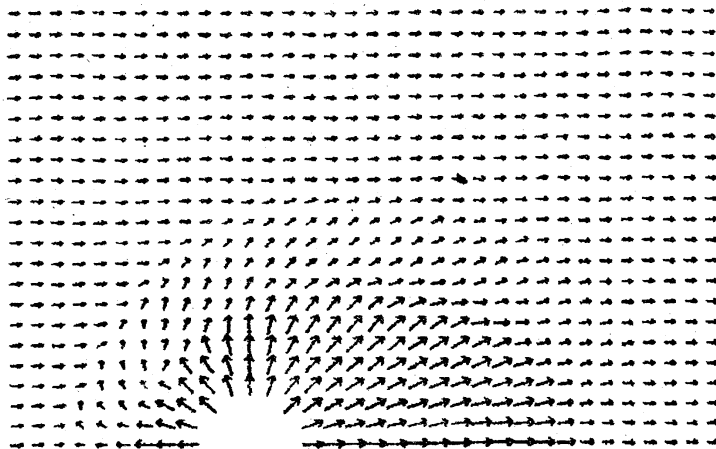
図からわかる如く、吹き出し口の後方で発生した渦は、次第に発達しながら、ゆっくりと流される。図(c)では、既に、右端で課した数値計算上の境界条件が、流れに影響していると思われるゆえ、境界に近いところはあまり正確ではなからう。

図 II-4 に $N = 250, 300, 350, 400$ における速度場の拡大図を示す。

吹き出し口の後方で、図 II-4 (a) $N = 250$

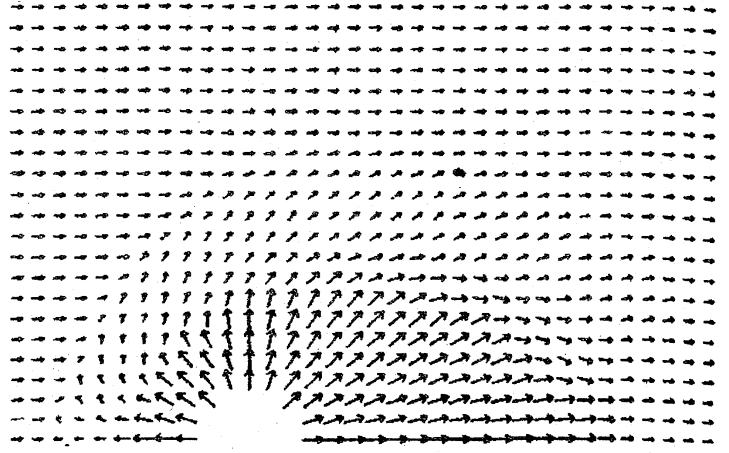
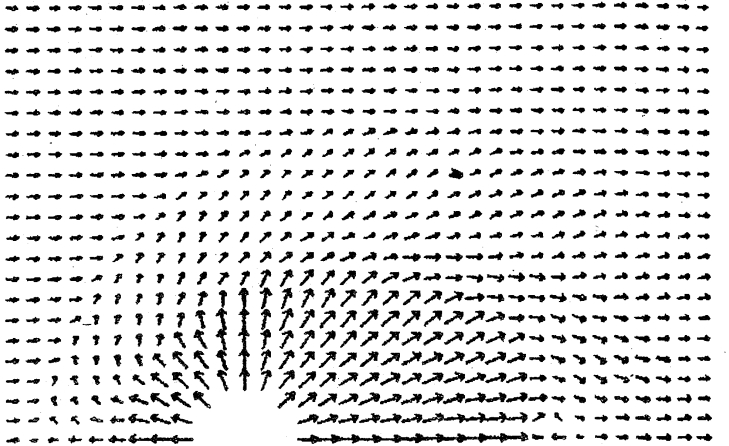
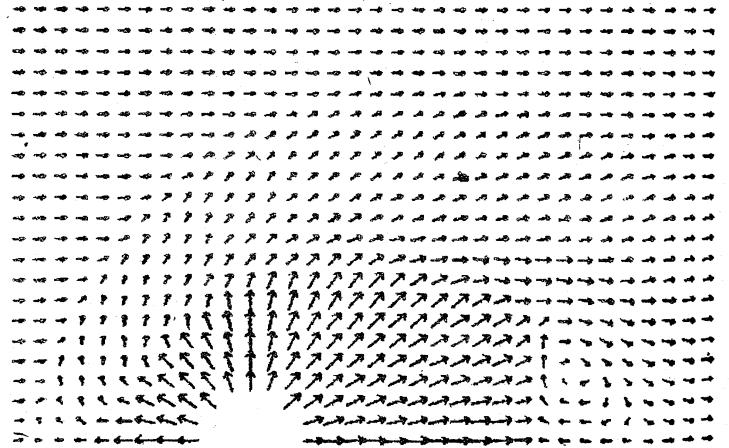
次第に流れはまわり込み、ついに渦になる状況がよくわかるであらう。

meshの数が 53×23 の場合にも、artificial viscosityの係数 B を



小さくしても、渦の発生
の状況はほとんど変
わらないゆえ、渦が発
生するという事は、
単に数値計算の error に
よるものではなく、こ
のような流れでは、現
実に発生するものと思
われる。図 II-5 に $N=400$
のときの β, γ の等高線
を示す。図の矢印のこ
ろに強い衝撃波が発
生していることがわか
る。

Case II の条件のもと
での計算結果を図 II-6
に示す。この場合には
渦の発生はみられなか
った。Case I との著し
い差は、後流側に強い
shock が存在しないこ

図 II-4 (b) $N=300$ 図 II-4 (c) $N=350$ 図 II-4 (d) $N=400$ 

とである。即ち
 渦の発生は、
 $u_2 \gg u_1$ で下流
 側に shock が発
 生することに起
 因するものと思
 われる。

図 II-5 $N=400$

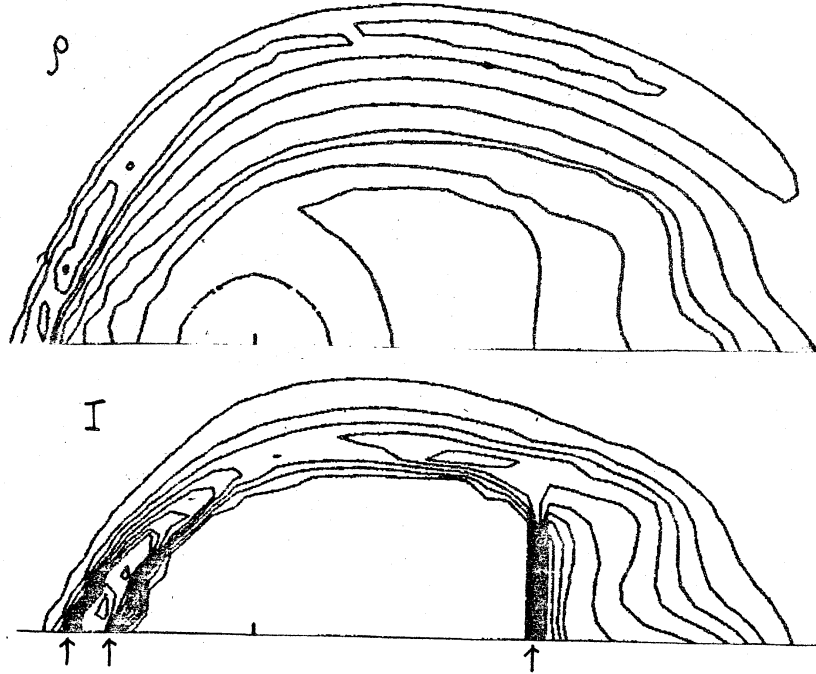
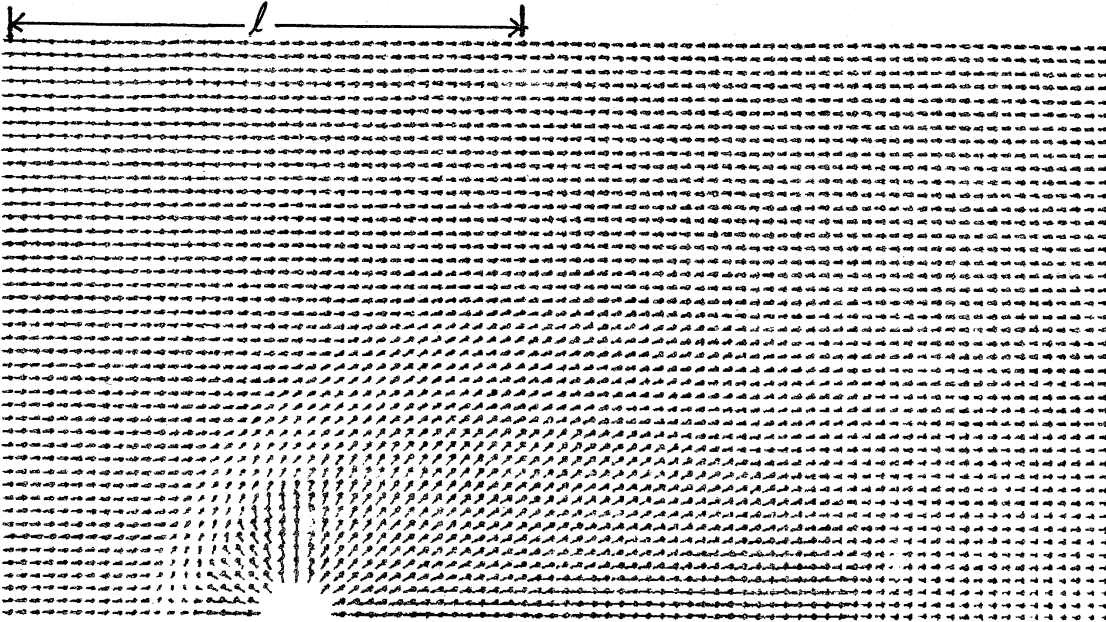


図 II-6 (a) $N=200, t=4.50$



Case II の計算結果。(a)は速度場、(b)は密度、(c)は内部エネルギーの等高線。
 $l = u_1 t$

図 II-6 (b)

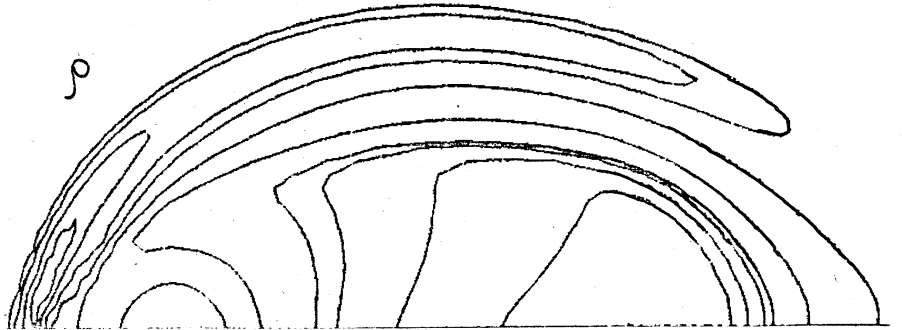
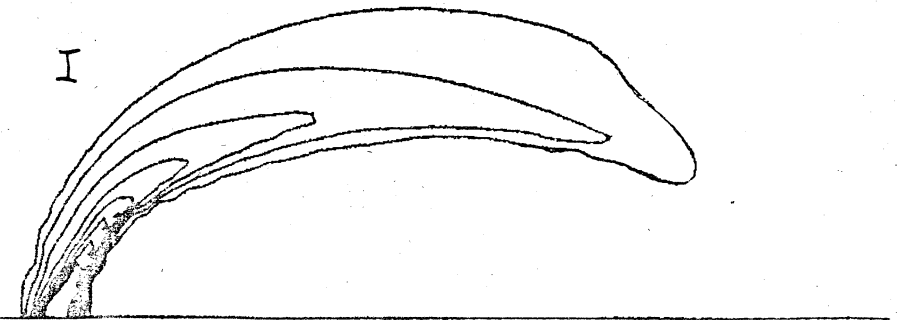


図 II-6 (c)

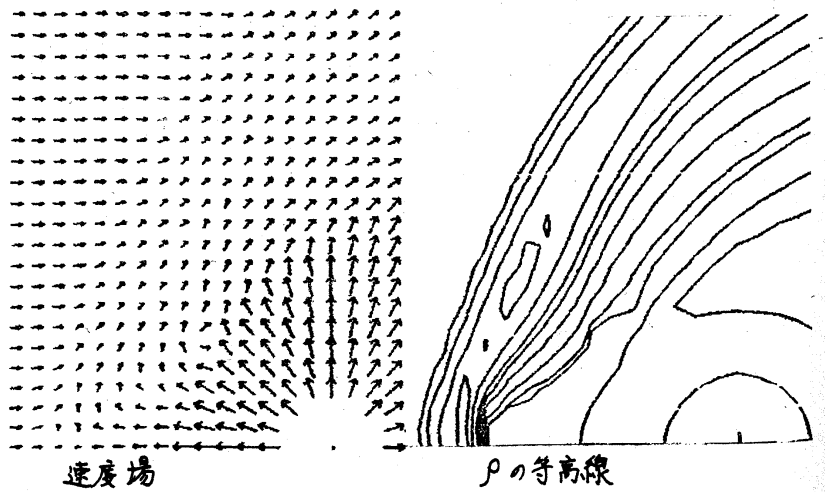


第 III 章 上流の衝撃波面・接触不連続面

十分に時間が経過した後には、前方の流れはほぼ定常になる。図 III-1 に $N=3600, t=10.5$ のときの流れの図と ρ の等高線を示す。図から

図 III-1, $N=3600, t=10.5$

2つの衝撃波面がかなりはっきりと読みとれる。とくに前方対称軸上の ρ, u, I の変化を図 III-2 に示す。



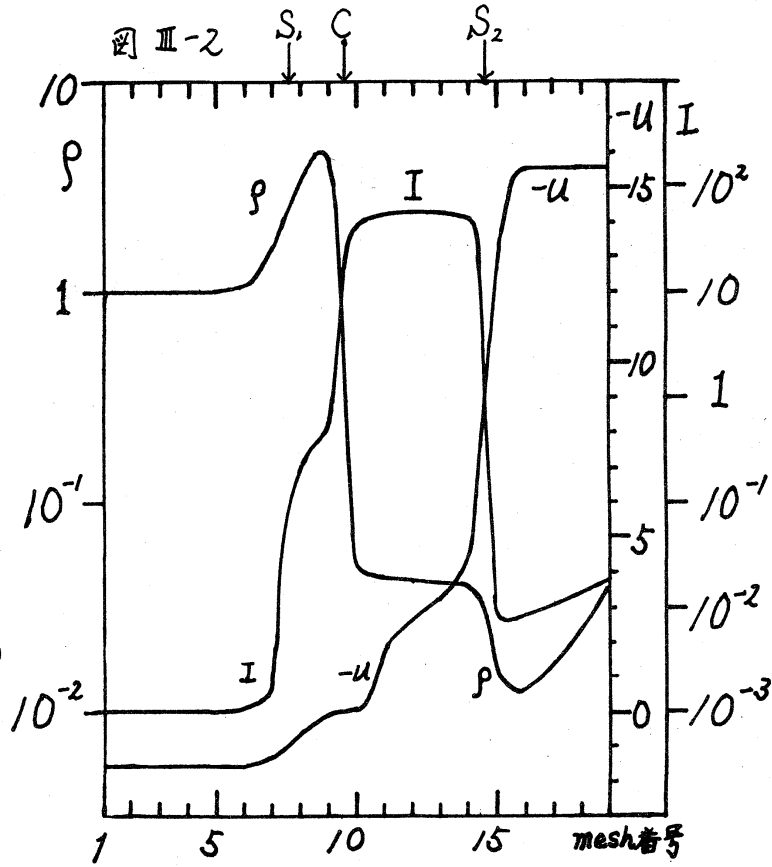
図Ⅱ-1,2をもとに
これら2種の面を
描いたものが図Ⅱ-3
である。

一方今考えてい
るのと似た状況の
もとで、上流の衝
撃波面、接触不連
続面の形状を、Dyson^{*)}
が求めている。彼
の結果を引用する。

図Ⅱ-4で示され
る場合を考える。

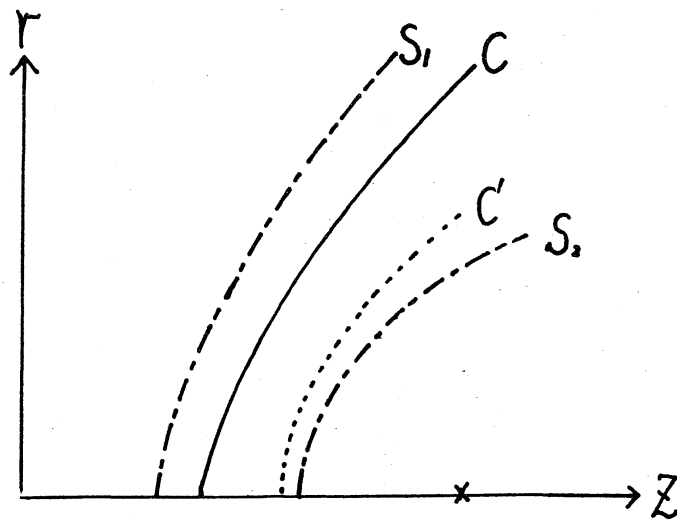
接触不連続面, C' , の右
側では, $\rho(r) = \rho_0 r^2 / r_0^2$,
 $u = u_2 : const.$ と考えて C
を, 両カスの, この面に
垂直方向の運動量 flux
が等しいとおいて求める。

^{*)} J.E. Dyson *Astrophysics and Space Science* 35 (1975) 299



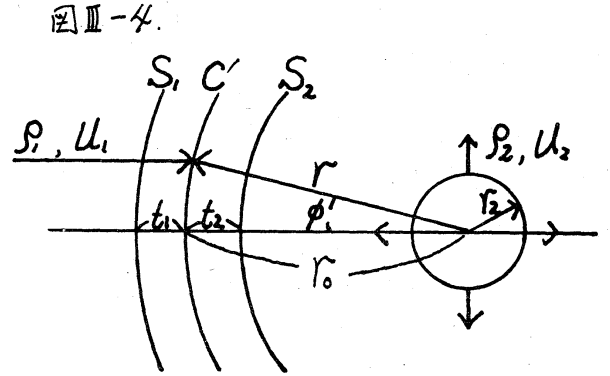
図Ⅱ-2 $N=3600$ のときの、前方対称軸上の ρ, u, I の変化を示す。矢印 S_1, S_2 は衝撃波の位置を、 C は接触不連続面の位置を示す。

図Ⅱ-3



図Ⅱ-3 $N=3600$ のときの前方にできる接触不連続面 C, C' , 衝撃波面 S_1, S_2 . C' は Dyson にならった analytic 法で求めたもの

各 shocked region の厚さ t_1, t_2 は各領域ごとに、運動量保存と質量保存を用いて計算する。両ガスともに $\gamma=5/3$ の理想気体とすると*)



図II-4. Dyson のやり方, S_1, S_2 は衝撃波面, C' は接触不連続面 p_1, u_1 は一様流の速度と速度, $r=r_2$ から p_2, u_2 でガスが吹き出す, 両ガスは、衝突するまでは圧力は無視, t_1, t_2 は C' から S_1, S_2 までの距離.

$$r/r_0 = \sin \phi / \phi, \quad (V_0^2 = p_2 u_2^2 / p_1 u_1^2)$$

$$t_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8} r_0 = 0.325 r_0$$

$$t_1 = \frac{9}{16} r_0 = 0.5625 r_0$$

} $\phi=0$ で:

*) Dyson が考えたのは、右側の気体が噴盤の場合である。

となる。この方法で求めた C' を、図II-3に書き入れてある。数値計算と Dyson 流のやり方は一致しない。後者では、 t_1, t_2 が r_0 に比べて十分小さいということが前提になっているが、これが成立しないことが不一致の最大の原因と思われる。

IV 吐すじ

一様流中の吹き出しの問題において、吹き出されるガスの速度が十分大きいときには、下流に渦が発生し、発達しながらゆっくりと後方に流れる。図II-3からわかるごとく、時間がたてば、渦の大きさは吹き出口の大きさ(径)よりも大きくなるゆえ、 γ を変えても状況はあまり変わらないであろう。前方の接触不連続面の位置を Newton 近似で求めるのは、あまり正確ではない。今後、吹き出しの中心に重力源がある場合の、流れの受ける重力の影響を調べる予定である。